

Étude pour un pendule de Foucault à la heig-vd

Professeur Éric Lambert, heig-vd, Docteur en sciences

20 septembre 1995

Résumé

Ce document est une brève étude en vue de la réalisation d'un pendule de Foucault à la heig-vd. Il présente les résultats que l'on peut en attendre dans le cadre d'une excitation paramétrique utilisée pour l'entretien du mouvement du pendule.

1 Introduction

La réalisation d'un pendule de Foucault n'est pas une mince affaire. En effet, quelques lectures rapides [1-6] suffisent pour prendre conscience du soin qu'il faut apporter à la réalisation d'un pendule entretenu dont le plan d'oscillation précesse avec une vitesse angulaire proche de celle attendue

$$\Omega_F = \Omega_T \sin\theta_L \quad (1)$$

où $\Omega_T = 2\pi/24\text{h}$ est la vitesse angulaire de la rotation de la Terre et θ_L est la latitude du lieu où se trouve le pendule. La difficulté réside dans le fait qu'une légère anisotropie du dispositif de suspension ou du système d'entretien peut aisément conduire le pendule à osciller préférentiellement dans un plan ou à acquérir une trajectoire elliptique. Cette dernière, par ailleurs pas très esthétique, donne lieu à une précession parasite pouvant masquer Ω_F . Cette précession est due à l'anisotropie et à l'anharmonicité propre à tout pendule [2].

Sans sous-estimer le soin à donner à la qualité du pivot et du fil de suspension, un point crucial est le système d'entretien. La grande majorité de ceux-ci sont électromagnétiques et agissent sur la masse du pendule ou sur un aimant permanent lui étant fixé. Plusieurs solutions au problème de l'ellipticité de l'oscillation (et de la précession parasite qu'elle engendre) ont été envisagées avec succès. On peut mentionner l'anneau de Charon [5, 6], l'anneau de Foucault [3, 4] ainsi que différentes subtilités au niveau de l'excitation magnétique [1, 2].

Cependant, ces solutions, pas toujours élégantes, peuvent avantageusement être remplacées par une excitation paramétrique [7, 8] du pendule qui consiste à élever et baisser son point de suspension en synchronisme avec son oscillation. Cette excitation est intéressante parce qu'elle conduit à une réduction naturelle de l'ellipticité des oscillations [9] et qu'elle est aisément réalisable.

2 L'excitation paramétrique

Dans cette section, nous supposons que le laboratoire est un référentiel d'inertie. Nous faisons ainsi totalement abstraction de la force de Coriolis responsable de la précession du plan d'oscillation du pendule. Par ailleurs, nous supposons que celui-ci est parfaitement isotrope et assimilable à un pendule simple de longueur L et de masse m dont le point de suspension est soumis à une oscillation harmonique de pulsation ω_e et d'amplitude a (fig. 1).

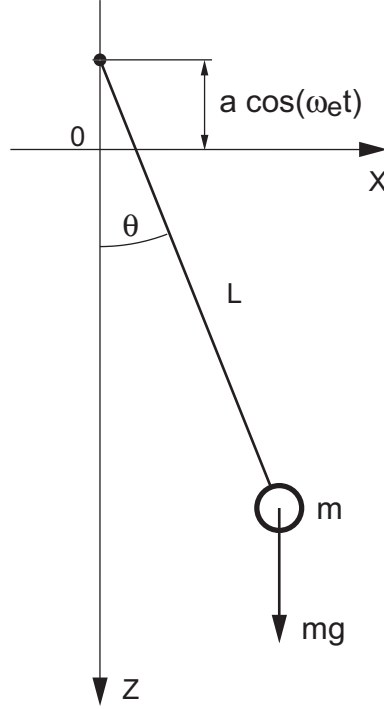


FIG. 1 – Excitation paramétrique du pendule de Foucault

2.1 Équation du mouvement

On peut montrer que l'équation du mouvement d'un tel pendule amorti par un frottement de type visqueux

$$F_f = -b v \quad (2)$$

est la suivante

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 - \epsilon \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cos(\omega_e t) - 2 \frac{\gamma}{\omega_0} \epsilon \frac{\omega_e}{\omega_0} \sin(\omega_e t) \right] \sin(\theta) = 0 \quad (3)$$

où

$$\epsilon = \frac{a}{L}, \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4)$$

En supposant

1. un amortissement faible : $\gamma \ll \omega_0$,
2. une légère excitation : $\epsilon \ll 1$,
3. de petites oscillations : $\sin \theta \approx \theta$

cette équation devient

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 - \epsilon \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cos(\omega_e t) \right] \theta = 0 \quad (5)$$

Une équation similaire a été développée par G. Derron [10]. On la retrouve aussi dans la littérature [7, 8].

2.2 Équation de Mathieu

En l'absence d'amortissement, l'équation (5) devient l'équation de Mathieu

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 - \epsilon \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \cos(\omega_e t) \right] \theta = 0 \quad (6)$$

Cette équation, abondamment étudiée dans la littérature [11], possède des solutions de différents types. En particulier, il existe dans le plan $(\omega_e; \epsilon)$ des domaines où la solution est instable, où une résonance a lieu, où le mouvement est amplifié par l'excitation. Ces domaines sont bordés par des courbes où la solution est périodique. Hors de ces domaines, la solution est stable, donc temporellement décroissante et pratiquement inintéressante ici.

Pour de petites valeurs du paramètre $\epsilon = a/L$, ces résonances ont lieu pour des pulsations d'excitation ω_e proches de

$$\frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

La largeur de ces domaines de résonance décroît rapidement lorsque n augmente pour un ϵ donné. Ainsi, seul le premier domaine est pratiquement intéressant et on peut montrer [8] qu'en posant

$$\omega_e = 2\omega_0 + \delta \quad (8)$$

la résonance paramétrique a lieu pour autant que

$$\epsilon > \left| \frac{\delta}{2\omega_0} \right|, \quad \delta \ll \omega_0 \quad (9)$$

En première approximation, on peut montrer que la présence d'un amortissement modifie cette condition qui devient

$$\epsilon > \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2\omega_0}\right)^2} \quad (10)$$

Pratiquement, afin de profiter au maximum de l'amplification paramétrique et limiter l'aspect généralement chaotique du mouvement qu'elle engendre, on asservira la pulsation de l'excitation à celle du pendule en prenant

$$\omega_e = 2\omega_0 \quad (11)$$

et on choisira

$$\epsilon = \frac{a}{L} > \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (12)$$

De plus, lorsque l'amplitude du mouvement dépasse une valeur choisie, on coupera temporairement l'excitation ($\epsilon = 0$). Cette solution paraît pratiquement plus simple qu'un réglage continu de l'excitation.

2.3 Aspects énergétiques

Considérant le pendule non amorti obéissant à l'équation (6), on peut calculer la tension dans le fil de suspension ainsi que le travail fourni par l'excitation. En posant $\omega_e = 2\omega_0$ et en imposant le mouvement

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (13)$$

on trouve le travail fourni par l'excitation durant une période

$$W = 2\pi mg a \theta_0^2 \sin(2\varphi) \quad (14)$$

Ce travail est maximum lorsque $\varphi = \pi/4$

$$W_{max} = 2\pi mg a \theta_0^2 \quad (15)$$

On comprend aisément ce résultat car l'excitation tire la masse vers le haut alors que l'accélération normale (la tension dans le fil) est la plus grande (fig. 2).

D'autre part, on peut aisément calculer l'énergie dissipée pendant une période par la force de frottement (équ. 2). On trouve alors

$$E_{diss} = \pi b \theta_0^2 L^2 \omega_0 \quad (16)$$

La condition d'entretien $W_{max} > E_{diss}$ conduit directement à l'équation (12).

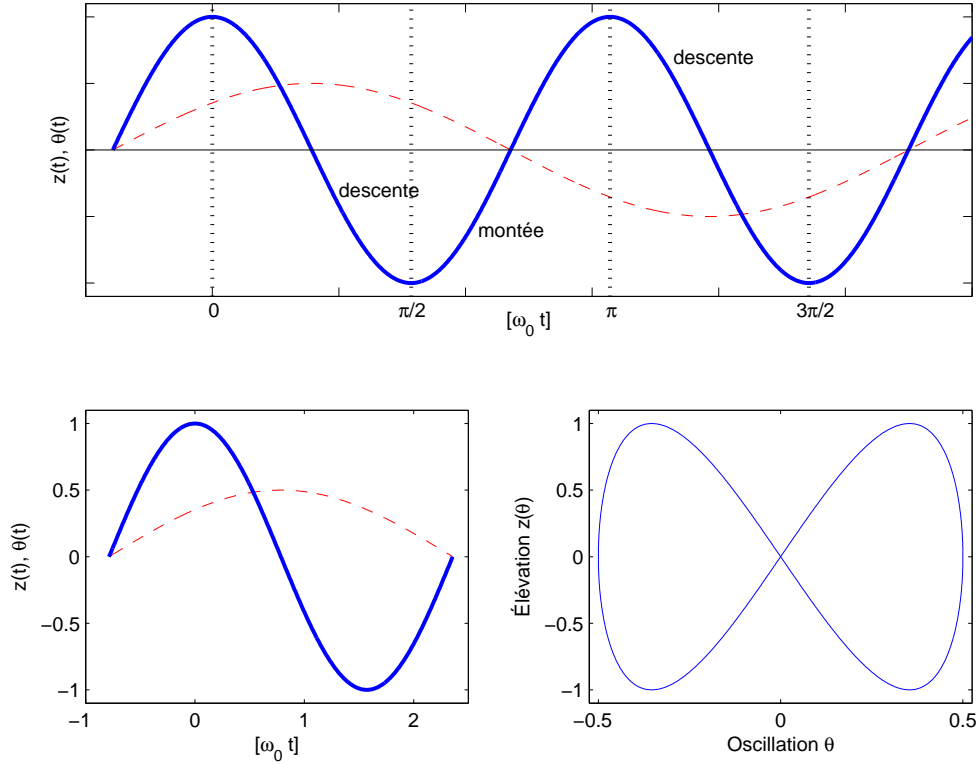


FIG. 2 – Élévation $z(t)$ du point de suspension (—) et mouvement $\theta(t)$ du pendule (- - -)

3 Oscillations elliptiques, précession

Comme on l'a déjà évoqué dans l'introduction, un pendule oscillant elliptiquement précède pour deux raisons

1. l'anharmonicité de la force de rappel,
2. l'anisotropie du système.

Pour autant que la phase de l'excitation paramétrique soit celle correspondant au maximum d'énergie transmise au système, on peut montrer que cette excitation ne produit pas de précession supplémentaire. Considérant le premier ordre de la perturbation, on peut écrire pour la vitesse angulaire de précession du pendule [9]

$$\Omega_{tot} = \Omega_F + \Omega_{ah} + \Omega_{ai} \quad (17)$$

avec

- Ω_F la précession de Foucault

$$\Omega_F = \Omega_T \sin(\theta_L) \quad (18)$$

- Ω_{ah} la précession anharmonique

$$\Omega_{ah} = \frac{3}{8} \omega_0 \theta_0^2 \cdot e \quad (19)$$

- Ω_{ai} la précession anisotrope

$$\Omega_{ai} = \Delta\omega_0 \cos(2\psi) \cdot e \quad (20)$$

- $\Delta\omega_0$ la différence des pulsations propres du pendule selon les deux axes principaux

- ψ l'angle formé par le grand axe de l'ellipse d'oscillation et le plan principal dans lequel l'oscillation a lieu avec la pulsation $\omega_0 - \Delta\omega_0/2$

– e l'ellipticité de l'oscillation (petit axe / grand axe de l'ellipse)

Par ailleurs, toujours selon la même référence [9], on peut montrer que l'anharmonicité n'entraîne pas de variation temporelle de l'ellipticité alors qu'une anisotropie conduit à

$$\dot{e}_{ai} = -\frac{\Delta\omega_0}{2} \sin(2\psi) \quad (21)$$

et que l'entretien paramétrique, toujours avec le bon choix de la phase (maximum d'énergie transmise au système), conduit à

$$\dot{e}_{ep} = -2\omega_0 \epsilon e \quad (22)$$

On obtient ainsi la précession totale

$$\Omega_{tot} = \Omega_F + \left[\frac{3}{8} \omega_0 \theta_0^2 + \Delta\omega_0 \cos(2\psi) \right] \cdot e \quad (23)$$

et la variation de l'ellipticité

$$\dot{e}_{tot} = -\frac{\Delta\omega_0}{2} \sin(2\psi) - 2\omega_0 \epsilon e \quad (24)$$

À partir de ces équations, on peut voir que pour un pendule "bien équilibré et bien lancé", l'ellipticité tend vers une valeur stationnaire donnée par

$$e_{tot} = \frac{\alpha}{\sqrt{4 + \beta^2}} \sin\left(2\psi - \arctan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) \quad (25)$$

où

$$\alpha = \frac{\Delta\omega_0}{2\Omega_F}, \quad \beta = \frac{2\omega_0}{\Omega_F} \frac{a}{L}$$

De cette analyse, on tire le facteur de réduction de l'ellipticité stationnaire

$$f = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}}$$

induite par l'excitation paramétrique. Ce facteur de réduction est important car, il ne faut pas l'oublier, l'ellipticité engendre une précession parasite du pendule.

4 Vibrations propres du fil de suspension

L'excitation paramétrique du pendule, surtout si celle-ci est réalisée à l'aide d'un moteur pas-à-pas, peut conduire à une vibration propre du fil de suspension. Seuls les modes transversaux sont à considérer, car les modes longitudinaux ont lieu à des fréquences nettement supérieures si le fil est suffisamment rigide. Ce qui est le cas d'un fil en acier car le module d'élasticité E est beaucoup plus grand que la contrainte σ de traction du fil.

Les fréquences propres des modes transversaux sont données par

$$f_N = \frac{N}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (26)$$

où μ est la masse linéique du fil. Si l'entraînement se fait par un moteur à M pas, il s'ensuit une fréquence d'excitation égale à

$$f_{exc} = 2M \frac{\omega_0}{2\pi} = M \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (27)$$

Ainsi, si l'excitation est réalisée à l'aide d'un moteur pas-à-pas, il s'agira d'éviter toutes les valeurs de M voisines des valeurs données par

$$M_{crit} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{\mu L}} N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (28)$$

5 Dimensionnement du pendule, ordres de grandeurs

Le pendule de la heig-vd sera réalisé avec un fil en acier et une masse en laiton caractérisés par

$$L = 20 \text{ [m]}, \quad d = 2 \text{ [mm]}, \quad m = 25 \text{ [kg]}$$

Ce qui conduit à

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0.7 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 9.0 \text{ [s]}$$

Une première mesure estimative de la demi-vie de l'oscillation a conduit à $T_{1/2} \simeq 30 \text{ [min]}$. Ce qui correspond à un paramètre d'amortissement valant

$$\gamma = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} = 3.85 \cdot 10^{-4} \simeq 4 \cdot 10^{-4} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Il s'ensuit que

$$\epsilon = \frac{a}{L} > \frac{\gamma}{\omega_0} = 5.7 \cdot 10^{-4}$$

d'où une amplitude d'excitation valant

$$a = \epsilon L > 1.1 \text{ [cm]}$$

Le facteur de réduction de l'ellipticité peut aussi être estimé. Comme Yverdon-les-Bains se situe à la latitude

$$\theta_L = 46^{\circ}50'$$

la précession du pendule se fera à la vitesse angulaire

$$\Omega_F = \Omega_T \sin\theta_L = 5.3 \cdot 10^{-5} \text{ [s}^{-1}\text{]} = 10.96 \text{ [deg / h]}$$

On en déduit alors

$$\beta = \frac{2\omega_0}{\Omega_F} \frac{a}{L} = 15.0$$
$$f = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4}} = 7.6$$

6 Conclusions

À côté de son intérêt scientifique et technique, la réalisation d'un pendule de Foucault dans le hall de la heig-vd semble représenter une carte de visite originale et de qualité pour cette école. La solution proposée, à savoir l'entretien du pendule par excitation paramétrique, possède de nombreux avantages comparativement à d'autres systèmes d'entretien. Nous nous sommes efforcés de le démontrer.

Le principe de l'excitation paramétrique est connu depuis bien longtemps (c'est ainsi que les moines de Saint-Jacques de Compostelle entretiennent depuis 1851 le mouvement d'un grand encensoir, le Botafumeiro). Malgré cela, la réalisation d'un pendule de Foucault demande une grande attention et beaucoup de soins que notre école peut apporter grâce à sa maîtrise des ressources technologiques actuelles.

Références

- [1] H. F. Meiners : Physics Demonstration Experiments, Ronald Press NY 1970, pp 299–305
- [2] H. R. Crane : 1981, 'Short Foucault pendulum : a way to eliminate the precession due to ellipticity', *American Journal of Physics* **49** (11), 1004

- [3] Zum Foucault-Pendel im Brown Boveri Forschungszentrum, BBC (1981)
- [4] G. Mastner et al : 1984, 'Foucault pendulum with eddy-current damping of the elliptical motion', *Rev. Sc. Instrum.* **55** (10), 1533
- [5] H. Kruglak, R. Pittet. : 1980, 'Portable, Continuously Operating Foucault Pendulum', *American Journal of Physics* **48**(5), 419-420
- [6] E. Reynhardt, T. van der Walt, L. Soskolsky. : 1986, 'A Modified Foucault Pendulum for a Corridor Exhibit', *American Journal of Physics* **54**(8), 759-761
- [7] F. Pinto. : 1993, 'Parametric Resonance : an Introductory Experiment', *The Physics Teacher* **31**(6), 336-346
- [8] L. Landau, F. Lifchitz, Mécanique, édition Mir Moscou, 1960, pp 113-119
- [9] A.B. Pippard : 1988, The parametrically maintained Foucault pendulum and its perturbation, *Proc. R. Soc. London, A* **420**, 81-91
- [10] G. Derron, communication privée
- [11] Abramowitz and Stegun : Handbook of Mathematical Functions, Dover New York (1972), p 722