

Notes sur l'entretien des oscillations d'un pendule

Professeur Georges Derron, Einev, Ing. él. EPUL
Professeur Freddy Mudry, heig-vd, Ing. phys. EPFL

20 décembre 2010

Résumé

Cette étude a pour objet l'analyse du comportement d'un pendule dont le point de suspension oscille verticalement au double de la fréquence du pendule. L'étude est limitée aux petites oscillations.

L'originalité de la présente étude est de considérer une force de frottement causée par l'air proportionnelle au carré de la vitesse de la masse du pendule. Cette considération permet d'établir que, dans ce cas, le comportement du pendule est naturellement stable quelle que soit l'amplitude de l'excitation. Il est important de le souligner car souvent, pour simplifier les calculs, on considère un frottement proportionnel à la vitesse alors que, dans ce cas, un entretien continu du mouvement peut conduire à une croissance exponentielle de l'amplitude.

1 Introduction

Peu avant la réalisation du pendule de Foucault de la heig-vd, Georges Derron, professeur à l'Einev, a fait une analyse détaillée du fonctionnement d'un pendule dont le mouvement est entretenu par l'élévation périodique de son point de suspension.

Ses notes étant restées sous forme manuscrite [1] et devant l'intérêt renaissant pour le pendule de Foucault de la heig-vd, F. Mudry, professeur à la heig-vd, a retranscrit et mis en page une partie de ces notes sous la forme du présent document. Il a également adapté les résultats numériques et les graphiques aux paramètres du PF tel qu'il a été réalisé en décembre 1995.

On notera que, le détail des calculs se trouvant dans [1], seul l'essentiel des résultats a été repris et discuté ici. De plus, les parties suivantes n'ont pas été retranscrites :

- l'étude des régimes transitoire ([1], p. 12) et permanent ([1], p. 15) ;
- l'analyse des oscillations propres du système fil-masse ([1], annexe 8) ;
- l'étude détaillée du pendule conique excité prenant en compte l'anharmonicité cause d'une précession et d'une ellipticité ([1], annexe 9).

2 Équation d'un pendule à mouvement entretenu

Considérant le pendule de la figure 1 dont le point de suspension S oscille verticalement sur l'axe OZ avec une excitation $s(t)$, on montre ([1], annexe 1) que le mouvement pendulaire est décrit par l'équation suivante

$$-mgL \sin \theta + F_f L = mL^2 \ddot{\theta} + mL \ddot{s} \sin \theta \quad (1)$$

En simplifiant par mL^2 , cela donne

$$\ddot{\theta} - \frac{F_f}{mL} + \frac{\ddot{s}}{L} \sin \theta + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Admettant un faible angle d'oscillation ($\sin \theta \simeq \theta$), et définissant de manière classique la pulsation propre d'oscillation du pendule

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3)$$

on obtient l'équation du mouvement de la masse du pendule

$$\ddot{\theta} - \frac{F_f}{mL} + \frac{\ddot{s}}{L} \theta + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4)$$

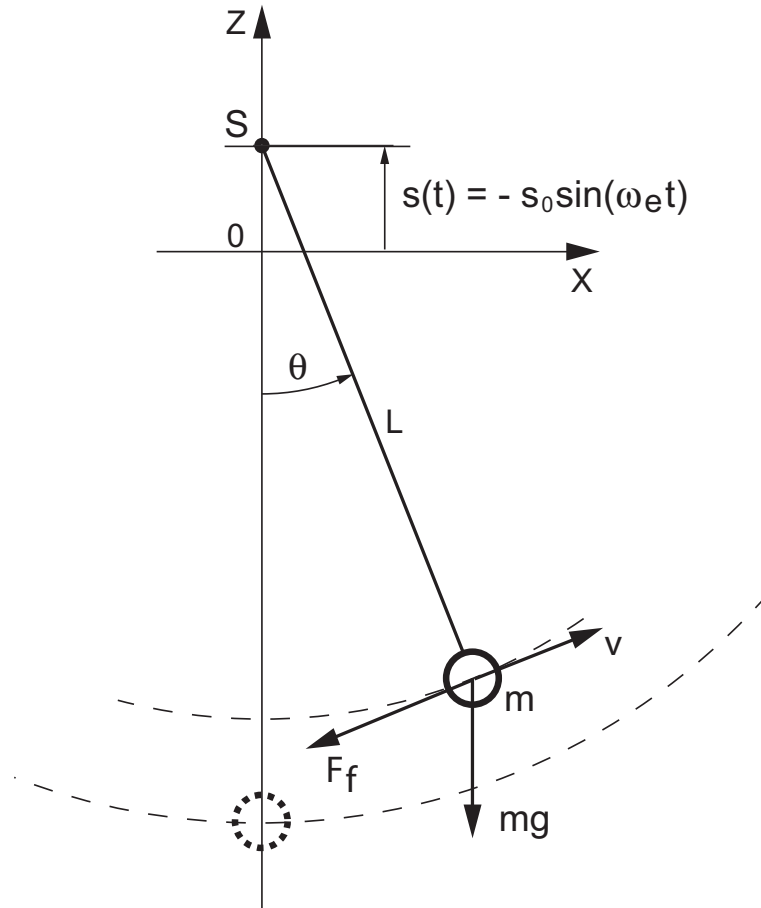


FIGURE 1 – Pendule dans son plan Oxz

2.1 Paramètres du pendule de la heig-vd

Dans ce qui suit, on sera amené à quantifier certains calculs. On le fera à partir des mesures relevées sur le pendule de la heig-vd, à savoir :

- sa longueur $L = 20$ m,
- sa masse $m = 19.45$ kg,
- le diamètre de la sphère $D_s = 16.6$ cm,
- le diamètre du fil de suspension $d_f = 1$ mm,
- le rayon de lancement $R_0 = 0.9$ m,
- le temps nécessaire, en régime libre, pour que le frottement de l'air réduise d'un facteur 2 l'amplitude de l'oscillation $t_{demi} = 61$ min.

De ces valeurs, on déduit immédiatement que le pendule de la heig-vd oscille avec une pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0.7 \text{ [rad/sec]} \quad (5)$$

et une période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 9 \text{ [sec]} \quad (6)$$

2.2 Force de frottement

Dans l'équation (4), seuls les paramètres L et m décrivant le pendule sont mesurables directement. Par contre, la force de frottement F_f est inconnue ; ce qui, si l'on veut poursuivre l'analyse, nous oblige à rechercher un modèle pour celle-ci. Généralement, deux possibilités sont envisagées :

1. la force de frottement est proportionnelle à la vitesse ; on parle alors de frottement visqueux valable pour de faibles vitesses,
2. lorsque la vitesse est suffisamment élevée, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse car l'écoulement de l'air n'est plus laminaire.

La délimitation entre ces deux modèles est fixée par la valeur du nombre de Reynolds ([1], annexe 2)

$$R_e = \frac{\rho_{air} D_s v}{\mu_{air}} \quad (7)$$

qui dépend de la vitesse v de la sphère, de son diamètre D_s , de la masse spécifique de l'air ρ_{air} et de son coefficient de viscosité μ_{air} . Prenant pour l'air à 20°C

$$\rho_{air} = 1.2 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \quad \mu_{air} = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ [kg/(m sec)]} \quad (8)$$

son évaluation pour le pendule de la heig-vd donne

$$R_e \simeq 7'000 \quad (9)$$

Ce qui est sensiblement au dessus de la valeur délimitant les deux modèles ($R_e \simeq 2'300$). On admettra donc pour la suite que le module de la force de frottement est représenté par

$$F_f = -\lambda m \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right| \quad (10)$$

Ainsi, le mouvement pendulaire entretenu est finalement décrit par l'équation

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{L} \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right| + \frac{\ddot{s}}{L} \theta + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (11)$$

3 Évaluation du frottement

On s'intéresse ici à la quantification de la force de frottement F_f ; plus précisément à la valeur du coefficient d'amortissement λ ([1], p. 2). Ce calcul repose sur l'évaluation des pertes énergétiques du pendule.

3.1 Travail de freinage

Le travail de la force de frottement F_f est décrit par

$$W_f = \int \vec{F}_f \cdot \vec{dl} = - \int F_f \cdot dl \quad (12)$$

dont la différentielle vaut

$$dW_f = -F_f dl = -F_f v dt = -F_f (-L\dot{\theta}) dt = F_f L \dot{\theta} dt \quad (13)$$

Admettant un mouvement périodique sinusoïdal pour le pendule

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (14)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t) \quad (15)$$

il vient

$$dW_f = \lambda mL \dot{\theta}^3 dt \quad (16)$$

Ce qui donne pour une demi-période d'oscillation un travail de freinage valant

$$\begin{aligned} W_{f,T/2} &= -\lambda mL (\omega_0 \theta_0)^3 \int_0^{T/2} \sin^3(\omega_0 t) dt \\ &= -\lambda mL \omega_0^2 \theta_0^3 \int_0^\pi \sin^3 x dx \end{aligned}$$

d'où

$$W_{f,T/2} = -\frac{4}{3} \lambda mL \omega_0^2 \theta_0^3 \quad (17)$$

3.2 Évaluation de λ

Cette évaluation repose sur la mesure du temps nécessaire pour que l'amplitude d'oscillation diminue d'un facteur 2. Ayant mesuré $t_{demi} \simeq 61$ [min] pour une amplitude de lancement $R_0 = 0.9$ [m] et sachant que le pendule oscille avec une période $T_0 \simeq 9$ [sec], on voit que celui-ci effectue

$$N = \frac{t_{demi}}{T_0/2} = 816$$

demi-oscillations pendant t_{demi} ; c'est-à-dire pendant le temps nécessaire pour passer de θ_0 à $\theta_0/2$.

Considérant la diminution d'énergie d'un instant à un autre, on peut écrire, grâce au théorème de la conservation d'énergie, que pendant une demi-période on a

$$mg z_1 + W_{f,T/2} = mg z_2 \quad (18)$$

$$mgL (1 - \cos \theta_1) + W_{f,T/2} = mgL (1 - \cos \theta_2) \quad (19)$$

Cette équation conduit à une relation entre l'angle de départ θ_1 et l'angle d'arrivée θ_2 décrite par ([1], p. 3)

$$\cos \theta_1 + \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \theta_1^3 = \cos \theta_2 \quad (20)$$

d'où

$$\theta_2 = \arccos \left(\cos \theta_1 + \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \theta_1^3 \right) \quad (21)$$

Une approche numérique permet de trouver une solution à cette équation. En effet, admettant a priori une valeur pour λ , on passe itérativement de l'angle de départ θ_0 à $\theta_0/2$ en vérifiant si cette position est bien atteinte en N oscillations. Le programme de calcul présenté dans la figure 2 permet de trouver la valeur de λ

$$\lambda \simeq 0.41 \text{ [m]}$$

La figure 3 montre l'évolution de l'amplitude au cours du temps ainsi que le résultat des modèles de la force de freinage proportionnelle à v^2 ou à v . Le calcul de l'écart quadratique moyen favorise le modèle en v^2 avec $\sigma_{v^2} = 2.1$ [cm] par rapport au modèle en v avec $\sigma_v = 2.8$ [cm]. Ce qui confirme, comme la valeur du nombre de Reynolds, la validité du modèle en v^2 .

À ce stade, il est intéressant de relever que le coefficient de traînée de la sphère en laiton chromé ([1], annexe 2)

$$c_w \equiv \frac{|F_f|}{F_{inertie}} = \frac{\lambda m (v/L)^2}{\frac{1}{2} \rho_{air} v^2 A_s} = \frac{4}{3} \frac{\lambda D_s \rho_s}{L^2 \rho_{air}} \simeq 1.5 \quad (22)$$

possède une valeur bien supérieure à celle proposée par la littérature qui, suivant que la sphère est lisse ou rugueuse, donne généralement

$$0.2 < c_w < 0.5 \quad (23)$$

En prenant en compte la traînée du cylindre de fixation du fil et celle d'une demi-longueur du fil, on obtient une nouvelle valeur pour c_w

$$c_w = \frac{\lambda m (v/L)^2}{\frac{1}{2} \rho_{air} v^2 (A_s + A_{cyl} + A_{fil})} \simeq 0.98 \quad (24)$$

qui est encore trop grande. Cela signifie-t-il que λ est trop élevé?

```
% calcul du coeff de frottement quadratique
% paramètres du pendule
g = 9.81; L = 20; M = 19.45;
R0 = 0.9; Tdemi = 61*60;
theta0 = R0/L;
T0 = 2*pi*sqrt(L/g);
Ndemi = round(Tdemi/(T0/2));

% calcul itératif de lambda
lambda = 0.1; dlambd = 0.001; cpt = 0;
while (theta1 >= theta0/2)
    lambda = lambda + dlambd;
    theta1 = theta0;
    while (cpt < Ndemi)
        theta2 = acos(cos(theta1) + 4/3*lambda/L*theta1^3);
        theta1 = theta2;
        cpt = cpt + 1;
    end
end;
cpt_theta1_lambda = [cpt, theta1, lambda]
% cpt_theta1_lambda = 816, 0.022497, 0.408
```

FIGURE 2 – Algorithme pour calculer λ

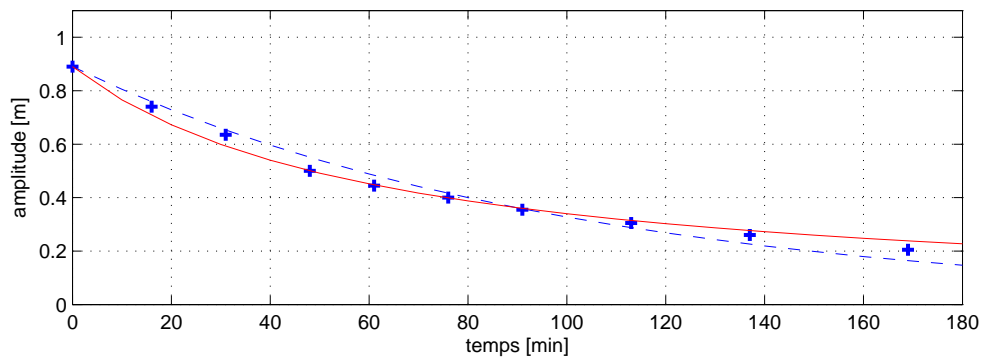


FIGURE 3 – Évolution de l'amplitude du pendule libre : a) mesures +, b) modèle en v^2 —, c) modèle en v - - -

Une analyse plus détaillée ([1], annexe 4) permet de relier l'amplitude actuelle $R(t)$ à l'amplitude de départ $R(0)$

$$\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R(0)} = \frac{8}{3L^2 T_0} \lambda t \quad (25)$$

ainsi que la durée T_{demi} au coefficient de frottement λ

$$\lambda = \frac{3L^2}{8R_0} \frac{T_0}{T_{demi}} \quad (26)$$

L'équation (25) montre que l'inverse de l'amplitude varie linéairement avec le temps. Ceci est confirmé par le graphe de la figure 4. Un ajustement polynomial d'ordre 1 permet de trouver une valeur de λ basée sur l'ensemble des points mesurés plutôt que sur la seule valeur de t_{demi} . On trouve alors pour λ et R_0 des valeurs supérieures aux précédentes

$$\lambda = 0.486 \text{ [m]} \quad \text{avec} \quad R_0 = 1.05 \text{ [m]} \quad (27)$$

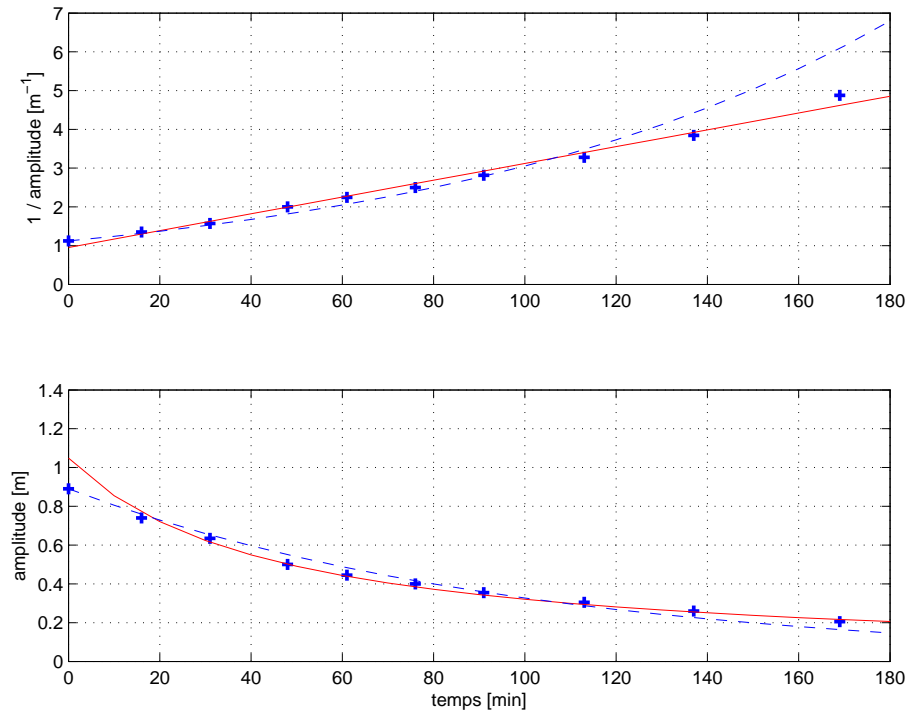


FIGURE 4 – Ajustage polynomial de l'évolution de l'amplitude du pendule libre : a) mesures +, b) modèle en v^2 —, c) modèle en v - -

4 Pendule entretenu

Deux approches pour l'entretien du mouvement pendulaire sont retenues. L'une consiste à élever ou abaisser brusquement le point de suspension S du pendule aux moments opportuns alors que dans la deuxième, plus élaborée, on déplace sinusoïdalement le point de suspension.

4.1 Approche simplifiée

On se propose ici de calculer le travail nécessaire à l'entretien du mouvement pendulaire en considérant que l'élévation se fait brusquement au moment du passage à la verticale du pendule et que l'abaissement du pendule se fait également brusquement aux extrémités de l'oscillation ([1], p. 4).

Lorsque le pendule passe en position verticale, sa vitesse est maximale et la tension T dans le fil est également maximale; elle vaut alors

$$T_{max} = mg + m \frac{v^2}{L} \quad (28)$$

Lorsque le pendule atteint l'une des deux position extrêmes ($\theta = \pm\theta_0$), la tension dans le fil est minimale et elle vaut

$$T_{min} = mg \cos \theta_0 \quad (29)$$

On comprend ainsi que le travail d'élévation est plus grand que le travail d'abaissement et que la différence est l'énergie fournie au pendule par le moteur qui entraîne le point de suspension S . Ce gain d'énergie sert à compenser la perte d'énergie causée par le freinage de l'air et, le cas échéant, à accroître l'amplitude de l'oscillation du pendule.

Considérant les énergies mises en cause pour une élévation et un abaissement brusques de la valeur pic-pic $2s_0$, on a

$$W_{el} = T_{max} \cdot 2s_0 = \left(mg + m \frac{v^2}{L} \right) \cdot 2s_0 \quad (30)$$

$$W_{ab} = T_{min} \cdot 2s_0 \cos \theta_0 = mg \cdot 2s_0 \cos^2 \theta_0 \quad (31)$$

$$\Delta W \equiv W_{el} - W_{ab} = |W_{f, T/2}| = \frac{4}{3} \lambda m L \omega_0^2 \theta_0^3 \quad (32)$$

De la conservation de l'énergie, on déduit

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgz = mgL (1 - \cos \theta_0) \quad (33)$$

d'où

$$\frac{v^2}{L} = 2g (1 - \cos \theta_0) \quad (34)$$

Partant de ces relations, on montre ([1], p. 4) que l'amplitude nécessaire au maintien de l'oscillation vaut

$$s_0 = \frac{2 \lambda \theta_0^3}{3 (3 - 2 \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0)} \quad (35)$$

Ce qui, tenant compte des valeurs numériques proposées plus haut, donne une amplitude pour le déplacement du point de suspension valant

$$s_0 \simeq 6 \text{ [mm]}$$

On notera que cette valeur est certainement trop petite car le gain d'énergie réel est plus faible que ne le prévoit cette approche simplifiée en admettant une élévation et un abaissement brusques du point de suspension.

4.2 Excitation sinusoïdale

En réalité pour entretenir le mouvement du pendule, on préfère déplacer son point de suspension S en un mouvement vertical sinusoïdal synchronisé avec l'oscillation du pendule. On fera donc en sorte, grâce à un asservissement, que

- la vitesse d'*élévation* du point de suspension S soit maximale lorsque le pendule passe en position verticale ($\theta = 0$),
- la vitesse de *descente* du point de suspension S soit maximale lorsque le pendule passe par chacune de ses positions extrêmes ($\theta = \pm\theta_0$).

À partir des mouvements oscillants sinusoïdaux du pendule $\theta(t)$ et du point de suspension $s(t)$,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (36)$$

$$s(t) = -s_0 \sin 2\omega t \quad (37)$$

on peut calculer les accélérations \ddot{x} et \ddot{y} de la masse du pendule ([1], p. 6) et en déduire que la tension T dans le fil de suspension vaut

$$T = mg \cos \theta + m\ddot{s} \cos \theta + mL\dot{\theta}^2$$

et également cette relation

$$\frac{T}{mg} = \cos(\theta_0 \cos \omega t) \cdot \left(1 + 4 \frac{s_0}{L} \sin 2\omega t\right) + \theta_0^2 \sin^2 \omega t \quad (38)$$

qui sera utile à la section 5 pour estimer les variations de la longueur L du pendule dues à l'élasticité du fil.

4.3 Travail d'excitation

Le moteur déplaçant le point de suspension S effectue sur une demi-oscillation du pendule un travail donné par

$$W_{T/2} = \int_0^{T/2} \vec{T} \cdot d\vec{s} = \int_0^{T/2} T \cos \theta ds \quad (39)$$

avec

$$\theta = \theta_0 \cos x, \quad x = \omega_0 t, \quad dx = \omega_0 dt \quad (40)$$

$$\frac{ds}{dt} = -2\omega_0 s_0 \cos 2x, \quad ds = -2s_0 \cos 2x dx \quad (41)$$

$$T = mg \cos \theta + m\ddot{s} \cos \theta + mL\dot{\theta}^2 \quad (42)$$

Ce qui donne ([1], p. 7)

$$W_{T/2} = -2mgs_0 \int_0^\pi \cos 2x \cos \theta \left[\left(1 + 4 \frac{s_0}{L} \sin 2x\right) \cos \theta + \theta_0^2 \sin^2 x \right] dx \quad (43)$$

Le calcul numérique (fig. 5) de la valeur de cette intégrale se fait par la méthode de Simpson pour différentes valeurs de s_0 . En recherchant une valeur de s_0 telle que le travail d'excitation $W_{T/2}$ ci-dessus corresponde au travail de la force de freinage calculé plus haut (équ. 17)

$$W_{f,T/2} = -\frac{4}{3} \lambda mL \omega_0^2 \theta_0^3 \simeq -9.5 \cdot 10^{-3} [\text{J}]$$

on trouve qu'une amplitude d'élévation de 8 mm environ est nécessaire pour compenser la perte d'énergie due au freinage par l'air.

```
% calcul du travail d'excitation
theta0 = 0.045;
s0 = 7e-3; ds = 0.1e-3;
Wf = 9.4586e-3; Wexc = 0;
while Wexc < Wf
    s0 = s0+ds;
    F_dW = @(x) -2*M*g*s0 * cos(2*x) .* cos(theta0*cos(x)) ...
    .* ((1 + 4*s0/L*sin(2*x)) .* cos(theta0*cos(x)))...
    + (theta0*sin(x)).^2);
    Wexc = quad(F_dW,0,pi); % intégration de Simpson
end;
s0_Wf_Wexc = [s0, Wf, Wexc]
% s0_Wf_Wexc = 0.0078  0.0094586  0.0094648
```

FIGURE 5 – Calcul du travail d'excitation

4.4 Diagramme gain-perte d'énergie

Dans la figure 6, on a reporté les énergies d'excitation et de freinage en fonction de l'amplitude d'oscillation R_0 pour différentes valeurs de frottement λ et d'excitation s_0 . Ce diagramme permet les observations suivantes ([1], p. 9) :

1. Les points de fonctionnement possibles se situent aux intersections des courbes énergétiques de perte (en rouge) avec celles de gain (en bleu).
2. Pour un coefficient de freinage $\lambda = 0.41$ et des excitations de 7, 8 et 9 mm, l'amplitude de l'oscillation vaudra environ 0.81, 0.92 et 1.04 m. On trouve ainsi qu'une variation de 1 mm de l'excitation conduit à une variation d'environ 10 cm de l'amplitude d'oscillation.
3. Autour d'un point donné, on remarque que la pente des courbes de perte est plus grande que celle de gain. Il en résulte que l'amplitude R_0 de l'oscillation autour d'un point de fonctionnement est stable.

Si une perturbation apparaît, l'amplitude θ_0 varie; mais dès que la perturbation a disparu, l'amplitude tend à reprendre sa valeur initiale. Il n'est donc pas nécessaire d'asservir l'amplitude d'excitation s_0 à celle du pendule θ_0 . Par contre, il est bien clair que le mouvement de suspension doit être synchronisé avec celui du pendule comme mentionné au début de la section 4.2.

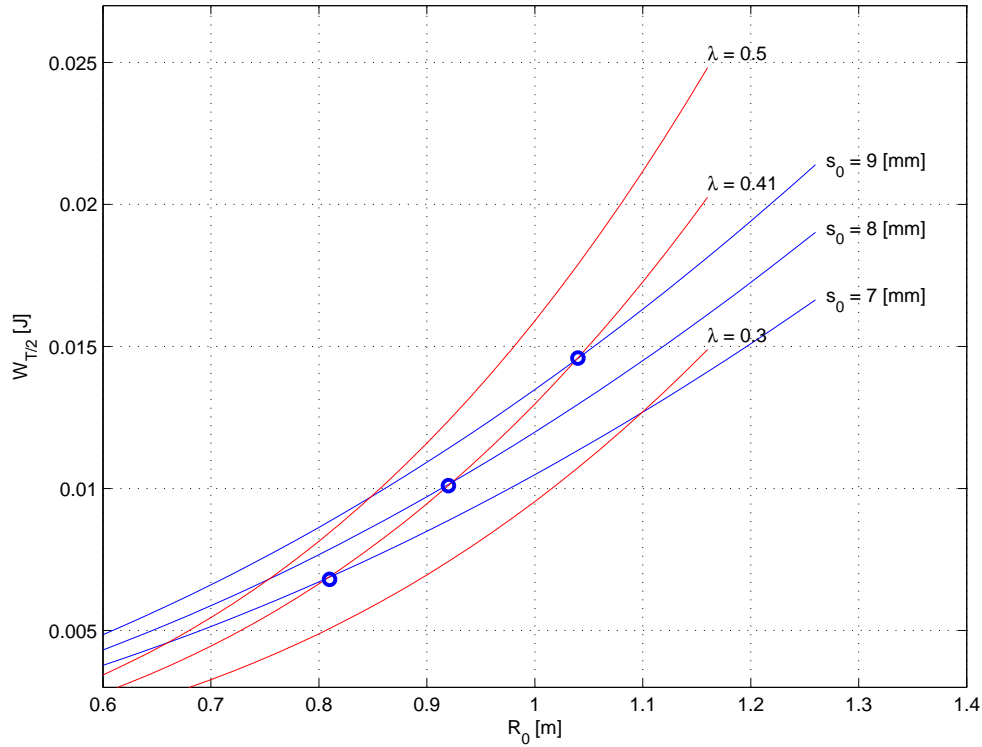


FIGURE 6 – Graphe gain-perte d'énergie

4.5 Force de freinage proportionnelle à v

Dans l'analyse qui précède, on a considéré que la force de freinage était proportionnelle à v^2

$$F_f = \lambda m \dot{\theta}^2 \quad (44)$$

Comme, dans la pratique, il est fréquent d'admettre que la force est de type visqueux

$$F_v = c_v m \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad c_v = \frac{2L}{t_{demi}} \ln 2 = 7.6 \cdot 10^{-3} \text{ [m/sec]} \quad (45)$$

il est intéressant à ce stade d'analyser l'effet d'une telle force ([1], annexe 3). Dans un tel cas, le travail de freinage sur une demi-période vaut

$$W_{vf, T/2} = -\frac{\pi}{2} c_v m L \theta_0^2 \quad (46)$$

alors que le travail d'excitation est décrit par

$$W_{ve, T/2} = \pi m g s_0 \theta_0^2 \quad (47)$$

Comme ces deux travaux sont proportionnels à θ_0^2 , leurs graphes sont deux paraboles qui ne se croisent pas. Dans cette situation, en cas d'excitation permanente, il ne peut pas y avoir d'état stationnaire; l'amplitude du mouvement pendulaire croît ou décroît exponentiellement!

La frontière entre ces deux comportements est donnée par une valeur critique de l'excitation s_0 telle que

$$s_0^* = \frac{c_v}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} = 5.4 \text{ [mm]} \quad (48)$$

5 Influence de l'élasticité du fil

Pour les calculs qui suivent, on considère un fil de diamètre $d_{fil} = 1 \text{ [mm]}$ en acier ressort de haute résistance tel que

$$E_{ac} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (49)$$

La tension dans le fil d'acier est donné par la relation (38) :

$$\frac{T}{mg} = \cos(\theta_0 \cos \omega t) \cdot \left(1 + 4 \frac{s_0}{L} \sin 2\omega t\right) + \theta_0^2 \sin^2 \omega t$$

Le tracé de celle-ci (fig. 7) montre que la tension varie sinusoïdalement avec une amplitude inférieure à 0.3% du poids de la sphère de masse $m = 19.45 \text{ [kg]}$. On constate ainsi que l'allongement dû au poids de la sphère ([1], p. 11)

$$\Delta L = \frac{\sigma}{E_{ac}} L$$

est d'environ 23 mm et que les variations sont trop faibles pour être perceptibles.

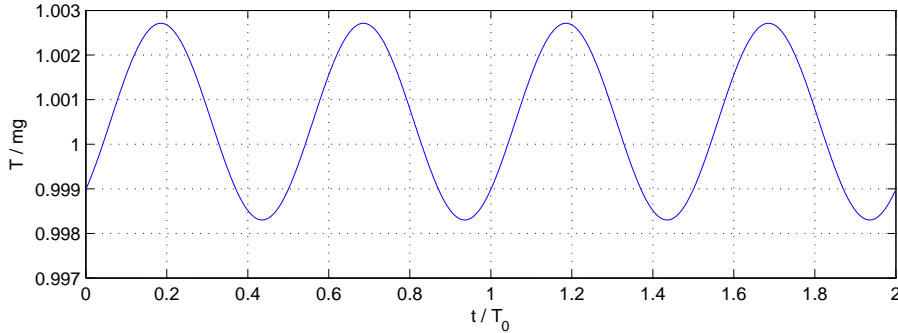


FIGURE 7 – Tension dans le fil

Cependant, il reste intéressant de connaître la fréquence propre du système fil-masse où le fil agit comme un ressort linéaire de constante

$$k_{fil} = \frac{A E_{ac}}{L} = \pi \frac{d_{fil}^2}{4} \frac{E_{ac}}{L} = 8250 \text{ [N/m]} \quad (50)$$

La fréquence propre vaut alors

$$f_{fil} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.3 \text{ [Hz]} \quad (51)$$

Comme elle est quinze fois supérieure à la fréquence d'oscillation du point de suspension

$$f_s = 2 f_0 = 0.22 \text{ [Hz]} \quad (52)$$

on voit qu'elle ne perturbera aucunement le bon fonctionnement du système d'entretien du mouvement pendulaire.

6 Dispositif de suspension

Si l'on veut éviter que le fil de suspension ne casse après quelques heures d'oscillations, il faut absolument supprimer toute flexion de celui-ci au niveau de sa fixation. Pour éviter cela, la suspension du pendule de la heig-vd est actuellement réalisée à l'aide de deux couteaux croisés qui suivent simplement l'orientation du fil au cours du temps. Cependant cette situation conduit à une anisotropie du système qui amène le pendule à avoir une précession propre indépendante de la rotation de la Terre et qui peut aller, si l'anisotropie est trop grande, jusqu'à masquer la précession naturelle du pendule.

Ce phénomène a été mis en évidence en 1998 lors d'une mesure automatique de l'évolution du pendule à l'aide d'une caméra [2]. Cet enregistrement effectué pendant dix-neuf jours montre bien que la précession naturelle du pendule est perturbée par une variation périodique égale à la demi-période de précession. Cela signifie clairement que le pendule oscille sur deux axes préférentiels vraisemblablement fixés par les couteaux croisés.

Une telle situation peut être corrigée en remplaçant les couteaux croisés par une suspension où le fil du pendule serait ancré rigidement dans un support flexible capable de supporter sans fatigue les contraintes répétées de la flexion. Des calculs de résistance de matériaux ([1], annexe 10) montrent qu'un fil en acier ressort à haute résistance de 3 à 5 mm de diamètre et d'une longueur de deux mètres environ est capable de résister sans rompre aux flexions consécutives. Avec cette modification très simple à mettre en oeuvre, l'anisotropie du système actuel devrait disparaître.

7 Conclusion

Cette étude a montré, par une approche simple et didactique, comment la juxtaposition de l'analyse et des moyens de calculs numériques permet d'évaluer quantitativement le comportement d'un système non linéaire. On a ainsi pu mettre en évidence combien il est important d'utiliser un modèle adéquat pour représenter les pertes par frottement.

Références

- [1] Derron Georges, Notes sur l'entretien des oscillations d'un pendule, Einev, juin 1995
- [2] Freddy Mudry, Description et fonctionnement du pendule de Foucault de la heig-vd, heig-vd, 2010