

Note d'application

Ajustage des
Paramètres d'un
Régulateur PID

Prof. F. Mudry

Ajustage des Paramètres des Régulateurs PID

Freddy Mudry

L'Institut d'Automatisation Industrielle (iAi) de l'eivd étudie, met en oeuvre et présente sous forme de notes d'applications des principes et des méthodes développées par ailleurs. Le but de cette note est de mettre à disposition du praticien, dans une forme condensée, diverses méthodes de calcul des paramètres des régulateurs PID ainsi que la méthode d'auto-ajustage proposée par Åström et Hägglund.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Description des régulateurs PID	1
2.1	Le régulateur PID	2
2.2	Le régulateur PID modifié	2
2.3	Équivalent numérique du régulateur PID	4
2.3.1	Terme intégral	4
2.3.2	Terme dérivé	4
2.3.3	Signal de commande	5
2.3.4	Algorithme numérique	5
3	Réponses d'un processus apériodique	6
3.1	Réponse indicielle	6
3.2	Réponse fréquentielle	7
3.3	Caractéristiques d'un processus d'ordre 3	7
4	Synthèse par compensation des pôles	8
5	Méthodes de Ziegler et Nichols (ZN)	10
5.1	Méthode de la réponse indicielle	10
5.2	Méthode du point critique	10
5.3	Exemple	11
5.3.1	Méthode de la réponse indicielle	11
5.3.2	Méthode du point critique	11

6	Méthodes de Åström et Hägglund (AH)	12
6.1	Critère M_s pour l'ajustage des paramètres	12
6.2	Méthode de la réponse indicielle	13
6.3	Méthode du point critique	13
6.4	Exemple	16
6.4.1	Méthode de la réponse indicielle	16
6.4.2	Méthode du point critique	16
7	Comparaison des réponses indicielles	17
8	Régulateurs à relais	19
8.1	Fonctions descriptives	19
8.1.1	Relais sans hystérésis	19
8.1.2	Relais avec hystérésis	20
8.2	Régulateurs à relais	21
8.2.1	Évaluation du gain critique	21
8.2.2	Évaluation d'une partie de la réponse fréquentielle	22
9	Régulateurs PID auto-ajustables	22
9.1	Auto-ajustage en l'absence de bruit	24
9.2	Auto-ajustage en présence de bruit	25
9.2.1	Recherche du premier harmonique	25
9.3	Comparaison des résultats	26

Ajustage des Paramètres des Régulateurs PID

1 Introduction

Les régulateurs PID répondent à plus du 90% des besoins industriels et le nombre de régulateurs installés dans une usine pétrolière, par exemple, se compte par milliers. Malheureusement, malgré l'expérience acquise au fil des ans, les valeurs choisies pour les paramètres P, I et D ne sont pas toujours satisfaisantes, ni adaptées au processus à régler.

L'histoire des régulateurs est déjà longue et il peut être intéressant de rappeler quelques étapes importantes. Les premiers régulateurs de type centrifuge apparaissent vers 1750 pour régler la vitesse des moulins à vent, suivi en 1788 du fameux contrôleur de vitesse d'une machine à vapeur de James Watt.

En 1942, Ziegler et Nichols [1] ont proposé deux démarches permettant de trouver facilement les paramètres optimaux pour une installation donnée. Au fil des ans, les propositions de Ziegler et Nichols ont été adaptées ou modifiées selon les besoins.

En 1963, Horowitz [2] a ajouté un degré de liberté supplémentaire au régulateur PID afin de mieux contrôler les dépassements obtenus lors d'une réponse indicielle. Ce nouveau degré de liberté consiste, en particulier, à ne réinjecter vers le terme proportionnel qu'une partie du signal de sortie.

Au début des années 1990 et dans le but de fournir des règles d'ajustement simples mais plus performantes que celles de Ziegler-Nichols, Åström [3] et ses collaborateurs ont analysé le comportement dynamique d'un grand nombre de processus. Cette analyse a conduit à l'établissement de tableaux servant aux calculs des paramètres P, I et D à partir de mesures simples.

Dans cette note, on présente les régulateurs PID classiques et modifiés avant de passer en revue les méthodes de synthèse par compensation des pôles, celles de Ziegler et Nichols, celles de Åström et Hägglund pour terminer avec les régulateurs à relais et les régulateurs PID auto-ajustables [4], [5].

A ce stade, il est important d'insister sur le fait que les méthodes présentées ci-après ne sont applicables qu'à des processus non oscillants dont le déphasage en hautes fréquences franchit les -180° que l'on trouve surtout dans l'industrie chimique, alimentaire, pétrolière, pharmaceutique, etc.

2 Description des régulateurs PID

Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions :

1. Il fournit un signal de commande $u(t)$ en tenant compte de l'évolution du signal de sortie $y(t)$ par rapport à la consigne $w(t)$.
2. Il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
3. Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

2.1 Le régulateur PID

Le régulateur PID classique relie directement le signal de commande $u(t)$ au signal d'écart $e(t)$. Sa description temporelle est la suivante :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

avec l'écart défini comme suit :

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (2)$$

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$G_c(s) \equiv \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (3)$$

Cette combinaison des terme P, I et D est aussi désignée sous le nom de forme parallèle ou non-interactive. Le schéma fonctionnel d'un processus réglé à l'aide d'un tel régulateur est donné à la figure 1. En plus des signaux définis plus haut, on y trouve la perturbation $v(t)$, le bruit de mesure $n(t)$ et le signal de sortie non bruité $x(t)$.

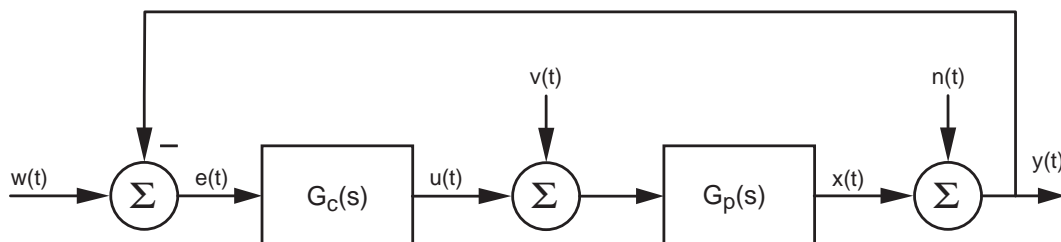


FIG. 1: Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique

2.2 Le régulateur PID modifié

Les modifications que l'on souhaite apporter au régulateur PID sont de 2 types :

1. Afin de diminuer l'importance des dépassements tout en conservant un faible temps de réglage, on réduit l'effet de la consigne sur le terme proportionnel. L'écart est alors défini par :

$$e_p(t) = b \cdot w(t) - y(t) \quad (4)$$

Suivant le dépassement souhaité, le paramètre b de pondération est choisi entre 0 et 1.

2. Afin d'éviter de fortes amplitudes du signal de commande lors de brusques variations de la consigne, on diminue ou annule l'effet de la consigne sur le terme dérivé :

$$e_d(t) = c \cdot w(t) - y(t) \quad (5)$$

Généralement, le paramètre c est choisi nul.

La description temporelle du régulateur PID modifié est alors la suivante :

$$u(t) = K_p \left(e_p(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de_d(t)}{dt} \right) \quad (6)$$

Tenant compte des définitions des 3 écarts, le signal de commande $u(t)$ s'écrit :

$$u(t) = K_p \left(b \cdot w(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t w(t) dt + c \cdot T_d \frac{dw(t)}{dt} \right) - K_p \left(y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t y(t) dt + T_d \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

dont la transformée de Laplace vaut :

$$U(s) = K_p \left(b + \frac{1}{sT_i} + c \cdot sT_d \right) W(s) - K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) Y(s) \quad (7)$$

Le régulateur PID ainsi modifié fait apparaître deux fonctions de transfert associées à la consigne pour l'une, et au signal réglé pour l'autre :

$$G_{ff}(s) \equiv \frac{U(s)}{W(s)} \Big|_{Y(s)=0} = K_p \left(b + \frac{1}{sT_i} + c \cdot sT_d \right) \quad (8)$$

$$G_c(s) \equiv \frac{U(s)}{Y(s)} \Big|_{W(s)=0} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (9)$$

Le schéma fonctionnel d'un processus réglé à l'aide de ce régulateur est donné à la figure 2. On dit que ce régulateur possède deux degrés de libertés.

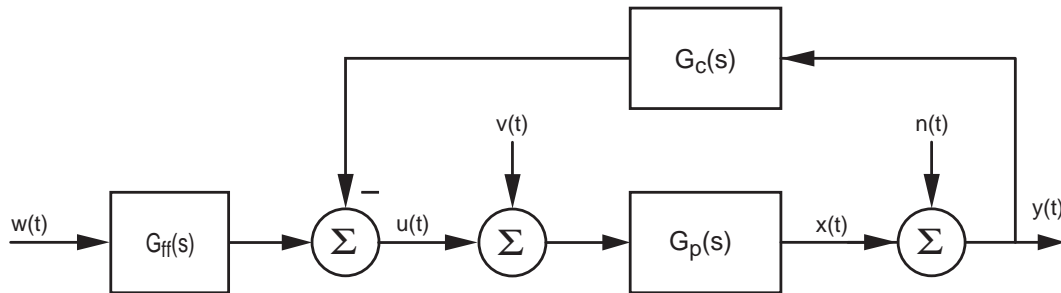


FIG. 2: Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID modifié

D'un point de vue pratique, deux autres modifications sont fréquemment apportées au régulateur PID.

1. Afin de diminuer l'influence du bruit hautes-fréquences, on limite le gain HF du dérivateur en remplaçant le terme sT_d par la fonction de transfert suivante :

$$G_d(s) = \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} \quad (10)$$

Généralement, on choisit N entre 5 et 20.

2. En présence du terme intégral et dans le cas où l'écart tarde à s'annuler, la composante intégrale peut croître sans cesse et entraîner la saturation du convertisseur A-N ou de l'actuateur commandant le processus. Puis, lors du changement de signe de l'écart, il faudra attendre que la composante intégrale décroisse suffisamment pour ne plus saturer les éléments qui se trouvent en aval. Pour éviter ce temps perdu, on introduit une limitation sur la valeur maximum que peut atteindre le terme intégral. On notera qu'avec cette modification, le régulateur ne peut plus être considéré comme linéaire.

2.3 Équivalent numérique du régulateur PID

Il est bien clair qu'un régulateur tel que celui décrit ci-dessus sera réalisé sous forme numérique. Dans la mesure où la période d'échantillonnage T_e est suffisamment petite, on peut se contenter de remplacer l'équation différentielle du régulateur PID par une équation aux différences prenant en compte les équivalents numériques des écarts aux instants d'échantillonnage n :

$$e[n] = w[n] - y[n] \quad (11)$$

$$e_p[n] = b \cdot w[n] - y[n] \quad (12)$$

$$e_d[n] = c \cdot w[n] - y[n] \quad (13)$$

2.3.1 Terme intégral

L'intégrale du terme I est remplacée par la somme des écarts et la différentielle dt , par la période d'échantillonnage T_e . On a donc :

$$u_i[n] = \frac{T_e}{T_i} \sum_{k=0}^n e[k] = u_i[n-1] + \frac{T_e}{T_i} e[n] \quad (14)$$

Afin d'éviter que l'intégrateur accumule l'écart au-delà de valeurs pouvant conduire à des saturations, il est judicieux de limiter le terme $u_i[n]$ entre $U_{i,min}$ et $U_{i,max}$ définis au préalable.

2.3.2 Terme dérivé

Pour trouver l'équivalent numérique du terme dérivé, il faut partir de l'équation différentielle représentant la fonction de transfert $G_d(s)$:

$$G_d(s) \equiv \frac{U_d(s)}{E_d(s)} = \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}$$

Effectuant les produits croisés, on obtient :

$$U_d(s) \cdot \left(1 + \frac{sT_d}{N}\right) = E_d(s) \cdot sT_d$$

A cette expression correspond l'équation différentielle suivante :

$$u_d(t) = T_d \frac{de_d(t)}{dt} - \frac{T_d}{N} \frac{du_d(t)}{dt}$$

dont l'équivalent numérique est :

$$u_d[n] = T_d \frac{e_d[n] - e_d[n-1]}{T_e} - \frac{T_d}{N} \frac{u_d[n] - u_d[n-1]}{T_e}$$

En regroupant les termes, il vient :

$$u_d[n] \left(1 + \frac{T_d}{NT_e} \right) = \frac{T_d}{T_e} (e_d[n] - e_d[n-1]) + \frac{T_d}{NT_e} u_d[n-1]$$

On en déduit alors l'expression permettant de calculer le terme dérivé :

$$u_d[n] = \frac{NT_d}{T_d + NT_e} (e_d[n] - e_d[n-1]) + \frac{T_d}{T_d + NT_e} u_d[n-1] \quad (15)$$

2.3.3 Signal de commande

Le signal de commande est la somme des 3 composantes multipliée par K_p :

$$u[n] = K_p (e_p[n] + u_i[n] + u_d[n]) \quad (16)$$

2.3.4 Algorithme numérique

Une fois les variables et paramètres initialisés, le régulateur devra, à chaque instant d'échantillonnage, lire le signal réglé y à l'aide du convertisseur A-N, obtenir la consigne w qui est généralement fournie par le programme de supervision et effectuer les opérations suivantes :

$$e = w - y$$

$$e_p = b \cdot w - y$$

$$e_d = c \cdot w - y$$

$$u_i = u_{i1} + \frac{T_e}{T_i} e \quad \text{avec} \quad U_{i,min} \leq u_i \leq U_{i,max}$$

$$u_d = \frac{NT_d}{T_d + NT_e} (e_d - e_{d1}) + \frac{T_d}{T_d + NT_e} u_{d1}$$

Puis, tenant compte des grandeurs ainsi obtenues, il fournira le signal de commande u au convertisseur N-A :

$$u = K_p (e_p + u_i + u_d)$$

et mettra à jour la pile des valeurs précédentes :

$$e_{d1} = e_d \quad u_{i1} = u_i \quad u_{d1} = u_d$$

3 Réponses d'un processus apériodique

3.1 Réponse indicielle

La réponse indicielle d'un processus apériodique est illustrée par la figure 3. On y a mis en évidence les instants t_1, t_2, t_3 . Ces instants nous permettent de définir les grandeurs suivantes :

– le retard apparent :

$$L = t_1 \quad (17)$$

– la constante de temps apparente :

$$T = t_2 - t_1 \quad (18)$$

– la pente de la tangente au point d'inflexion :

$$p = \frac{y(\infty)}{t_3 - t_1} = \frac{a}{L} \quad (19)$$

– le temps mort relatif :

$$\tau = \frac{L}{L + T} = \frac{t_1}{t_2} \quad (20)$$

Le rapport entre la valeur asymptotique $y(\infty)$ et l'amplitude E du saut appliqué en entrée détermine le gain statique K_0 du processus :

$$K_0 = \frac{y(\infty)}{E} \quad (21)$$

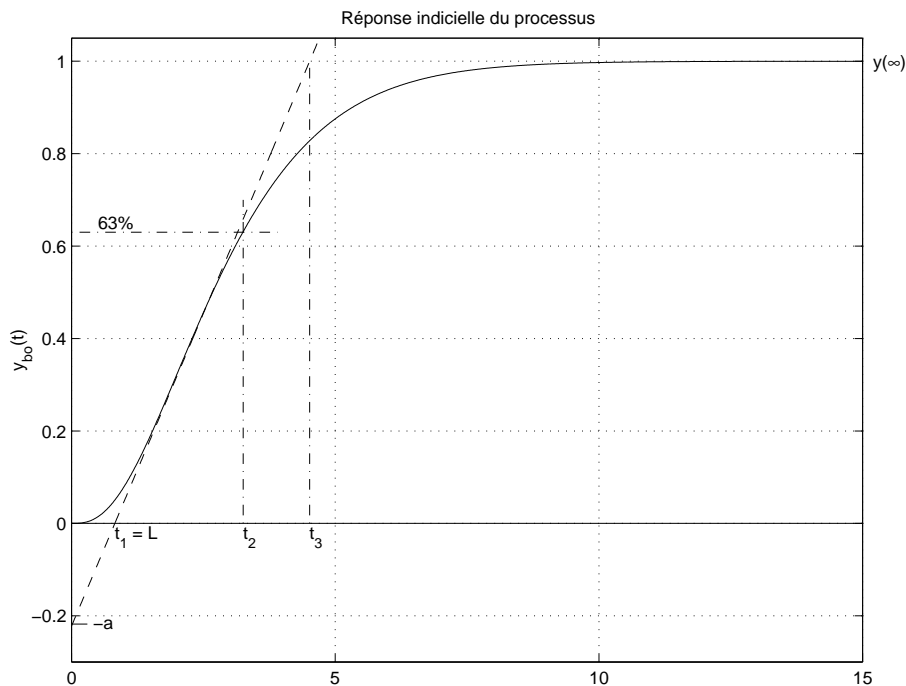


FIG. 3: Réponse indicielle d'un processus d'ordre 3

3.2 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle d'un processus apériodique est illustrée par la figure 4. Sur cette réponse, on définit les grandeurs suivantes :

- la pulsation ω_π pour laquelle la phase vaut -180°
- le gain G_π correspondant à cette pulsation
- le gain critique K_{cr} qu'il faut introduire dans le système bouclé pour le rendre instable

$$K_{cr} = \frac{1}{G_\pi} \quad (22)$$

- le gain relatif

$$\kappa = \frac{G_\pi}{G(0)} = \frac{1}{K_{cr}K_0} \quad (23)$$

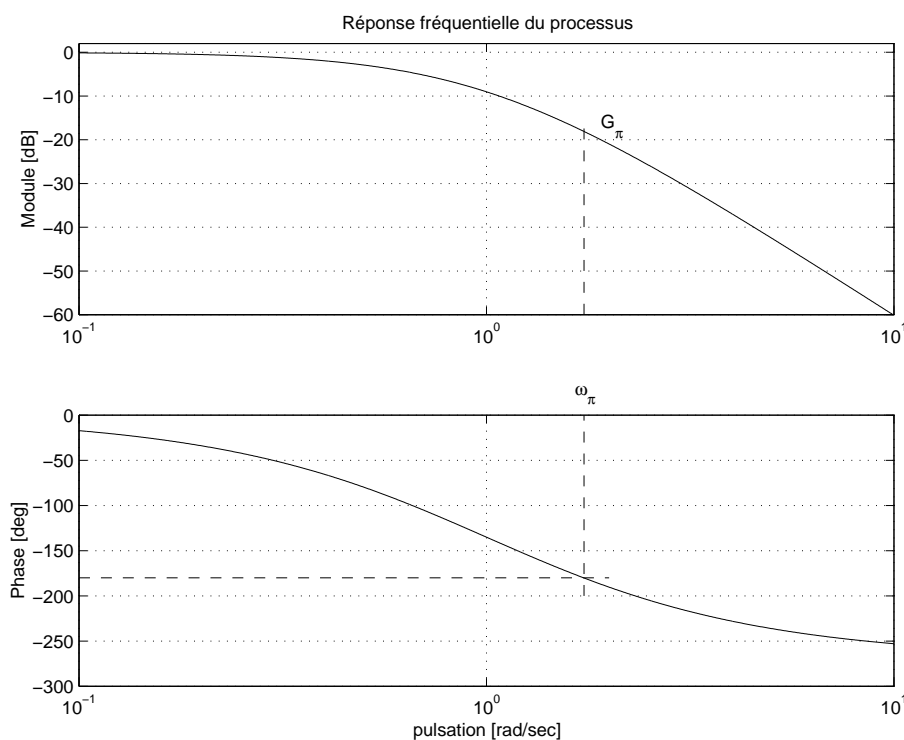


FIG. 4: Réponse fréquentielle d'un processus d'ordre 3

3.3 Caractéristiques d'un processus d'ordre 3

Pour illustrer l'application des méthodes de synthèse des régulateurs, on utilisera pour la suite un processus d'ordre 3 de gain 2 dont les constantes de temps sont toutes trois égales à 1 seconde :

$$G_p(s) = \frac{2}{(1+s)^3}$$

Sur les réponses indicielle et fréquentielle, on mesure :

- le retard apparent :

$$L = t_1 = 0.81 \text{ [sec]}$$

- la constante de temps apparente :

$$T = t_2 - t_1 = 2.44 \text{ [sec]}$$

– la pente de la tangente au point d'inflexion :

$$p = \frac{y(\infty)}{t_3 - t_1} = 0.27 \text{ [V/sec]}$$

– l'ordonnée de la tangente en $t = 0$:

$$a = 0.22 \text{ [V]}$$

– le temps mort relatif :

$$\tau = \frac{L}{L + T} = \frac{t_1}{t_2} = 0.249 \text{ [/]}$$

– le gain statique du processus :

$$K_0 = G(0) = \frac{y(\infty)}{E} = 2 \text{ [/]}$$

– la pulsation critique :

$$\omega_{cr} = \omega_{\pi} = 1.73 \text{ [rad/sec]}$$

– le gain critique :

$$K_{cr} = \frac{1}{G_{\pi}} = 18.1 \text{ [dB]} = 8.03 \text{ [/]}$$

– le gain relatif :

$$\kappa = \frac{G_{\pi}}{G(0)} = \frac{1}{K_{cr}K_0} = 0.0625 \text{ [/]}$$

On notera que le produit pL est égal à l'ordonnée a de la tangente en $t = 0$.

4 Synthèse par compensation des pôles

Une méthode de synthèse fréquemment utilisée consiste à compenser les pôles les plus lents du processus par les zéros du régulateur puis à rechercher le gain de manière à avoir une réponse optimale du point de vue de la consigne.

Ainsi, dans le cas d'un système d'ordre 3 tel que $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$

$$G_p(s) = K_0 \frac{1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_3)}$$

on compensera le produit

$$(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2$$

par le numérateur du régulateur PID

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2T_iT_d}{sT_i}$$

La compensation des deux constantes de temps les plus lentes τ_1 et τ_2 conduit à choisir

$$T_i = \tau_1 + \tau_2 \quad T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

Ainsi, dans le cas d'un système d'ordre 3, la compensation de deux pôles par les zéros du régulateur PID conduit à un système global d'ordre 2 avec intégration

$$G_{bo}(s) = K_{bo} \frac{1}{sT_i(1 + s\tau_3)} \quad \text{avec} \quad K_{bo} \equiv K_pK_0$$

On obtient alors en boucle fermée un système d'ordre 2

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} = \frac{1}{1 + s \frac{T_i}{K_{bo}} + s^2 \frac{T_i T_3}{K_{bo}}}$$

dont on peut fixer l'amortissement ζ souhaité en identifiant le dénominateur de $G_{bf}(s)$ avec la forme canonique

$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2$$

On montre alors aisément que le gain K_p dépend du facteur d'amortissement ζ souhaité, des trois constantes de temps du processus, du gain statique K_0 et qu'il vaut :

$$K_p = \frac{1}{K_0} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} \frac{1}{4\zeta^2}$$

En choisissant $\zeta = 0.6$, le dépassement de la réponse indicielle sera d'environ 10%. Tenant compte du fait que les trois constantes de temps choisies sont égales à 1 seconde, on obtient :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{K_0} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} \frac{1}{4\zeta^2} = 0.695 [/] \\ T_i &= \tau_1 + \tau_2 = 2.0 [\text{sec}] \\ T_d &= \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 0.5 [\text{sec}] \end{aligned}$$

La réponse indicielle du système asservi avec ce régulateur modifié dans lequel $b = 1$, $c = 0$ et $N = 10$ est illustrée à la figure 5. On y remarque que la réponse au saut de consigne est satisfaisante. Par contre, l'effet de la perturbation appliquée 15 secondes après le saut de consigne est long à corriger et son amplitude est importante.

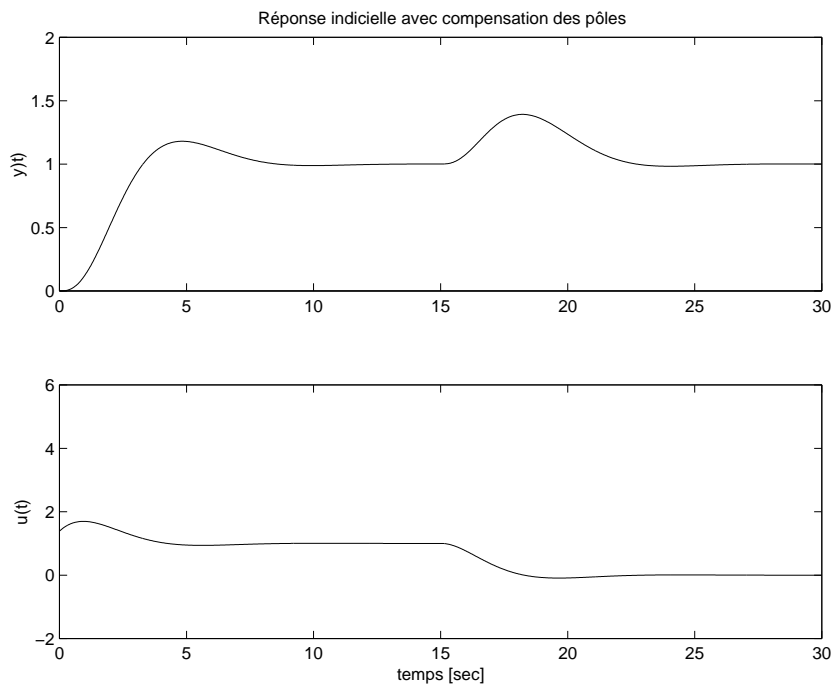


FIG. 5: Réponse indicielle du système asservi après compensation des pôles

5 Méthodes de Ziegler et Nichols (ZN)

En 1942, Ziegler et Nichols [1] ont proposé deux approches heuristiques basées sur leur expérience et quelques simulations pour ajuster rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première méthode nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle en boucle ouverte, alors que la deuxième demande d'amener le système bouclé à sa limite de stabilité.

5.1 Méthode de la réponse indicielle

Pour obtenir les paramètres du régulateur PID, il suffit d'enregistrer la réponse indicielle du processus seul (c'est-à-dire sans le régulateur), puis de tracer la tangente au point d'inflexion de la courbe. On mesure ensuite sa pente p , le retard apparent L correspondant au point d'intersection de la tangente avec l'abscisse et le gain $K_0 = y_\infty/E$ (figure 3). On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau 1.

Généralement, les gains K_p proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut donc pas craindre de réduire K_p d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante.

Type	K_p	T_i	T_d
P	$1/(pLK_0) = 1/(aK_0)$		
PI	$0.9/(pLK_0) = 0.9/(aK_0)$	$3L$	
PID	$1.2/(pLK_0) = 1.2/(aK_0)$	$2L$	$0.5L$

TAB. 1: Paramètres PID obtenus à partir d'une réponse indicielle (ZN_t)

5.2 Méthode du point critique

Cette méthode est basée sur la connaissance du point critique du processus. Expérimentalement, on boucle le processus sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente ; on se trouve ainsi à la limite de stabilité. Après avoir relevé le gain critique K_{cr} du régulateur et la période d'oscillation T_{cr} de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau 2. Ici également, les valeurs proposées conduisent à un temps de montée relativement court malheureusement assorti d'un dépassement élevé. Cette situation n'étant pas toujours satisfaisante, on peut être amené à corriger les coefficients proposés et, en particulier, à diminuer le gain K_p .

On notera que les paramètres T_i et T_d proposés par les deux méthodes de Ziegler-Nichols sont dans un rapport constant égal à 4. Le régulateur possède donc deux zéros confondus valant $-1/(2T_d) = -2/T_i$.

Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.4K_{cr}$	$0.8T_{cr}$	
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5T_{cr}$	$0.125T_{cr}$

TAB. 2: Paramètres PID obtenus à partir du point critique (ZN_f)

5.3 Exemple

5.3.1 Méthode de la réponse indicielle

Sur la réponse indicielle du processus $G_p(s)$ (figure 3), on a mesuré :

– la pente au point d’inflexion :

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{t_3 - t_1} = 0.27 [1/\text{sec}]$$

– le retard apparent :

$$L = t_1 = 0.81 [\text{sec}]$$

– le gain du processus :

$$K_0 = \frac{y_\infty}{E} = 2 [/]$$

Du premier tableau de Ziegler-Nichols, on tire les 3 paramètres du régulateur PID :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1.2}{p \cdot L \cdot K_0} = 2.75 [/] \\ T_i &= 2 \cdot L = 1.61 [\text{sec}] \\ T_d &= 0.5 \cdot L = 0.40 [\text{sec}] \end{aligned}$$

La réponse indicielle du système asservi avec un régulateur modifié dans lequel $b = 1$, $c = 0$ et $N = 10$ est illustrée à la figure 6 par la courbe continue.

5.3.2 Méthode du point critique

Sur la réponse fréquentielle du processus $G_p(s)$ (figure 4), on a mesuré :

– le gain critique :

$$K_{cr} = \frac{1}{G_\pi} = 4.015 [/]$$

– la période critique :

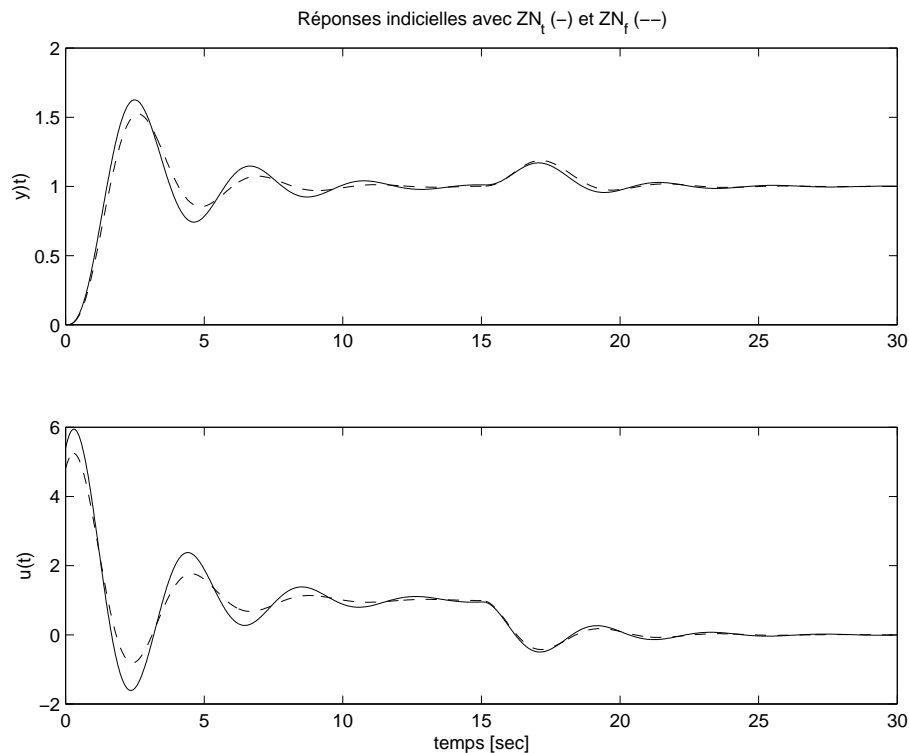
$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 3.62 [\text{sec}]$$

Du deuxième tableau de Ziegler-Nichols, on tire les 3 paramètres du régulateur PID :

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6 \cdot K_{cr} = 2.41 [/] \\ T_i &= 0.5 \cdot T_{cr} = 1.81 [\text{sec}] \\ T_d &= 0.125 \cdot T_{cr} = 0.45 [\text{sec}] \end{aligned}$$

La réponse indicielle du système asservi avec ce régulateur dans lequel $b = 1$, $c = 0$ et $N = 10$ est illustrée à la figure 6 par la courbe traitillée.

Dans les deux approches, la réponse indicielle est caractérisée par un dépassement important ; par contre, la perturbation est corrigée rapidement.

FIG. 6: Réponses indicielles d'un système d'ordre 3 asservi (ZN_t, ZN_f)

6 Méthodes de Åström et Hägglund (AH)

Au début des années 1990, Åström et ses collaborateurs ont testé une nouvelle approche afin de palier les inconvénients de la méthode de Ziegler et Nichols.

Ils ont pour cela analysé et simulé le comportement d'un grand nombre de systèmes à comportement non-oscillant en recherchant à les caractériser de manière simple.

Pour des **processus sans intégration**, ils ont constaté que leur comportement dynamique pouvait être caractérisé à l'aide du temps mort relatif τ ou du gain relatif κ définis par les équations (20) et (23).

Pour des **processus avec intégration**, ces 2 caractéristiques ne suffisent pas pour déterminer les paramètres d'un régulateur PID. Une information supplémentaire est nécessaire.

Dans ce qui suit, on ne présentera que les résultats concernant des systèmes sans intégration. Pour les processus contenant une intégration, plus de détails et informations peuvent être trouvés dans l'ouvrage de Åström et Hägglund [3].

6.1 Critère M_s pour l'ajustage des paramètres

De manière à pouvoir mesurer la qualité des réponses temporelles et les comparer sur la base d'un critère objectif, Åström a défini un critère d'ajustage des paramètres du régulateur. Ce critère consiste à observer la fonction de sensibilité du processus réglé et à la limiter à un maximum valant 1.4 (+3dB) ou 2 (+6dB).

Le maximum M_s de la fonction de sensibilité est défini comme suit :

$$M_s = \max_{0 < \omega < \infty} \left| \frac{1}{1 + G_p(j\omega)G_c(j\omega)} \right| \quad (24)$$

où $G_p(j\omega)$ est la réponse fréquentielle du processus et $G_c(j\omega)$ celle du régulateur.

Dans le diagramme de Nyquist, ce maximum M_s possède une interprétation intéressante. En effet, son inverse $1/M_s$ est la plus courte distance entre la courbe de Nyquist de $G_p(j\omega)G_c(j\omega)$ et le point critique -1. Cette distance peut être prise comme une mesure de la robustesse car elle nous indique de combien le processus peut changer sans causer d'instabilité. Les valeurs typiques de M_s sont comprises entre 1.2 et 2 et le système asservi sera d'autant moins sensible aux variations de paramètres ou au bruit que M_s est petit.

6.2 Méthode de la réponse indicielle

L'approche de AH est similaire à celle de ZN si ce n'est qu'on y utilise un paramètre supplémentaire : la constante de temps apparente T . Celle-ci correspond au temps nécessaire pour que la réponse indicielle atteigne le 63% de sa valeur asymptotique moins le temps mort apparent L (figure 3).

Comme pour la méthode de Ziegler-Nichols, on définit 2 paramètres qui serviront au calcul des termes P, I et D :

1. le gain normalisé

$$K_n = K_0 \frac{L}{T} \quad (25)$$

2. le temps mort relatif

$$\tau = \frac{L}{L + T} \quad (26)$$

Contrairement à Ziegler et Nichols qui proposaient simplement 3 coefficients pour déterminer les termes du régulateur PID, les multiples essais conduits par Åström l'ont amené à relier les paramètres du régulateur au temps mort relatif τ au travers de fonctions ayant la forme

$$f(\tau) = a_0 \cdot \exp(a_1\tau + a_2\tau^2) \quad (27)$$

Les paramètres a_0, a_1, a_2 servant au calcul des termes K_p, T_i, T_d ont été obtenus par ajustage de courbes au sens des moindres carrés. Un exemple de ces mesures et ajustages est illustré par la figure 7. Åström a alors pu construire les tableaux de paramètres pour les régulateurs PI et PID (TAB. 3).

On remarquera que les valeurs de T_i et T_d peuvent être calculées à partir de L ou de T . La valeur de cette dernière étant généralement plus précise que la précédente, on travaillera de préférence avec elle.

6.3 Méthode du point critique

L'approche de Åström-Hägglund est également similaire à celle de Ziegler-Nichols si ce n'est qu'ils utilisent un paramètre supplémentaire : le gain statique K_0 du processus. Comme pour la méthode de ZN, deux paramètres serviront pour le calcul des termes P, I et D :

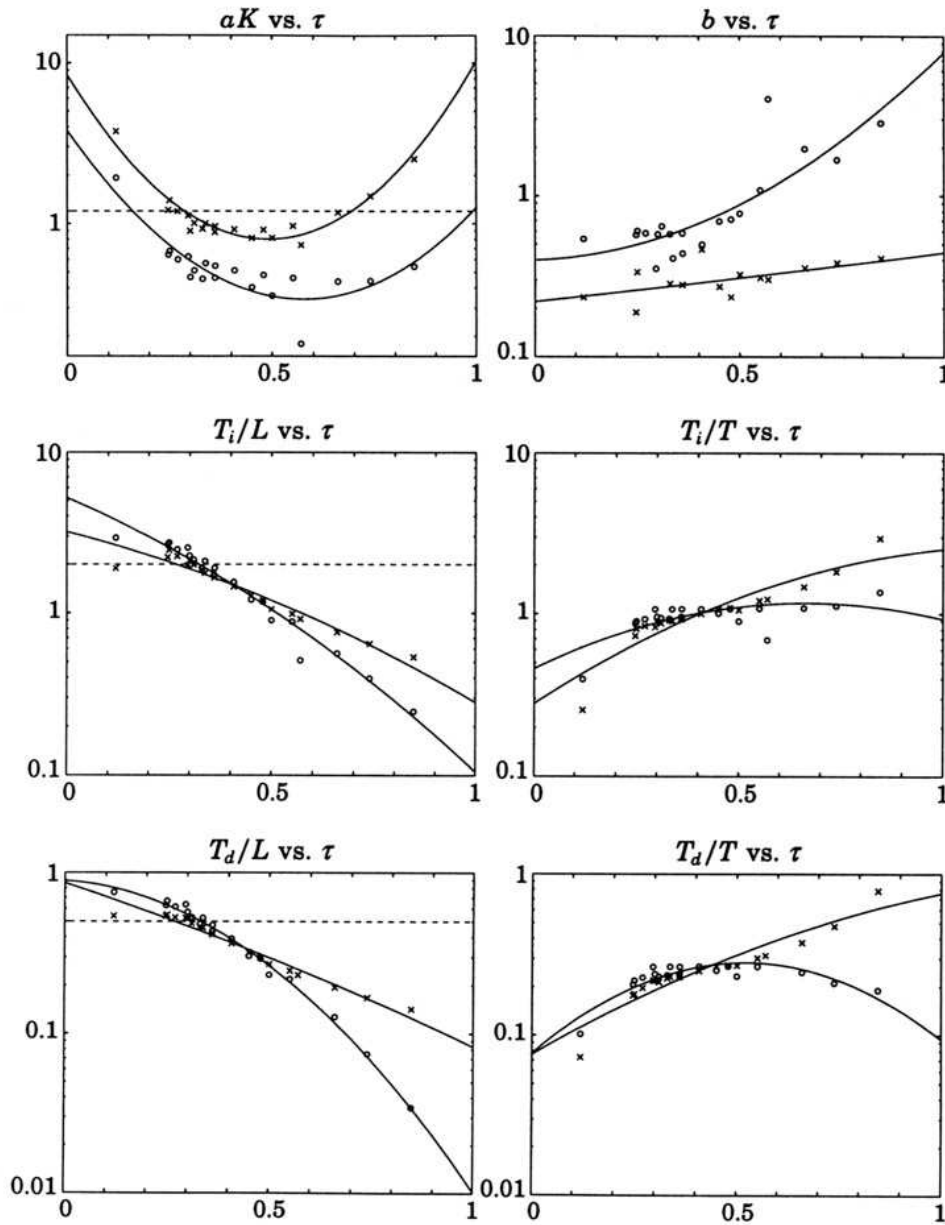


FIG. 7: Diagrammes d'ajustage des paramètres PID par la méthode de la réponse indicielle [3]. Les tests ont été faits sur de nombreux processus en recherchant des régulateurs à pôles dominants pour lesquels $M_s = 1.4$, marqués \circ , ou $M_s = 2.0$, marqués \times . Chaque ensemble de points expérimentaux est ensuite ramené à une fonction du type $f(\tau) = a_0 \cdot \exp(a_1\tau + a_2\tau^2)$ ajustée au sens des moindres carrés. Les lignes traitillées correspondent aux règles de Ziegler-Nichols.

PI	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
$K_n K_p$	0.29	-2.7	3.7	0.78	-4.1	5.7
T_i/L	8.9	-6.6	3.0	8.9	-6.6	3.0
T_i/T	0.79	-1.4	2.4	0.79	-1.4	2.4
b	0.81	0.73	1.9	0.44	0.78	-0.45
PID	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
$K_n K_p$	3.8	-8.47	7.3	8.4	-9.6	9.8
T_i/L	5.2	-2.5	-1.4	3.2	-1.5	-0.93
T_i/T	0.46	2.8	-2.1	0.28	3.8	-1.6
T_d/L	0.89	-0.37	-4.1	0.86	-1.9	-0.44
T_d/T	0.077	5.0	-4.8	0.076	3.4	-1.1
b	0.40	0.18	2.8	0.22	0.65	0.051

TAB. 3: Paramètres des régulateurs PI et PID obtenus à partir d'une réponse indicielle

1. le gain relatif

$$\kappa = \frac{G_\pi}{G(0)} = \frac{1}{K_{cr} \cdot K_0} \quad (28)$$

2. la période d'oscillation critique

$$T_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} \quad (29)$$

De la même manière que pour la méthode temporelle, Åström relie les paramètres du régulateur au gain relatif κ au travers de fonctions ayant la forme

$$f(\kappa) = a_0 \cdot \exp(a_1 \kappa + a_2 \kappa^2) \quad (30)$$

Les paramètres a_0, a_1, a_2 servant au calcul des termes K_p, T_i, T_d ont été obtenus par ajustage de courbes au sens des moindres carrés. Åström a alors pu construire les tableaux de paramètres pour les régulateurs PI et PID (TAB. 4).

PI	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
K_p/K_{cr}	0.053	2.9	-2.6	0.13	1.9	-1.3
T_i/T_{cr}	0.90	-4.4	2.7	0.90	-4.4	2.7
b	1.1	-0.0061	1.8	0.48	0.40	-0.17
PID	$M_s = 1.4$			$M_s = 2.0$		
	a_0	a_1	a_2	a_0	a_1	a_2
K_p/K_{cr}	0.33	-0.31	-1.0	0.72	-1.6	1.2
T_i/T_{cr}	0.76	-1.6	-0.36	0.59	-1.3	0.38
T_d/T_{cr}	0.17	-0.46	-2.1	0.15	-1.4	0.56
b	0.58	-1.3	3.5	0.25	0.56	-0.12

TAB. 4: Paramètres des régulateurs PI et PID obtenus à partir du point critique

6.4 Exemple

6.4.1 Méthode de la réponse indicielle

Considérant la réponse indicielle du processus à 3 constantes de temps égales, on trouve $K_0 = 2$, $L = t_1 = 0.81$ [sec], $T = t_2 - t_1 = 2.44$ [sec]. Choissant $M_s = 2.0$ (section 6.1), le calcul des paramètres du régulateur PID se fait alors comme suit :

K_n	$K_0 L / T$	$2 \cdot 0.81 / 2.44$	0.66 [/]
τ	$L / (L + T)$	$0.81 / (0.81 + 2.44)$	0.25 [/]
K_p	$a_0 \cdot \exp(a_1 \tau + a_2 \tau^2) / K_n$	$8.4 \cdot \exp(-9.6 \cdot 0.25 + 9.8 \cdot 0.25^2) / 0.66$	4.28 [/]
T_i	$a_0 \cdot \exp(a_1 \tau + a_2 \tau^2) \cdot T$	$0.28 \cdot \exp(3.8 \cdot 0.25 - 1.6 \cdot 0.25^2) \cdot 2.44$	1.59 [sec]
T_d	$a_0 \cdot \exp(a_1 \tau + a_2 \tau^2) \cdot T$	$0.076 \cdot \exp(3.4 \cdot 0.25 - 1.1 \cdot 0.25^2) \cdot 2.44$	0.40 [sec]
b	$a_0 \cdot \exp(a_1 \tau + a_2 \tau^2)$	$0.22 \cdot \exp(0.65 \cdot 0.25 + 0.051 \cdot 0.25^2)$	0.26 [/]

La réponse indicielle du système asservi avec ce régulateur dans lequel $c = 0$ et $N = 10$ est illustrée en trait continu dans la figure 8.

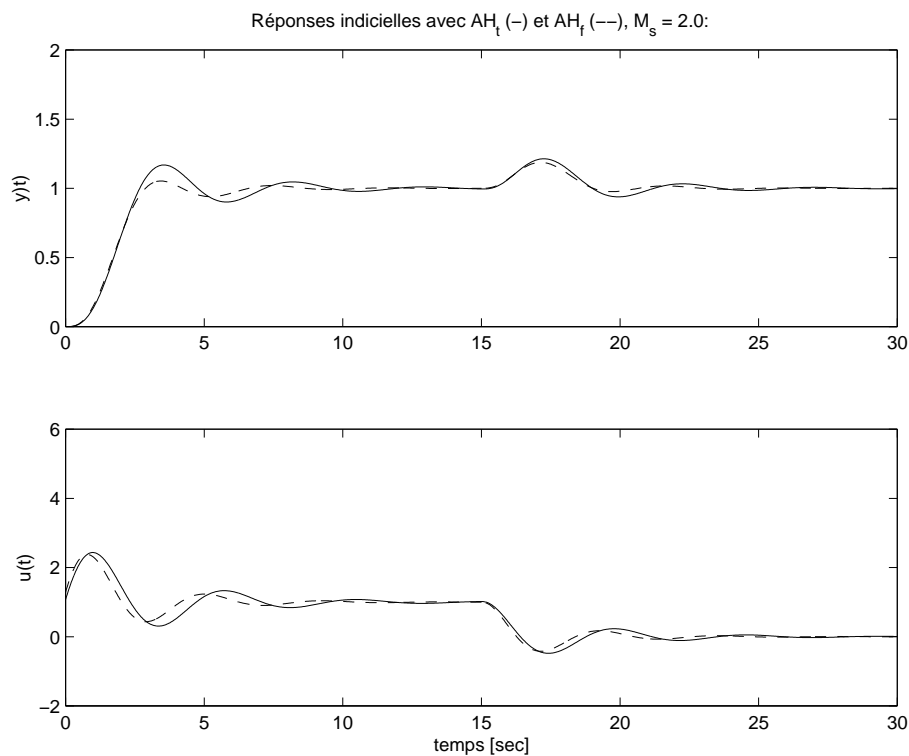


FIG. 8: Réponse indicielle d'un système d'ordre 3 asservi (AH_t , AH_f)

6.4.2 Méthode du point critique

Considérant la réponse fréquentielle du processus à 3 constantes de temps égales, on a trouvé $K_{cr} = 4.015$ [/], $T_{cr} = 2\pi / \omega_{\pi} = 3.62$ [sec]. Choissant $M_s = 2.0$ (section 6.1), le calcul des paramètres du régulateur PID se fait alors comme suit :

κ	$1/(K_{cr}K_0)$	$1/(8.03 \cdot 2)$	0.0625 [/]
K_p	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot K_{cr}$	$0.72 \cdot \exp(-1.6 \cdot 0.125 + 1.2 \cdot 0.125^2) \cdot 4.015$	2.4 [/]
T_i	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot T_{cr}$	$0.59 \cdot \exp(-1.3 \cdot 0.125 + 0.38 \cdot 0.125^2) \cdot 3.62$	1.83 [sec]
T_d	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot T_{cr}$	$0.15 \cdot \exp(-1.4 \cdot 0.125 + 0.56 \cdot 0.125^2) \cdot 3.62$	0.46 [sec]
b	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2)$	$0.25 \cdot \exp(0.56 \cdot 0.125 - 0.12 \cdot 0.125^2)$	0.27 [/]

La réponse indicielle du système asservi avec ce régulateur dans lequel $c = 0$ et $N = 10$ est illustrée en traitillé dans la figure 8.

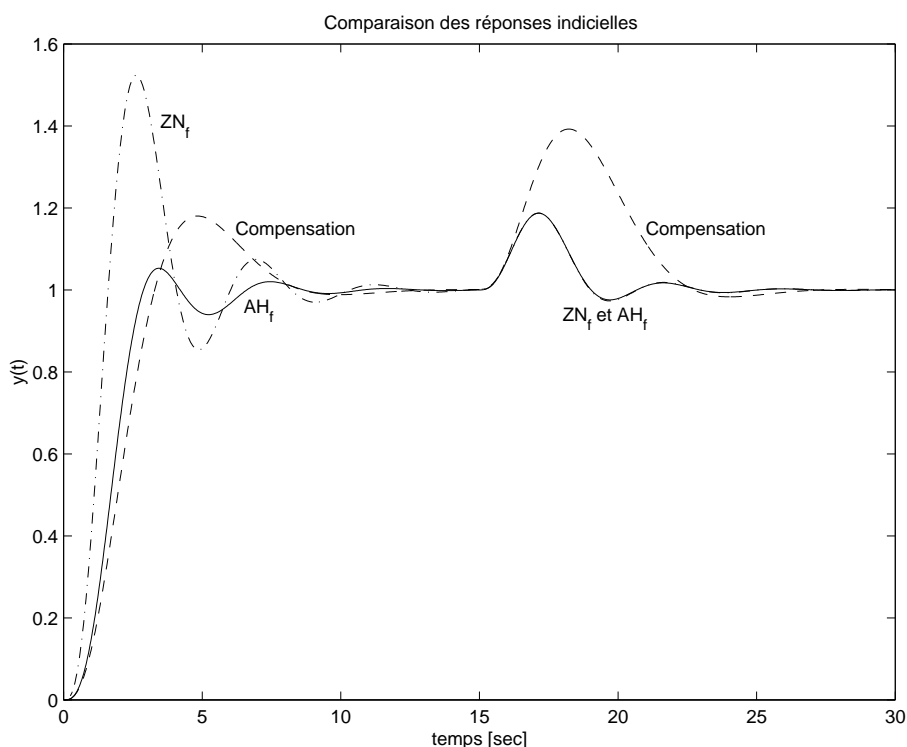


FIG. 9: Comparaison des réponses indicielles

7 Comparaison des réponses indicielles

En conclusion de ces différentes approches, il est intéressant de comparer les réponses indicielles du système asservi (figure 9). Afin de ne pas charger la figure, seules les réponses indicielles obtenues par compensation des pôles et les méthodes du point critique y figurent.

La comparaison des réponses indicielles montre que les méthodes de ZN et AH sont très bonnes en ce qui concerne la correction de la perturbation ; alors que ce n'est pas du tout le cas pour la méthode par compensation des pôles. Enfin, grâce au terme b inférieur à 1, la méthode de AH parvient à réduire le temps de réglage et le dépassement.

Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs trouvées selon les différentes méthodes. Dans tous les cas, l'effet de la consigne sur la dérivée a été annulé en choisissant $c = 0$ et le gain hautes fréquences du terme dérivateur a été limité en prenant $N = 10$.

	<i>Comp.</i>	ZN_t	AH_t	ZN_f	AH_f
K_p	0.70	2.75	2.14	2.41	2.40
T_i	2.0	1.61	1.59	1.81	1.83
T_d	0.5	0.40	0.40	0.45	0.46
b	1.0	1.0	0.26	1.0	0.27

TAB. 5: Comparaison des paramètres des régulateurs

Il est intéressant de relever que, pour le processus d'ordre 3 à constantes de temps égales, les méthodes de ZN et AH conduisent aux mêmes valeurs des paramètres. Ce qui distingue les deux méthodes, c'est la pondération de la consigne avec le paramètre b .

8 Régulateurs à relais

Les régulateurs à relais sont présentés ici de manière succincte et uniquement dans le but de les utiliser pour l'ajustage automatique des paramètres d'un régulateur PID.

En 1984, Åström et Hägglund ont proposé de mesurer automatiquement le point critique en remplaçant le régulateur classique par un régulateur à relais [5]. Cette démarche a le grand avantage de ne pas avoir besoin d'emmener le système à la limite de la stabilité comme le demande la méthode de ZN.

En effet, une telle expérience n'est généralement pas admise en milieu industriel car la maîtrise de l'amplitude des oscillations est délicate et le risque d'une perte de stabilité est trop grand. Afin de contourner ce problème, on préfère créer les oscillations entretenues à l'aide d'un régulateur tout-ou-rien. Par le fait que l'amplitude du signal de commande est limitée, celle de l'oscillation du signal réglé le sera également.

Le schéma fonctionnel d'un processus asservi par un relais est présenté à la figure 10. Un tel système non linéaire conduit à des signaux périodiques non sinusoïdaux. L'analyse peut alors être faite dans l'espace des fréquences en considérant les composantes harmoniques des divers signaux.

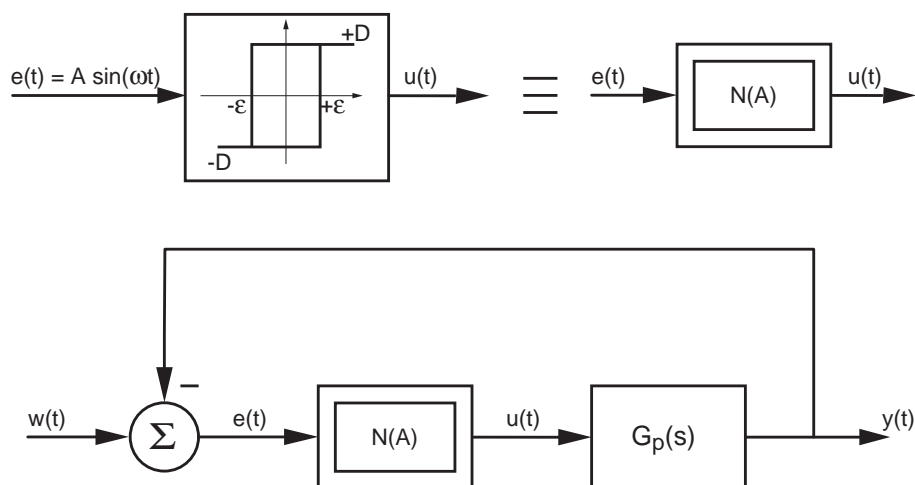


FIG. 10: Schéma fonctionnel d'un asservissement à relais

8.1 Fonctions descriptives

Il est important de noter que la réponse du système non linéaire que représente le relais ne dépend pas de la fréquence du signal d'entrée, mais uniquement de l'amplitude A de ce dernier. La relation entrée-sortie d'un système non linéaire est alors décrite par sa *fonction descriptive* $N(A)$.

8.1.1 Relais sans hystérésis

Appliquons au relais un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal d'amplitude A . La sortie du relais est alors un signal carré $u(t)$ d'amplitude D en phase avec la sinusoïde (figure 11). La

décomposition de ce dernier en série de Fourier montre que les harmoniques pairs sont nuls et que l'amplitude des harmoniques impairs vaut :

$$U_k = \frac{4D}{k\pi} \text{ pour } k \text{ impair} \quad (31)$$

En effectuant le rapport des harmoniques d'ordre 1 des signaux de sortie et d'entrée, on définit la fonction descriptive du relais sans hystérésis :

$$N(A) \equiv \frac{U(j\omega)_{k=1}}{E(j\omega)_{k=1}} = \frac{4D/\pi}{A} = \frac{4D}{\pi A} \quad (32)$$

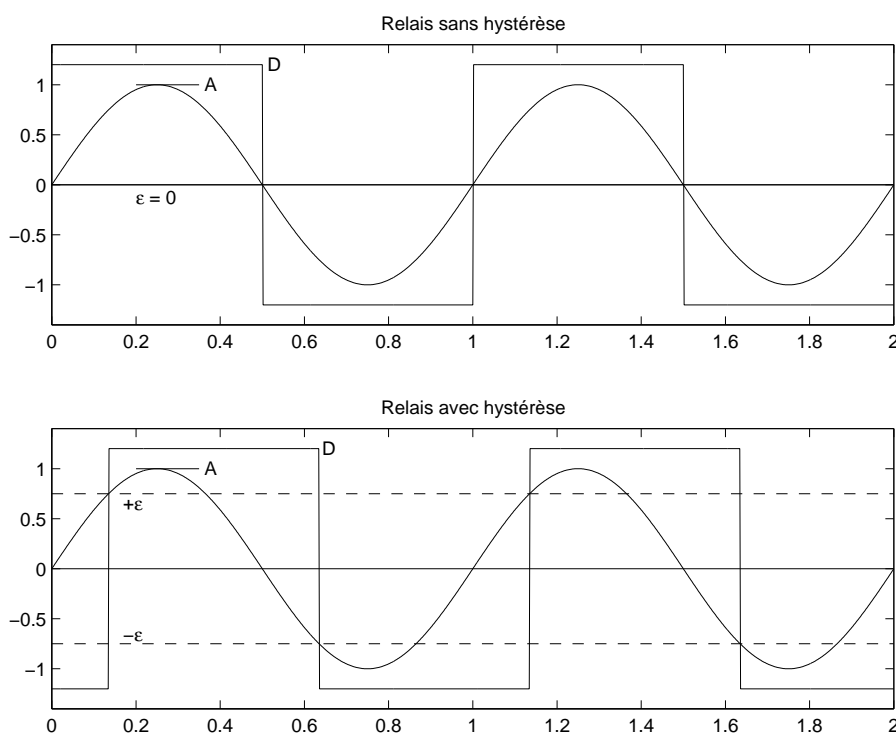


FIG. 11: Réponses d'un relais à une entrée sinusoïdale

8.1.2 Relais avec hystérésis

Appliquons au relais un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal d'amplitude A . La sortie du relais avec hystérésis est comme auparavant un signal carré d'amplitude D mais déphasé d'une valeur dépendant de la largeur de l'hystérésis.

De la figure 11, on déduit aisément que ce déphasage vaut $\varphi = -\text{asin}(\epsilon/A)$. Dans le plan complexe, ce déphasage correspond à un phaseur $e^{j\varphi}$ valant :

$$e^{j\varphi} = \exp\left(-j \cdot \text{asin}\left(\frac{\epsilon}{A}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^2} - j \frac{\epsilon}{A} \quad (33)$$

La fonction descriptive du relais avec hystérésis devient alors une fonction complexe qui s'écrit :

$$N(A) \equiv \frac{U(j\omega)_{k=1}}{E(j\omega)_{k=1}} = \frac{4D}{\pi A} \cdot e^{j\varphi}$$

d'où :

$$N(A) = \frac{4D}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^2} - j\frac{\epsilon}{A} \right) \quad (34)$$

8.2 Régulateurs à relais

Dans ce qui suit, on s'intéresse au comportement du système asservi à l'aide d'un relais seulement. La valeur de la consigne $w(t)$ importe peu ; on l'admettra nulle pour la suite.

Une illustration des signaux obtenus dans la boucle d'un asservissement à relais avec hystérésis est donnée par la figure 12. On y voit bien l'effet de filtrage passe-bas réalisé par le processus : sur le signal de sortie, les harmoniques d'ordre supérieur à 1 sont fortement atténués.

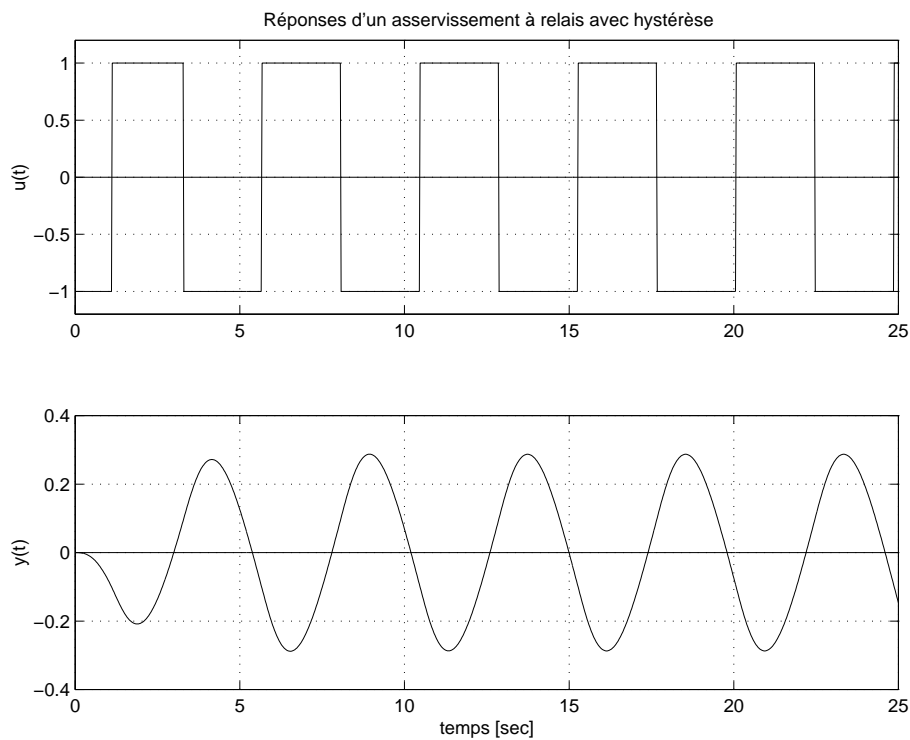


FIG. 12: Réponses temporelles d'un asservissement à relais avec hystérésis

8.2.1 Évaluation du gain critique

Dans l'espace des fréquences, les signaux d'écart $e(t)$, de commande $u(t)$ et de sortie $y(t)$ sont reliés entre eux par les équations suivantes (voir figure 10) :

$$Y(j\omega) = G_p(j\omega)U(j\omega)$$

$$E(j\omega) = W(j\omega) - Y(j\omega) = -Y(j\omega)$$

$$U(j\omega) = N(A) \cdot E(j\omega) = -N(A) \cdot Y(j\omega)$$

La fonction de transfert du système en boucle ouverte vaut alors :

$$G_{bo}(j\omega) \equiv \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = -1 = N(A) \cdot G_p(j\omega) \quad (35)$$

et, dans la mesure où la période d'oscillations est assez proche de la période critique T_{cr} , le module de la fonction descriptive est égal au gain critique :

$$K_{cr} \simeq \frac{4D}{\pi A} \quad (36)$$

8.2.2 Évaluation d'une partie de la réponse fréquentielle

Observant l'équation 35, on voit que la fonction de transfert du processus $G_p(j\omega)$ peut être décrite par l'inverse de la fonction descriptive :

$$G_p(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4D} \exp(+j \operatorname{asin}(\epsilon/A))$$

$$G_p(j\omega) = \frac{\pi A}{4D} \exp\left(+j(-\pi + \operatorname{asin}\left(\frac{\epsilon}{A}\right))\right) \quad (37)$$

Dans cette équation, la pulsation d'oscillation ω n'est pas indépendante ; elle est déterminée par la largeur 2ϵ de l'hystérésis et l'amplitude A du signal de sortie.

On en déduit donc qu'en variant la largeur de l'hystérésis, il est possible de mesurer la réponse fréquentielle du processus dans une partie du troisième quadrant du plan complexe, c'est-à-dire, du point de vue de la phase, entre -90° et -180° .

Une illustration en est donnée par la figure 13 où l'on voit les points obtenus en variant la largeur de l'hystérésis entre 0.0 et 0.8. La courbe continue correspond à la réponse théorique.

9 Régulateurs PID auto-ajustables

L'idée proposée en 1984 par Åström et Hägglund est extrêmement simple [5]. Elle consiste à remplacer momentanément le régulateur PID par un relais de manière à mesurer un point de la réponse fréquentielle du processus à régler (équation 37). Une fois le régime permanent atteint, il reste à calculer les paramètres du régulateur auto-ajustable selon la méthode AH_f et à commuter sur le régulateur PID (figure 14).

Il est intéressant de souligner que cette méthode ne nécessite aucune connaissance préalable de l'installation à régler. Il suffit de lancer l'installation avec le régulateur à relais puis, une fois les paramètres trouvés, de le commuter en réglage automatique. De nombreux régulateurs industriels auto-ajustables sont basés sur ce principe.

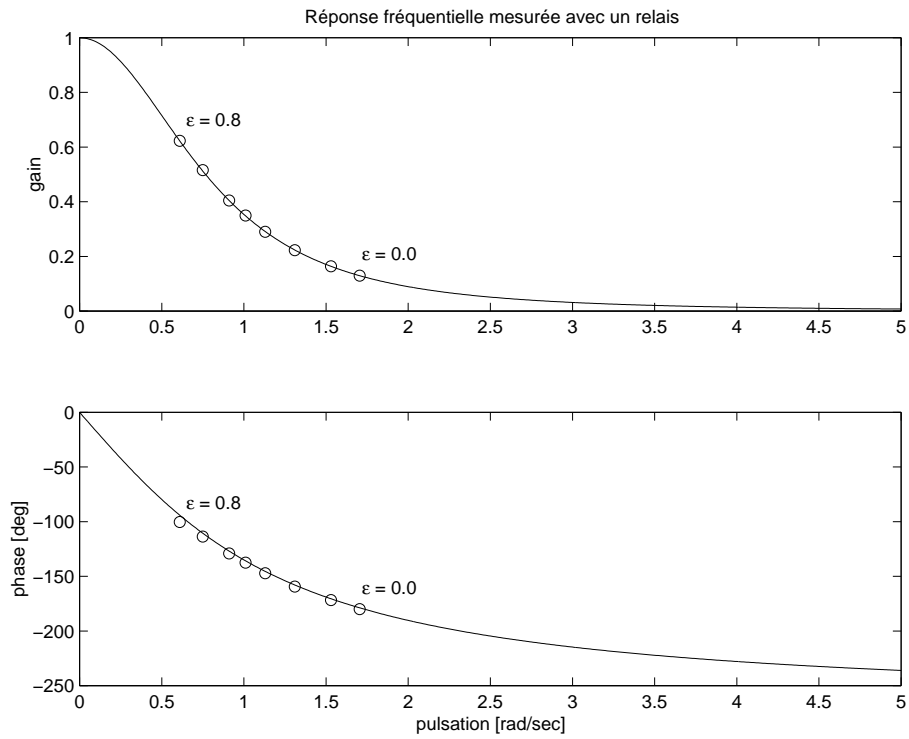


FIG. 13: Réponse fréquentielle d'un système d'ordre 3

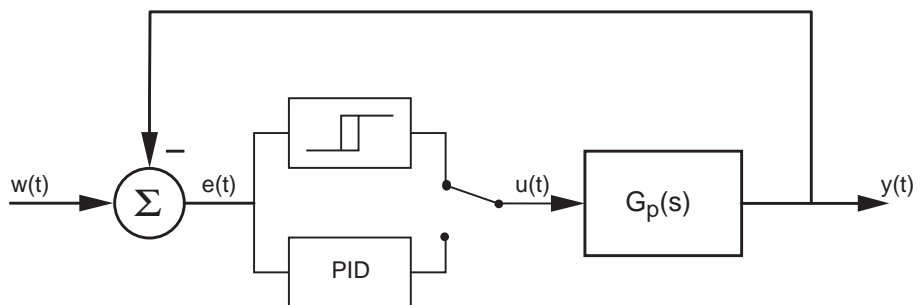


FIG. 14: Schéma fonctionnel d'un régulateur auto-ajustable

9.1 Auto-ajustage en l'absence de bruit

Un exemple des résultats obtenus dans le cas idéal, c'est-à-dire sans bruit et avec un relais sans hystérésis est présenté dans la figure 15. On y voit que le signal de sortie peut être assimilé à une sinusoïde et que son amplitude A peut être mesurée facilement en recherchant son maximum. La demi-période se mesure en considérant le temps écoulé entre 2 transitions du signal de commande.

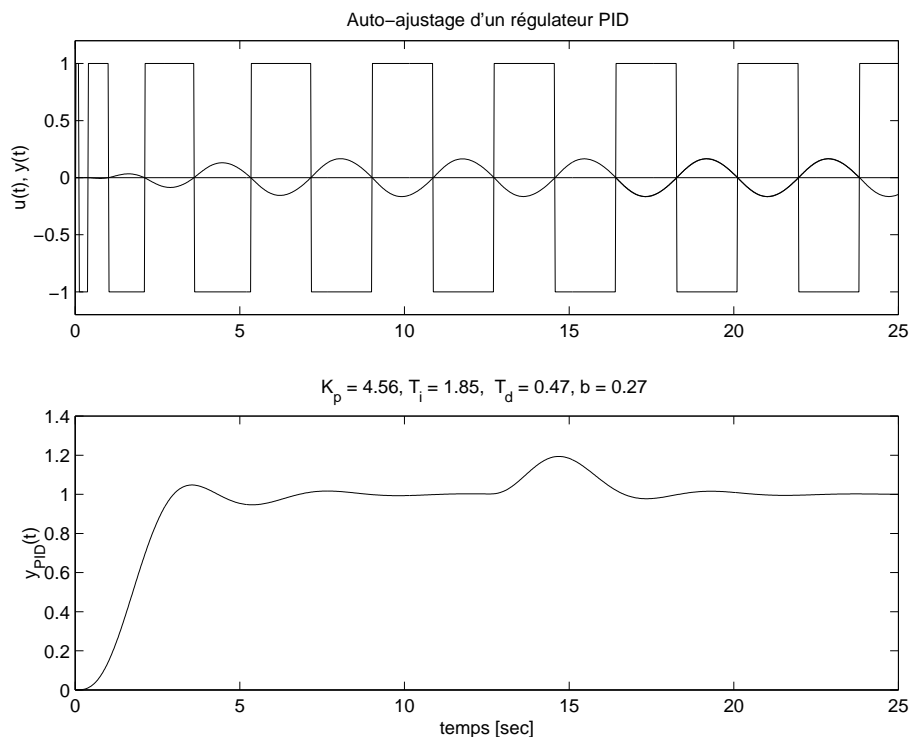


FIG. 15: Auto-ajustage des paramètres d'un régulateur PID

L'analyse des deux courbes temporelles nous permet de voir que l'on a

$$D = 1 \quad A = 0.33 \quad T_{cr} = 3.7 [sec]$$

On en déduit le gain critique

$$K_{cr} \simeq \frac{4D}{\pi A} = 3.86$$

En plus des deux réponses temporelles, on doit mesurer séparément le gain statique du processus qui vaut

$$K_0 = 2$$

Partant du tableau 4 et choisissant $M_s = 2.0$, on peut alors calculer les paramètres du régulateur PID comme suit :

κ	$1/(K_{cr}K_0)$	$1/(3.86 \cdot 2)$	0.13 [/]
K_p	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot K_{cr}$	$0.72 \cdot \exp(-1.6 \cdot 0.13 + 1.2 \cdot 0.13^2) \cdot 3.86$	2.28 [/]
T_i	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot T_{cr}$	$0.59 \cdot \exp(-1.3 \cdot 0.13 + 0.38 \cdot 0.13^2) \cdot 3.7$	1.85 [sec]
T_d	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2) \cdot T_{cr}$	$0.15 \cdot \exp(-1.4 \cdot 0.13 + 0.56 \cdot 0.13^2) \cdot 3.7$	0.47 [sec]
b	$a_0 \cdot \exp(a_1\kappa + a_2\kappa^2)$	$0.25 \cdot \exp(0.56 \cdot 0.13 - 0.12 \cdot 0.13^2)$	0.27 [/]

9.2 Auto-ajustage en présence de bruit

Idéalement, on devrait utiliser un relais sans hystérésis de manière à mesurer le point critique correspondant à ω_π . Cependant, pour diminuer la sensibilité aux bruits de mesure de $y(t)$, on utilisera un relais avec hystérésis. La largeur de celui-ci sera adaptée au niveau de bruit. Cette situation est illustrée par la figure 16.

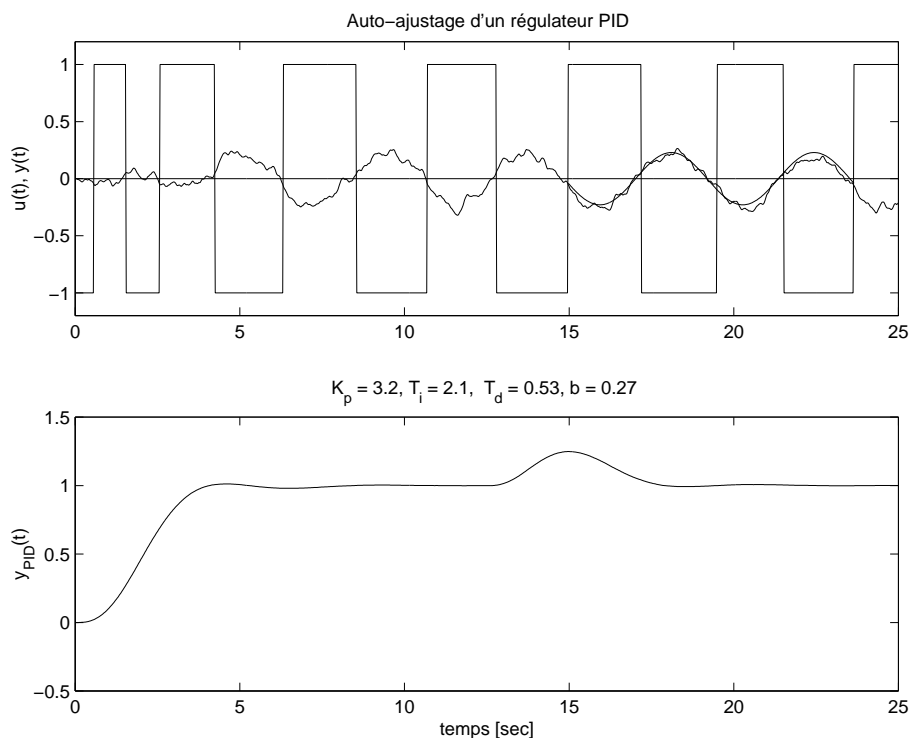


FIG. 16: Auto-ajustage en présence de bruit

L'incertitude sur l'instant de commutation causée par le bruit fait qu'il est préférable de considérer plusieurs transitions du signal de commande pour évaluer la période d'oscillation.

Du fait de l'hystérésis non nulle, la période mesurée T_0 sera plus grande que la période critique T_{cr} utilisée pour calculer les paramètres du régulateur.

9.2.1 Recherche du premier harmonique

A cause du bruit, l'amplitude A du signal de sortie ne peut pas être mesurée en prenant simplement son maximum. Il est nécessaire de la rechercher en calculant la première composante spectrale.

Pour ce faire, on extrait une ou plusieurs périodes du signal $y(t)$ en régime permanent et on évalue numériquement l'amplitude des fonctions cosinus et sinus en calculant :

$$a_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) dt \quad (38)$$

$$\cong \frac{2T_e}{T_0} \sum_{n=0}^N y[n] \cdot \cos\left(2\pi \frac{nT_e}{T_0}\right) \quad (39)$$

$$b_1 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) dt \quad (40)$$

$$\cong \frac{2T_e}{T_0} \sum_{n=0}^N y[n] \cdot \sin\left(2\pi \frac{nT_e}{T_0}\right) \quad (41)$$

On en déduit l'amplitude de la composante fondamentale :

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (42)$$

et sa phase :

$$\alpha_1 = \text{atan}\left(\frac{-b_1}{a_1}\right) \quad (43)$$

Sur la figure 16, on a ajouté le signal $y_1(t) = A_1 \cos(2\pi t/T_0 + \alpha_1)$ évalué sur 2 périodes.

9.3 Comparaison des résultats

Un tableau comparatif des valeurs obtenues à partir de la réponse fréquentielle du modèle, de la mesure avec un relais à hystérésis nulle ou non est présenté ci-dessous.

	modèle	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.05$
K_p	2.4	2.3	1.6
T_i	1.83	1.85	2.1
T_d	0.46	0.47	0.53
b	0.27	0.27	0.27

Les paramètres calculés à partir de mesures faites avec un relais à hystérésis augmentent la marge de stabilité tout en gardant pour le système asservi avec le régulateur PID un comportement satisfaisant (figure 16).

De plus, on notera que le point mesuré avec le relais à hystérésis se situe avant le point critique. Dans ce cas, la pulsation est inférieure à ω_π et le gain du processus est plus grand que G_π . Cela conduit à un gain K_p inférieur à celui attendu et à des paramètres T_i et T_d plus élevés.

Références

- [1] J.G. Ziegler, N.B. Nichols (1942) : "Optimum settings for automatic controllers." *Trans. ASME*, **64**, pp. 759-768.
- [2] I.M Horowitz (1963) : *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press, New-York.
- [3] K.J. Åström, T. Hägglund (1995) : *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, 2nd edition, ISBN 1-55617-516-7.
- [4] K.J. Åström, T. Hägglund, C.C. Hang, W.K. Ho (1993) : "Automatic Tuning and Adaptation for PID Controllers - A Survey.", *Control Engineering Practice*, **1** :4, pp. 699-714.
- [5] K.J. Åström, T. Hägglund (1984) : "Automatic Tuning of Simple Regulators with Specification on Phase and Amplitude Margin.", *Automatica*, **20**, pp. 645-651, 1984