heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud
Département Technologies Industrielles

Note d'application

Modélisation et régulation d'une sustentation magnétique

institut d'
Automatisation
industrielle

Prof. Freddy Mudry

Modélisation et régulation d'une sustentation magnétique

Table des matières

1 Introduction

Dans le cadre de la formation des ingénieurs électriciens, le laboratoire d'automatique de la heig-vd a construit plusieurs maquettes à but didactique dont celle de sustentation magnétique (figure 1). Cette note d'application a pour but d'illustrer :

- la création d'un modèle de la force magnétique en partant des lois physiques ;
- la construction d'un modèle linéaire et l'identification de ses paramètres ;
- le calcul, à partir de considérations simples, des paramètres du régulateur nécessaire au maintien de la sphère dans une position stable.

FIG. 1: Sustentation magnétique du laboratoire d'automatique de la heig-vd

2 Modélisation physique

2.1 Calcul de l'inductance en fonction de la position de la sphère

Le calcul de l'inductance d'un bobinage associé à un circuit magnétique avec ramifications se fait aisément à partir de la notion de la réluctance ρ de ce circuit ou de son inverse, la perméance λ. Considérant la longueur moyenne l_m d'un tube magnétique, sa section moyenne S_m et sa perméabilité μ, on définit sa réluctance

$$\rho \equiv \frac{1}{\lambda} = \frac{l_m}{\mu \cdot S_m} \tag{1}$$

L'inductance de la bobine et du circuit vaut alors :

$$L \equiv \frac{\psi}{I} = \frac{N^2}{\rho} = N^2 \cdot \lambda \tag{2}$$

où I est le courant circulant dans la bobine, ψ le flux totalisé et N le nombre de spires.

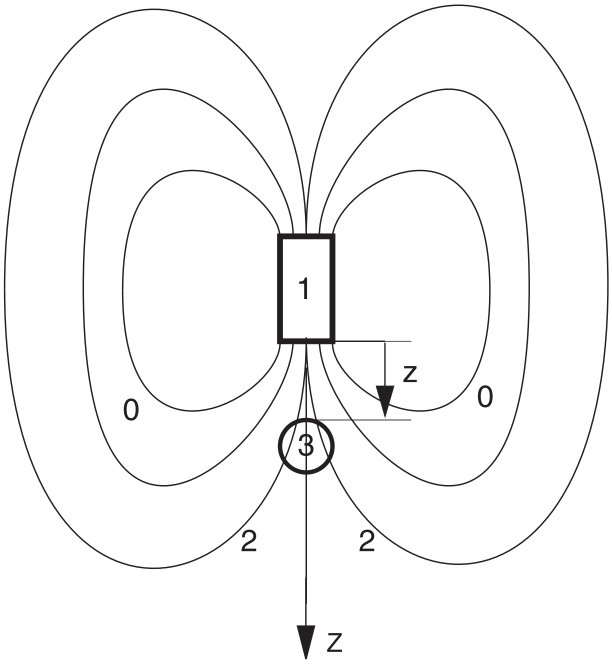

FIG. 2: Champ magnétique de la sustentation

Dans le cas de la sustentation magnétique, le calcul de la réluctance ρ doit se faire en combinant en série et/ou parallèle les diverses parties de l'espace dans lequel se développe le champ magnétique (figure 2). Les parties à considérer sont le noyau de la bobine (1), l'environnement de celle-ci (0), les lignes de champ (2) aboutissant à la sphère ferromagnétique (3) et la distance Z entre celle-ci et le noyau (1) .

Comme la perméabilité du fer est beaucoup plus grande que celle de l'air, on peut négliger la réluctance du noyau ρ_1 et celle de la sphère ρ_3. Il ne reste alors plus que la combinaison parallèle de la réluctance de l'espace (0) environnant la bobine avec celle du flux (2) passant au travers de la sphère. On a donc :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_2 + \rho_z} \tag{3}$$

Admettant que la réluctance ρ_2 est proportionnelle à ρ_0

$$\rho_2 = \gamma \cdot \rho_0 \tag{4}$$

et que ρ_z dépend linéairement de la distance Z séparant la bobine de la sphère

$$\rho_z = \gamma \cdot \rho_0 \cdot \frac{Z}{a} \tag{5}$$

où a est une distance caractéristique, on obtient

$$\rho_2 + \rho_z = \gamma \cdot \rho_0 \left(1 + \frac{Z}{a}\right) \tag{6}$$

Portant ce résultat dans l'équation (3), on obtient la perméance en fonction de la distance séparant la sphère du noyau magnétique :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\left[1 + \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{Z}{a}\right)}\right] \tag{7}$$

L'inductance de l'ensemble du circuit magnétique vaut alors :

$$L(Z) = \frac{N^2}{\rho} = \frac{N^2}{\rho_0}\left[1 + \frac{1}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{Z}{a}\right)}\right]$$

Constatant qu'en l'absence de la sphère ($Z \to \infty$) il ne reste que l'inductance de la bobine $L_0 = N^2/\rho_0$, on obtient finalement :

$$L(Z) = L_0 + \frac{L_0}{\gamma}\frac{1}{1 + \frac{Z}{a}} \tag{8}$$

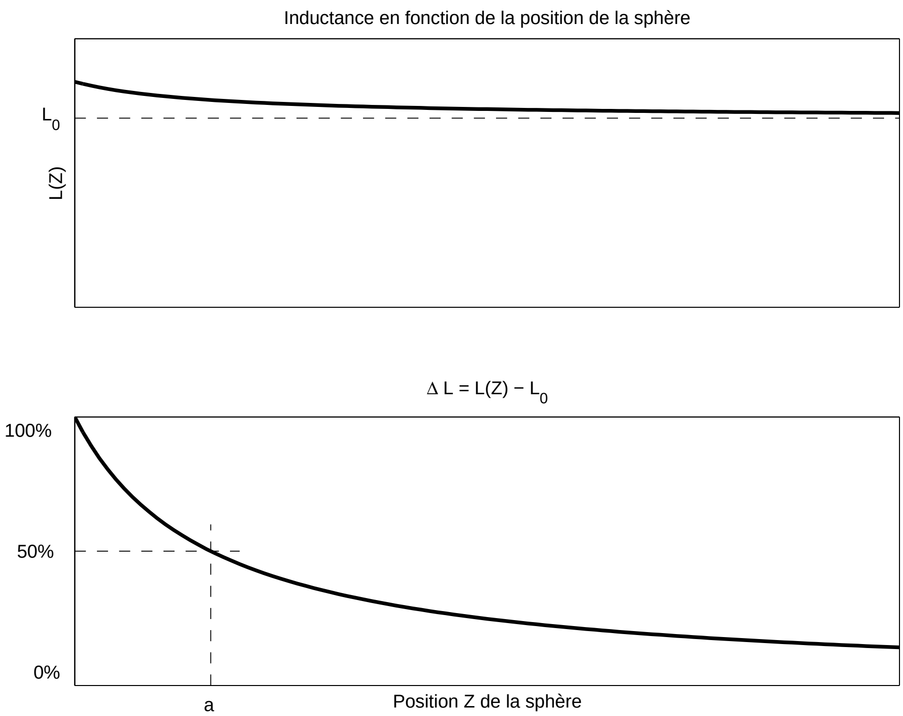

FIG. 3: Variation de l'inductance en fonction de la position de la sphère

Comme on pouvait s'y attendre, on voit que la sphère métallique augmente l'inductance de l'ensemble. Cette variation (très légère, car γ est bien supérieur à 1) vaut donc :

$$\Delta L(Z) = L(Z) - L_0 = \frac{L_0}{\gamma}\frac{1}{1 + \frac{Z}{a}} = \Delta L_{max}\frac{1}{1 + \frac{Z}{a}} \tag{9}$$

On voit ici que la distance caractéristique a représente la distance nécessaire pour réduire ΔL_{max} d'un facteur 2.

2.2 Calcul de la force magnétique

Le calcul de la force ressentie par la sphère se fait en considérant qu'une variation de l'énergie magnétique dW_{mag} peut être causée par un apport d'énergie électrique dW_{elec} et/ou un apport d'énergie mécanique dW_{mec}. La conservation de l'énergie permet alors d'écrire

$$dW_{mag} = dW_{elec} + dW_{mec} \tag{10}$$

La variation d'énergie magnétique vaut :

$$dW_{mag} = d\left(\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2\right) = L \cdot I \cdot dI + \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot dL \tag{11}$$

Les apports d'énergies mécanique et électrique valent :

$$dW_{mec} = F \cdot dZ \tag{12}$$

$$dW_{elec} = U(t) \cdot I(t) \cdot dt \tag{13}$$

Tenant compte de : a) la loi de Lenz $U(t) = d\psi/dt$, b) la loi définissant l'inductance $\psi = L \cdot I$, c) la variation d'énergie magnétique (équation 11), l'équation (13) s'écrit :

$$\begin{aligned}
dW_{elec} &= I \cdot (U(t) \cdot dt) = I \cdot d\psi \\
&= I \cdot (L \cdot dI + I \cdot dL) \\
&= L \cdot I \cdot dI + I^2 \cdot dL \\
&= dW_{mag} + \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot dL
\end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad dW_{mag} = dW_{elec} - \frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot dL \tag{14}$$

Considérant les équations (10), (12) et (14), on voit que l'on a

$$F \cdot dZ = dW_{mec} = -\frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot dL$$

On en déduit donc que la force dépend du carré du courant et du gradient de l'inductance par rapport au déplacement Z de la sphère :

$$F(I, Z) = \frac{dW_{mec}}{dZ} = -\frac{1}{2} \cdot I^2 \cdot \frac{dL(Z)}{dZ} \tag{15}$$

Dérivant l'expression de l'inductance $L(Z)$ (équation 8), il vient finalement :

$$F(I, Z) = +\frac{L_0}{2 \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{I^2}{\left(1 + \frac{Z}{a}\right)^2} \tag{16}$$

2.3 Création d'un modèle linéaire

Considérant un point de fonctionnement $Q_0 = \{i_0, z_0\}$ avec, autour de celui-ci, de faibles variations représentées par i et z (figure 4), on peut écrire :

$$I(t) = i_0 + i(t) \quad \text{et} \quad Z(t) = z_0 + z(t) \tag{17}$$

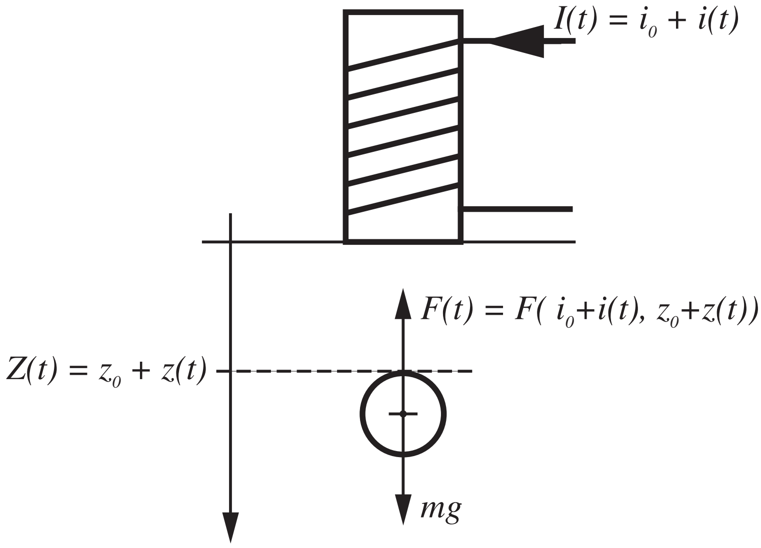

FIG. 4: Point de fonctionnement et variations

En ne gardant que la partie linéaire du développement limité de la fonction $F(I,Z)$, on obtient l'approximation d'ordre 1

$$F(I,Z) = F(i_0, z_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_{Q_0} i + \left.\frac{\partial F}{\partial Z}\right|_{Q_0} z \equiv F_0 + k_i \cdot i - k_z \cdot z \tag{18}$$

avec

$$F_0 \equiv F(i_0, z_0) = \frac{L_0}{2 \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{i_0^2}{(1+\frac{z_0}{a})^2} \tag{19}$$

$$k_i \equiv + \left.\frac{\partial F}{\partial I}\right|_{Q_0} = \frac{L_0}{\gamma \cdot a} \cdot \left.\frac{i_0}{\left(1+\frac{Z}{a}\right)^2}\right|_{Q_0}$$

$$k_z \equiv - \left.\frac{\partial F}{\partial Z}\right|_{Q_0} = \frac{L_0}{\gamma \cdot a^2} \cdot \left.\frac{i_0^2}{\left(1+\frac{Z}{a}\right)^3}\right|_{Q_0} = \frac{2 \cdot F_0}{a} \cdot \left.\frac{1}{1+\frac{Z}{a}}\right|_{Q_0}$$

d'où

$$k_i = \frac{2 \cdot F_0}{i_0} \tag{20}$$

$$k_z = \frac{2 \cdot F_0}{a + z_0} \tag{21}$$

On notera que l'on a $k_z < 2 \cdot F_0 / z_0$.

2.4 Calcul des paramètres a et ΔL

La mesure du champ de force $F(I,Z)$ permet d'obtenir les valeurs de F_0, k_i et k_z. Connaissant ces grandeurs, on peut calculer la distance caractéristique a à partir de l'équation (21) :

$$a = \frac{2 \cdot F_0}{k_z} - z_0 \tag{22}$$

et l'augmentation de l'inductance à partir des équations (9) et (19)

$$\Delta L_{max} = L(0) - L_0 = \frac{L_0}{\gamma} = 2a \cdot F_0 \cdot \frac{(1 + \frac{z_0}{a})^2}{i_0^2} \tag{23}$$

3 Mesure et identification des paramètres

3.1 Mesure du champ de force $F(I, Z)$

Le champ de force $F(I, Z)$ a été mesuré sur une maquette du laboratoire d'automatique de la heig-vd en chargeant la sphère de petites masses en laiton pour différents courants et positions. La procédure consistait simplement à placer la sphère sur un support non magnétique et d'augmenter le courant jusqu'au moment où la sphère décolle de son support. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 5.

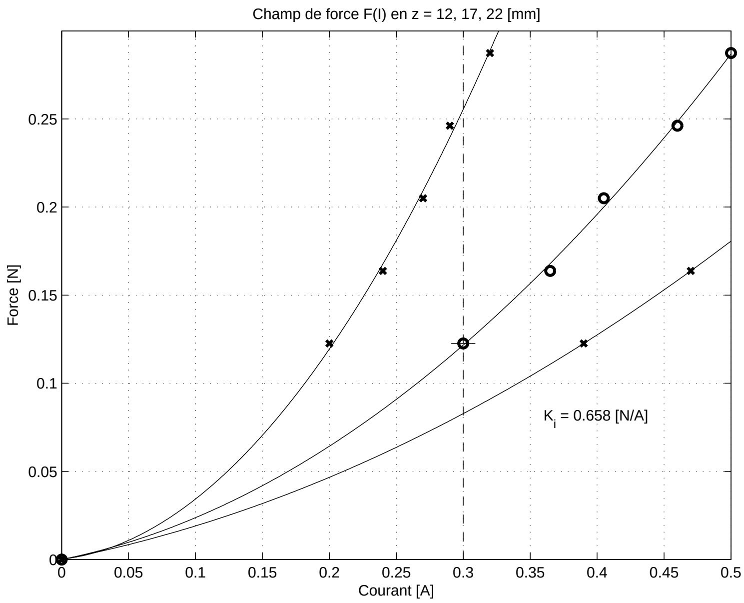

FIG. 5: Champ de force $F(I, Z)$ pour $Z = \{12, 17, 22\}$ [mm]

Le point de fonctionnement choisi se situe en $z_0 = 17$ [mm]. Il faut alors un courant $i_0 = 300$ [mA] pour compenser le poids de la sphère. La masse de la sphère valant 12.5 grammes, on a $F_0 = 123$ [mN].

Une interpolation parabolique sur les points mesurés permet d'obtenir trois courbes à partir desquelles on tire trois points donnant la force en fonction de la distance pour un courant constant $F(I, Z)|_{i_0}$. Une interpolation parabolique sur les trois points représentant l'inverse de la force $F(I, Z)|_{i_0}$ permet d'obtenir la courbe de la figure 6.

Les coefficients k_i et k_z liés aux pentes mesurées valent :

$$k_i \quad = +0.66\,[\mathrm{N/A}], \qquad k_z = +12\,[\mathrm{N/m}]$$

Ces valeurs sont à comparer avec $k_{i,theorique}$ (équation 20) et $k_{z,max}$ (équation 21) :

$$k_{i,theorique} = \frac{2 \cdot F_0}{i_0} = \frac{0.246\,[\mathrm{N}]}{0.3\,[\mathrm{A}]} = 0.83\,[\mathrm{N/A}]$$

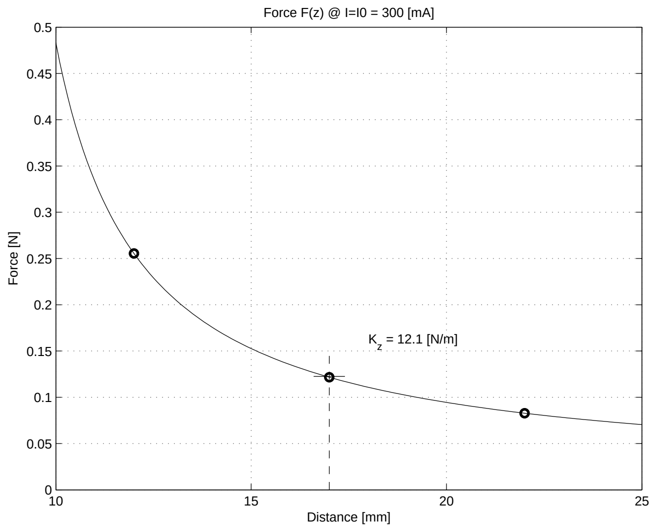

Fig. 6: Force à courant constant $i_0 = 300\,[\text{mA}]$

$$k_{z,max} = \frac{2 \cdot F_0}{z_0} = \frac{0.246\,[\text{N}]}{17\,[\text{mm}]} = 14.5\,[\text{N/m}]$$

3.2 Mesure de la constante de temps électrique

L'application d'un saut de tension de 60 [V] sur la bobine a permis l'enregistrement du courant donné par la figure 7 et la mesure du courant $i_\infty = 0.75\,[\text{A}]$. On en tire la constante de temps électrique $\tau_{elt} = 22\,[\text{msec}]$ et la résistance de la bobine qui vaut $R = 80\,[\Omega]$.

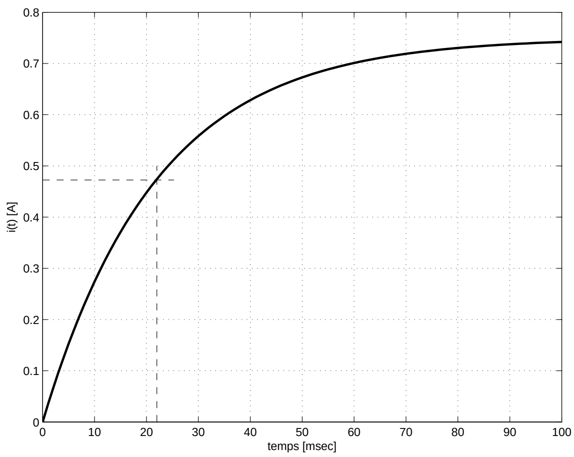

Fig. 7: Évolution du courant dans la bobine

3.3 Identification des paramètres

À partir des grandeurs mesurées, dont les valeurs sont rappelées dans le tableau 1, on peut calculer les valeurs des paramètres L_0, a, ΔL et γ.

F_0	i_0	z_0	k_i	k_z	τ_{elt}	R
0.123 [N]	0.3 [A]	17 [mm]	0.66 [N/A]	12 [N/m]	22 [ms]	80 [Ω]

TAB. 1: Valeurs mesurées sur la maquette

De la constante de temps électrique, on tire l'inductance de la bobine seule :

$$L_0 = \tau_{elt} \cdot R = 1.76\,[\mathrm{H}] \tag{24}$$

Partant des équations (22) et (23), on peut calculer

$$a = \frac{2 \cdot F_0}{k_z} - z_0 = 3.3\,[\mathrm{mm}] \tag{25}$$

$$\Delta L_{max} = 2a \cdot F_0 \cdot \frac{(1 + z_0/a)^2}{i_0^2} = 0.34\,[\mathrm{H}] \tag{26}$$

Enfin, des équations (3) et (4), on tire le coefficient de proportionnalité γ entre les réluctances ρ_2 et ρ_0 :

$$\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{L_0}{\Delta L_{max}} = 5.2 \tag{27}$$

3.4 Fichier Matlab

```
% Identification d'une sustentation magnetique, maquette No. 00
clear all; close all; format compact;

% points de mesure en Y0 = 85 mm +/- 5 mm, Ymax = 102 mm
m  = 12.5e-3; ml = 4.2e-3; g = 9.81;
F0 = m*g, Ymax = 102e-3;
z  = Ymax - [90 85 80]*1e-3;
zmin = z(1);  z0   = z(2);  zmax = z(3);

% F(i) @ z constant
Fp5 = [0 F0 + g*ml*[0 1 2 3 4]];      % F(i) en Y0 + 5mm
Ip5 = 1e-3*[0 200 240 270 290 320];   % I  pour Y0 + 5mm
Fp0 = [0 F0 + g*ml*[0 1 2 3 4]];      % F(i) en Y0
Ip0 = 1e-3*[0 300 365 405 460 500];   % I  pour Y0
Fm5 = [0 F0 + g*ml*[0 1]];            % F(i) en Y0 - 5mm
Im5 = 1e-3*[0 390 470];               % I  pour Y0 - 5mm
plot(Im5,Fm5,'x', Ip0,Fp0,'o',Ip5,Fp5,'x');
  axis([0 500 0 300]*1e-3); hold on;
  xlabel('Courant [A]'); ylabel('Force [N]');
  title('Champ de force F(I) en z = 12, 17, 22 [mm]');

% ajustage des 3 paraboles F(i) @ z constant
If  = (1:500)*1e-3;   % abscisse fine pour le tracage
cp5 = polyfit(Ip5,Fp5,2),  Fp5 = polyval(cp5,If);
cm5 = polyfit(Im5,Fm5,2),  Fm5 = polyval(cm5,If);
cp0 = polyfit(Ip0,Fp0,2),  Fp0 = polyval(cp0,If);
```

```
I0  = 0.3
  % tracage
plot(If,Fm5,If,Fp0,If,Fp5);
plot(I0*[0.97 1.03],[F0 F0], [I0 I0],[0 0.3],'--');grid;
Kitheo = 2*F0/I0
Kimes  = polyval([2*cp0(1) cp0(2)],I0)
text(0.36,0.08,['K_i = ' num2str(Kimes,3) ' [N/A]']);

% F(z) @ I = I0
Fz(1) = polyval(cp5,I0);    % F(Y0 + 5mm, I0)
Fz(2) = polyval(cp0,I0);    % F(Y0      , I0)
Fz(3) = polyval(cm5,I0);    % F(Y0 - 5mm, I0)

% ajustage parabolique de 1/F(z) = c1*z^2 + c2*z + c3
Finv = 1 ./ Fz;             % inversion de la force F(z)
zf   = 1e-3*(5:0.1:35);     % abscisse fine pour le tracage
cz = polyfit(z,Finv,2)      % ajustage parabolique de 1/F(z)
Fzf = 1 ./ polyval(cz,zf);  % valeurs de F(z)
  % tracage
figure;
plot(z*1000,Fz,'o',zf*1000,Fzf);
  axis([zmin*1000-2 zmax*1000+2 0 0.3]);   % z en [mm]
  hold on; grid;
  title('Force F(z) @ I=I0 = 300 [mA]');
  xlabel('Distance [mm]'); ylabel('Force [N]');
  plot([z0-0.0004 z0+0.0004]*1000,[F0 F0], [z0 z0]*1000, [0 0.15],'--');

% calcul de Kz=-dF(z)/dz en zo avec F(z) = 1/(c1*z^2 + c2*z + c3)
Kz = polyval([2*cz(1) cz(2)],z0)/(polyval(cz,z0))^2
text(z0*1000+1,F0,['K_z = ' num2str(Kz,3) ' [N/m]']);

% calcul de Kzmax, a, DeltaL, L0 et gamma
Kzmax = 2*F0/z0,  a = 2*F0/Kz - z0
DeltaL = 2*a*F0*((1+z0/a)/I0)^2
R = 80,  tau = 22e-3
L0 = R*tau, gamma = L0 / DeltaL
```

4 Régulation de la position de la sphère

Le problème de la sustentation magnétique est un classique de la régulation automatique. Il est simple dans sa description analytique, plus complexe dans sa réalisation. On se contentera dans ce qui suit de la description analytique.

L'équation décrivant le mouvement de la sphère (figure 8) découle de la loi de Newton

$$m\ddot{Z}(t) = +mg - F(I(t), Z(t)) \tag{28}$$

La seule difficulté du problème réside dans le fait que la force $F(I, Z)$ dépend non linéairement de la position de la sphère et du courant circulant dans la bobine.

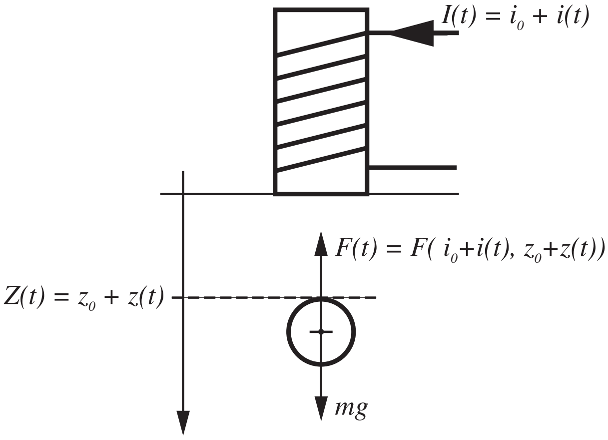

FIG. 8: Modélisation de la sustentation magnétique

4.1 Description du système à régler

La description des systèmes asservis se fait généralement à l'aide d'un schéma fonctionnel (figure 9) dont les fonctions de transfert sont décrites avec la variable s de Laplace. On y trouve le régulateur ou correcteur $G_c(s)$ et le système à régler $G_a(s)$, à savoir l'ensemble sphère-bobine, qui doit être représenté par un modèle linéaire.

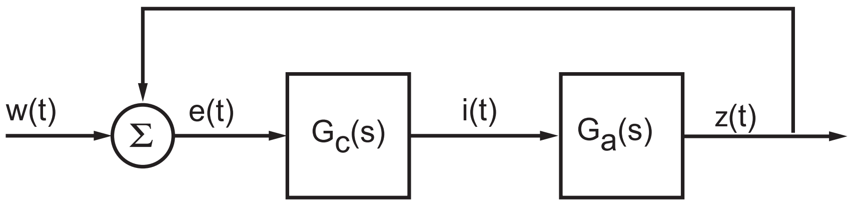

FIG. 9: Schéma fonctionnel du système asservi

On utilisera donc le modèle développé à la section 2.3 où l'on a vu qu'en première approximation, on a

$$F(I,Z) \simeq F_0 + k_i \cdot i - k_z \cdot z \tag{29}$$

En portant ce résultat dans l'équation de Newton, on obtient

$$m\ddot{Z}(t) = m\ddot{z}(t) = +mg - F(I,Z) = mg - F_0 - k_i\, i(t) + k_z\, z(t) \tag{30}$$

Comme autour du point de fonctionnement la force F_0 équilibre le poids mg, on trouve que le mouvement de la sphère est décrit par

$$m\ddot{z}(t) = +k_z\, z(t) - k_i\, i(t) \tag{31}$$

En transformant de Laplace cette équation différentielle linéaire

$$\left(m\, s^2 - k_z\right)\, Z(s) = -k_i\, I(s)$$

on obtient la fonction de transfert du système à régler $G_a(s)$

$$G_a(s) \equiv \frac{Z(s)}{I(s)} = \frac{-k_i}{m\, s^2 - k_z} \tag{32}$$

Comme les pôles de cette fonction de transfert valent

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k_z}{m}} \tag{33}$$

et que l'un des deux est réel positif, cela signifie, comme on s'y attendait, que le système laissé à lui-même est instable et que la sphère va se coller à la bobine ou tomber.

Remarque En se limitant à $G_a(s)$ pour décrire le système bobine-sphère, on simplifie grandement le problème car, ce faisant, le système analysé reste d'ordre 2. Si l'on voulait tenir compte du fait que le courant $i(t)$ s'établit avec une constante de temps τ_{elt} non nulle, la fonction de transfert $G_a(s)$ devrait être précédée de

$$G_{a1}(s) = \frac{1}{1 + s\,\tau_{elt}}$$

Cependant, comme la constante de temps τ_{elt} est relativement faible et dans un but de simplification des calculs, on se contentera de représenter la bobine et la sphère par la seule fonction de transfert $G_a(s)$.

4.2 Choix du régulateur

Pour maintenir la sphère à une hauteur donnée, il faut la placer dans une boucle de régulation contenant un correcteur qui génère le courant circulant dans la bobine. Ce correcteur $G_c(s)$ doit prendre en compte, non seulement la position de la sphère, mais également sa vitesse de manière à anticiper son mouvement. On a ainsi affaire à un régulateur de type proportionnel-dérivé décrit par l'équation

$$i(t) = K_p\left(e(t) + T_d\,\frac{de(t)}{dt}\right) \tag{34}$$

En transformant de Laplace cette équation, on obtient

$$I(s) = K_p\;(1 + s\,T_d)\;E(s) \tag{35}$$

Ce qui permet de trouver la fonction de transfert du correcteur

$$G_c(s) \equiv \frac{I(s)}{E(s)} = K_p\;(1 + s\,T_d) \tag{36}$$

4.3 Fonction de transfert du système en boucle fermée

Comme la fonction de transfert $G_a(s)$ possède un gain négatif (la distance z diminue si le courant i augmente), le retour sur le comparateur doit se faire positivement. Dans ce cas, la fonction de transfert du système asservi à retour unitaire vaut

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 - G_{bo}(s)} \tag{37}$$

avec

$$G_{bo}(s) = G_c(s)\,G_a(s) = K_p\;(1 + s\,T_d)\;\frac{-k_i}{m\,s^2 - k_z} \tag{38}$$

On peut ainsi calculer la fonction de transfert en boucle fermée

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 - G_{bo}(s)} \quad = \quad \frac{\frac{-k_i\,K_p\,(1+s\,T_d)}{m\,s^2 - k_z}}{1 + \frac{k_i\,K_p\,(1+s\,T_d)}{m\,s^2 - k_z}}$$

d'où

$$G_{bf}(s) \equiv \frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{-K_p\,k_i\,(1 + s\,T_d)}{ms^2 + K_p\,k_i\,T_d\,s + K_p\,k_i - k_z} \tag{39}$$

4.4 Stabilité du système bouclé

On sait qu'un système d'ordre 2 est stable si tous les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert ont le même signe car cette condition induit des pôles à partie réelle négative . Comme m et $(K_p\,k_i\,T_d)$ sont positifs, on en déduit que la sphère se maintiendra en un point donné seulement si

$$K_p\,k_i - k_z > 0 \quad \Rightarrow \quad K_p > \frac{k_z}{k_i} \tag{40}$$

4.5 Régulateur optimum

Nous venons de trouver la condition de stabilité pour la sphère ; mais il reste à rechercher les valeurs de K_p et T_d pour que la position stable soit atteinte dans un temps relativement court et avec un minimum d'oscillation.

L'analyse des systèmes d'ordre 2 montre que leur réponse transitoire dépend de deux paramètres : le coefficient d'amortissement ζ et la pulsation naturelle du système ω_n. De plus, leurs réponses indicielles possèdent un temps de montée rapide et sont peu oscillantes lorsque $\zeta = \zeta_{opt} \simeq 0.7$. Le temps d'établissement à 5% de la valeur asymptotique vaut alors

$$t_{reg} \simeq 3\,\frac{1}{|Re\,\{p_{1,2}\}|} = \frac{3}{\zeta\,\omega_n} \quad \text{si} \quad \zeta < 1 \tag{41}$$

En écrivant le dénominateur de $G_{bf}(s)$ (équation 39) dans la forme canonique des systèmes d'ordre 2

$$D(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}\,s + \frac{1}{\omega_n^2}\,s^2 \tag{42}$$

on obtient

$$G_{bf}(s) = \frac{-K_p\,k_i}{K_p\,k_i - k_z}\;\frac{1 + s\,T_d}{1 + \frac{K_p\,k_i\,T_d}{K_p\,k_i - k_z}\,s + \frac{m}{K_p\,k_i - k_z}\,s^2} \tag{43}$$

Par identification des coefficients des dénominateurs, on déduit

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{K_p\,k_i\,T_d}{K_p\,k_i - k_z} > 0, \qquad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{m}{K_p\,k_i - k_z} > 0 \tag{44}$$

Ce qui permet, connaissant ζ et ω_n, de calculer

$$K_p = \frac{m\,\omega_n^2 + k_z}{k_i}, \qquad T_d = \frac{2\zeta\omega_n m}{K_p\,k_i} \tag{45}$$

Comme on l'a vu (équation 41), la valeur de ω_n est déterminée par le temps d'établissement t_{reg} désiré

$$\omega_n \simeq \frac{3}{\zeta\, t_{reg}} \quad \text{si} \quad \zeta < 1 \tag{46}$$

Avant de se donner une valeur pour t_{reg}, il est important de réaliser que celui-ci ne peut pas être choisi arbitrairement faible ; on doit en effet tenir compte de la capacité physique du système à répondre à une perturbation. Pour la sphère de la sustentation, il semble raisonnable de choisir un temps d'établissement t_{reg} d'environ un dixième de seconde.

On notera également que le gain du système asservi $G_{bf}(s)$ est négatif

$$K_0 = -\frac{K_p\, k_i}{K_p\, k_i - k_z} \tag{47}$$

et que, pour obtenir déplacement positif, il sera nécessaire de donner une consigne de signe contraire.

4.6 Paramètres du régulateur

Admettant que les paramètres de la sustentation magnétique valent

$$m = 12.5\,\text{gr}, \quad k_z = 12\,[\text{N/m}], \quad k_i = 0.66\,[\text{N/A}]$$

et que l'on souhaite avoir

$$t_{reg} \simeq 0.1\,[\text{sec}] \qquad \zeta \simeq 0.7 \tag{48}$$

on en déduit

$$\omega_n = \frac{3}{\zeta\, t_{reg}} = 42.9\,[\text{rad/sec}] \tag{49}$$

$$K_p = \frac{m\,\omega_n^2 + k_z}{k_i} = 53.0\,[\text{A/m}] \tag{50}$$

$$T_d = \frac{2\zeta\omega_n m}{K_p\, k_i} = 21.5\,[\text{msec}] \tag{51}$$

$$K_0 = -\frac{K_p\, k_i}{K_p\, k_i - k_z} = -1.52\,[\text{m/m}] \tag{52}$$

À partir de ces paramètres, on peut calculer et tracer la position de la sphère consécutive à un saut de consigne unité et observer que cette réponse correspond à nos attentes (figure 10).

4.7 Fichier de simulation

```
% régulation d'une sustentation magnétique
clear all; close all; clc;
format compact; format short g;

% paramètres du système asservi
m = 12.5e-3; Kz = 12; Ki = 0.66;
treg = 0.1; zeta = 0.7;
```

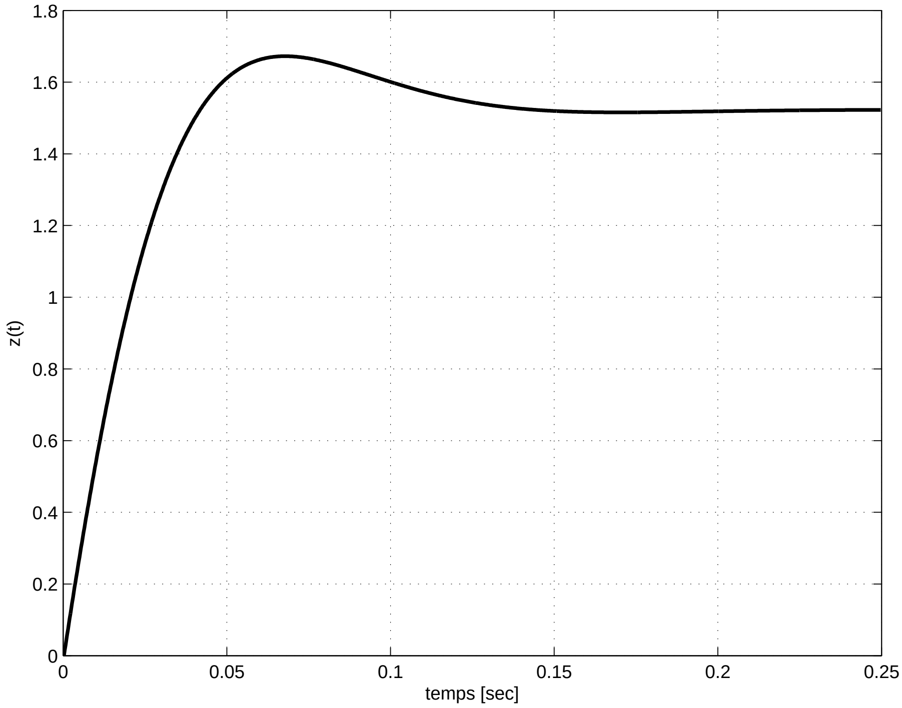

FIG. 10: Réponse indicielle de la sustentation magnétique

```
wn = 3/(zeta*treg)
Kp = (m*wn^2 +Kz) / Ki
Td = 2*zeta*wn*m / (Kp*Ki)
K0 = - Kp*Ki / (Kp*Ki - Kz)

% système asservi
Gcs = tf(Kp*[Td, 1], 1);
Gas = tf(-Ki, [m, 0, -Kz]);
Gbo = Gcs * Gas;
zpk(Gbo)
Gbf = Gbo / (1 - Gbo);
Gbf = minreal(Gbf);
zpk(Gbf)

% réponse indicielle
tmax = 0.25; Npts = 1000;
dt = tmax/Npts;
tt = 0:dt:tmax-dt;
wt = -ones(size(tt)); wt (1) = 0;
yt = lsim(Gbf, wt, tt);
plot(tt,yt,'LineWidth', 2); grid on;
xlabel('temps [sec]');
ylabel('z(t)');
print -deps repind.eps
```

5 Conclusion

De ce qui précède, on retiendra essentiellement comment se font la modélisation et l'identification des paramètres de la sustentation magnétique.

En ce qui concerne la régulation, on se souviendra que, dans un but didactique, on s'est contenté de représenter le système par un modèle simplifié d'ordre 2. Cela a permis la recherche d'une solution analytique élémentaire qui, malheureusement, n'est pas suffisante pour envisager une réalisation bien plus complexe par nature.

Pour mener à bien une réalisation telle que la sustentation magnétique de la heig-vd, il faut commencer par modéliser le système dans tous ses détails (en n'oubliant pas l'amplificateur de courant et le capteur de position). Il faut ensuite observer que la boucle d'asservissement étudiée ci-dessus conduit à une erreur statique de plus de 50% et que, pour la supprimer, on devra ajouter une boucle d'asservissement supplémentaire du type proportionnel-intégral.

On comprend ainsi que la réalisation d'une sustentation magnétique devra passer au préalable par l'analyse complète et détaillée du système asservi en utilisant tous les outils d'analyse et de synthèse de la régulation automatique.