

# 1 Analyse des systèmes linéaires

L'analyse des systèmes linéaires se fait essentiellement avec la transformation de Laplace car celle-ci traite une classe de signaux plus large que ne l'autorise la transformation de Fourier. De plus, elle permet d'étudier des systèmes stables ou non par le fait que la variable de Laplace ( $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ ) est définie dans l'ensemble du plan complexe. Enfin, par l'interprétation des pôles de la fonction image  $X(s)$ , on prédit facilement la forme de la fonction originale  $x(t)$ .

## 1.1 La transformation de Laplace

### 1.1.1 Rappels mathématiques

Dans ce paragraphe, on se contente de rappeler quelques propriétés liées à la transformation de Laplace et utilisées dans l'analyse des systèmes linéaires. Pour toute information supplémentaire, on consultera avantageusement son cours de mathématiques.

#### Définition

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \text{ [1/sec]} \quad (1.1)$$

Dans l'analyse des signaux temporels, la variable  $s$  est appelée pulsation complexe et elle possède les unités [1/sec]. On notera que, si la variable  $x(t)$  est une tension électrique alors son image  $X(s)$  se mesure en [V · sec].

#### Linéarité

$$\mathcal{L}(ax(t) + by(t)) = aX(s) + bY(s) \quad (1.2)$$

#### Dérivation

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = sX(s) - x(t=0) \quad (1.3)$$

#### Intégration

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(t) dt + x(t=0)\right) = \frac{X(s)}{s} + \frac{x(t=0)}{s} \quad (1.4)$$

**Retard**

$$\mathcal{L}(x(t - t_0)) = e^{-st_0} X(s) \quad (1.5)$$

**Amortissement**

$$\mathcal{L}(x(t) e^{-at}) = X(s + a) \quad (1.6)$$

**Valeurs limites**

$$x(t \rightarrow 0_+) = s X(s)|_{s \rightarrow \infty} \quad (1.7)$$

$$x(t \rightarrow \infty) = s X(s)|_{s \rightarrow 0} \quad (1.8)$$

**Quelques transformées** De l'ensemble des transformées de Laplace généralement proposées dans les formulaires mathématiques, on ne gardera que les plus fréquemment utilisées dans l'analyse des systèmes (tableau 1.1). La connaissance de celles-ci, associée aux propriétés rappelées plus haut, permettra de résoudre la plupart des problèmes.

$x(t)$	$\leftrightarrow$	$X(s)$
$\delta(t)$		1
$\epsilon(t)$		$\frac{1}{s}$
$at \cdot \epsilon(t)$		$\frac{a}{s^2}$
$\exp(-at) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{1}{s + a}$
$\sin(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t) \cdot \epsilon(t)$		$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

TAB. 1.1: Quelques transformées de Laplace

**Pôles et zéros** Comme le montre le tableau des transformées, l'image  $X(s)$  d'une fonction  $x(t)$  est une fraction constituée de deux polynômes

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.9)$$

Les racines de ces polynômes sont importantes pour l'analyse de l'évolution des signaux ou du comportement des systèmes. On définit ainsi

1. Les **pôles** de  $X(s)$  qui sont les racines du dénominateur  $D(s)$ ; ils déterminent complètement la partie transitoire (oscillation et amortissement) des réponses temporelles.
2. Les **zéros** de  $X(s)$  qui sont les racines du numérateur  $N(s)$ ; leur effet n'intervient que sur les amplitudes des composantes temporelles des signaux  $x(t)$ .

### 1.1.2 Quelques exemples introductifs

#### Exemple 1

Connaissant l'image  $I_1(s)$  d'un courant  $i_1(t)$

$$I_1(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2}{(s + 3)(s + 4)} \quad (1.10)$$

on souhaite connaître  $i_1(0+)$ ,  $i_1(\infty)$  et  $i_1(t)$ .

**Valeurs initiale et finale** Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir

$$i_1(0_+) = s I_1(s)|_{s \rightarrow \infty} = 0 [A]$$

$$i_1(\infty) = s I_1(s)|_{s \rightarrow 0} = 0 [A]$$

**Recherche des pôles** Les pôles sont les racines du dénominateur de la fonction-image  $I_1(s)$ . Dans ce cas, les pôles valent simplement

$$p_1 = -3 \left[ \frac{1}{sec} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -4 \left[ \frac{1}{sec} \right]$$

**Évolution temporelle** Le calcul de  $i_1(t)$  se fait en décomposant la fonction  $I_1(s)$  en somme de fractions simples faisant intervenir les pôles de  $I_1(s)$ . Dans ce cas, cette fonction se décompose en deux fractions d'ordre 1

$$I_1(s) = \frac{A_1}{s + 3} + \frac{A_2}{s + 4}$$

Se souvenant des transformées élémentaires présentées plus haut, on voit que le courant  $i_1(t)$  est décrit par la somme de deux exponentielles

$$i_1(t) = (A_1 \exp(-3t) + A_2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t)$$

que l'on écrira plus généralement sous la forme

$$i_1(t) = (A_1 \exp(-t/\tau_1) + A_2 \exp(-t/\tau_2)) \cdot \epsilon(t)$$

Cette écriture fait apparaître les constantes de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{3} [\text{sec}] \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{4} [\text{sec}]$$

Connaissant ces constantes de temps, on peut en déduire la durée  $t_{tr}$  du régime transitoire

$$t_{tr} \approx 5 \tau_{max} = 5 \frac{1}{3} \approx 2 [\text{sec}]$$

Les valeurs des coefficients  $A_1$  et  $A_2$  se trouvent par identification des coefficients des numérateurs :

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{2}{(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s + 4A_1 + 3A_2}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ 4A_1 + 3A_2 &= 2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_2 = 2 \\ I_1(s) &= \frac{2}{s+3} - \frac{2}{s+4} \end{aligned}$$

Le courant  $i_1(t)$  correspondant à cette fonction-image  $I_1(s)$  vaut donc

$$i_1(t) = (2 \exp(-3t) - 2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t) \quad (1.11)$$

## Exemple 2

Connaissant l'image  $I_2(s)$  d'un courant  $i_2(t)$

$$I_2(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} \quad (1.12)$$

on désire calculer  $i_2(0+)$ ,  $i_2(\infty)$  et  $i_2(t)$ .

**Valeurs initiale et finale** Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir

$$i_2(0_+) = s I_2(s)|_{s \rightarrow \infty} = 1 [A]$$

$$i_2(\infty) = s I_2(s)|_{s \rightarrow 0} = 0 [A]$$

**Recherche des pôles** Les pôles de la fonction-image  $I_2(s)$  sont évidemment les mêmes que dans l'exemple précédent

$$p_1 = -3 \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -4 \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right]$$

**Évolution temporelle** Comme les pôles de  $I_2(s)$  sont les mêmes que ceux de l'exemple 1, la fonction  $I_2(s)$  se décompose en deux fractions simples identiques aux précédentes :

$$I_2(s) = \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4}$$

D'où

$$i_2(t) = (A_1 \exp(-3t) + A_2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t)$$

Comme les constantes de temps sont les mêmes que précédemment, la durée du régime transitoire n'est pas changée. Seules les valeurs des coefficients  $A_1$  et  $A_2$  vont distinguer ces deux réponses temporelles.

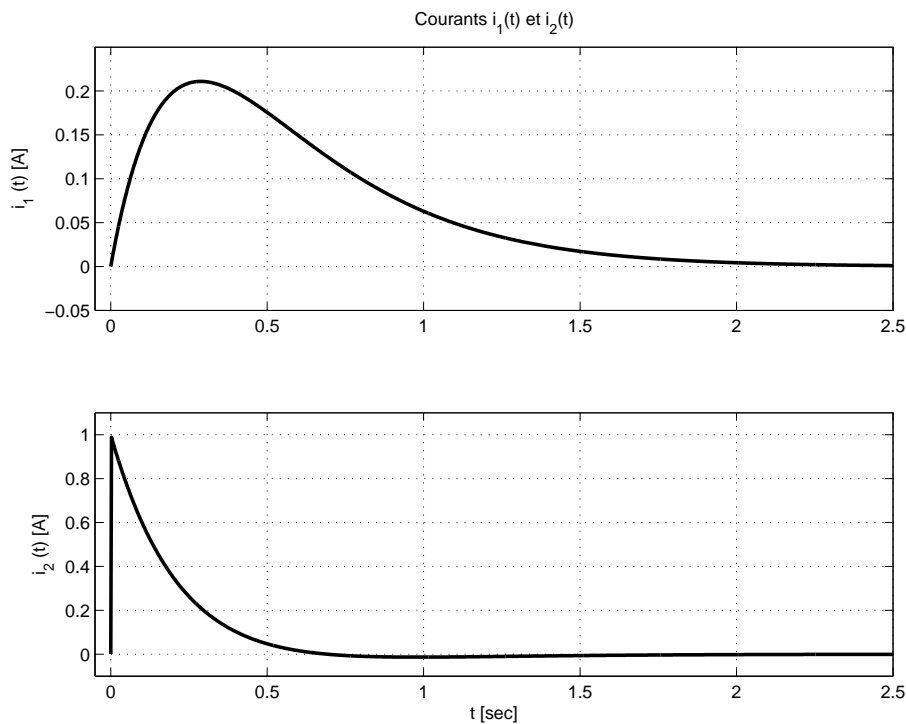


FIG. 1.1: Évolution des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$

La réduction à un même dénominateur commun donne

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{A_1}{s+3} + \frac{A_2}{s+4} \\ &= \frac{(A_1 + A_2)s + 4A_1 + 3A_2}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ 4A_1 + 3A_2 &= 2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1 &= -1, & A_2 &= 2 \\ I_2(s) &= \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \end{aligned}$$

qui correspond au courant

$$i_2(t) = (-1 \exp(-3t) + 2 \exp(-4t)) \cdot \epsilon(t) \quad (1.13)$$

Une illustration des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  est donnée dans la figure 1.1. Comme on l'a déjà dit, une modification du numérateur, c'est-à-dire des zéros de la fonction-image, ne modifie en rien les constantes de temps des exponentielles constitutives du signal ; seules leurs amplitudes sont changées.

**Remarque** Dans les expressions temporelles ci-dessus, on a pris soin, en utilisant la fonction  $\epsilon(t)$ , de toujours préciser que ces expressions étaient nulles pour  $t < 0$ . Afin d'alléger l'écriture des fonctions à venir, on admettra implicitement que toutes les expressions temporelles sont nulles pour  $t < 0$ .

### Exemple 3

On désire connaître  $i_3(0)$ ,  $i_3(\infty)$  et  $i_3(t)$  sachant que la fonction-image  $I_3(s)$  vaut :

$$I_3(s) = \frac{2s^2 + 15s + 125}{s(s^2 + 10s + 125)} \quad (1.14)$$

**Valeurs initiale et finale** Le théorème des valeurs limites permet d'obtenir immédiatement :

$$\begin{aligned} i_3(0) &= sI_3(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} = 2 [A] \\ i_3(\infty) &= sI_3(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = 1 [A] \end{aligned}$$

**Recherche des pôles** Les pôles sont les racines du dénominateur de la fonction-image  $I_3(s)$  qui valent

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -5 \pm j10 \left[ \frac{1}{sec} \right]$$

**Évolution temporelle** Le calcul du courant  $i_3(t)$  se fait en décomposant la fonction  $I_3(s)$  en somme d'éléments simples. Comme il y a trois pôles, la fonction  $I_3(s)$  se décompose en trois termes :

$$I_3(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 5 + j10} + \frac{A_3}{s + 5 - j10} \quad \text{avec} \quad A_2 = A_3^*$$

Les deux dernières fractions se ramènent, par réduction à un même dénominateur commun, à une fraction quadratique de la forme :

$$I_3(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{B(s + 5) + C}{(s + 5)^2 + 10^2}$$

Utilisant le théorème de l'amortissement et le tableau des transformées élémentaires, on en déduit que la forme générale de  $i_3(t)$  est

$$i_3(t) = A_1 + \exp(-5t) \left[ B \cos(10t) + \frac{C}{10} \sin(10t) \right]$$

que l'on écrira de préférence sous la forme équivalente suivante

$$i_3(t) = A_1 + A_{23} \exp(-5t) \cdot \cos(10t + \alpha_{23})$$

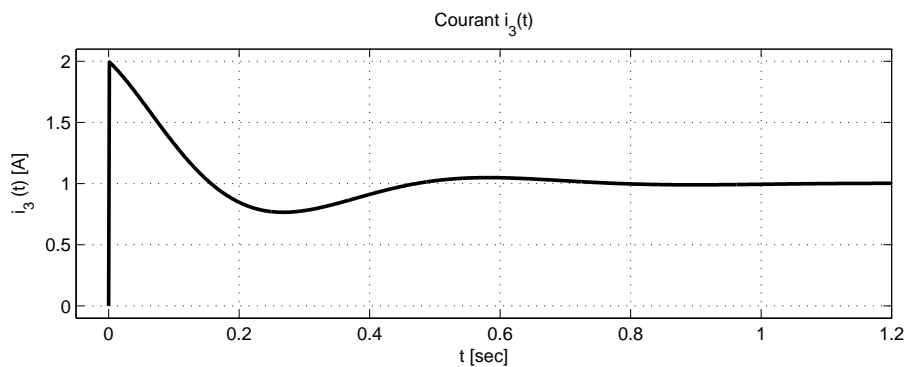


FIG. 1.2: Évolution du courant  $i_3(t)$

Cette forme de  $i_3(t)$  fait apparaître un amortissement de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{5} [sec]$$

et une oscillation de pulsation

$$\omega_p = 10 [rad/sec]$$

Pour obtenir l'expression exacte du courant, il faut encore calculer les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$ . En identifiant les numérateurs de la fonction  $I_3(s)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_3(s) &= \frac{2s^2 + 15s + 125}{s(s^2 + 10s + 125)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B(s + 5) + C}{(s + 5)^2 + 10^2} \\ &= \frac{(A + B)s^2 + (10A + 5B + C)s + 125A}{s(s^2 + 10s + 125)} \end{aligned}$$

d'où

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 0$$

Ce qui permet d'écrire  $I_3(s)$  sous la forme

$$I_3(s) = \frac{1}{s} + \frac{s + 5}{(s + 5)^2 + 10}$$

Ce qui correspond au courant suivant

$$i_3(t) = 1 + \exp(-5t) \cos(10t) \quad (1.15)$$

**Conclusions** Ici également, la dynamique du signal est décrite par les pôles de la fonction-image. On en déduit en particulier :

– la durée du régime transitoire :

$$t_{tr} \approx 5\tau = 5/5 = 1 \text{ [sec]}$$

– la période de l'oscillation amortie :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{10} \approx 0,6 \text{ [sec]}$$

– le nombre de périodes visibles :

$$N_{osc} = \frac{t_{tr}}{T_p} = \frac{1 \text{ sec}}{0,6 \text{ sec}} \simeq 1,6 \text{ périodes}$$

On constate aussi que la présence de deux pôles conjugués complexes conduit à un trinôme s'écrivant sous la forme d'une somme de deux carrés parfaits

$$s^2 + 10s + 125 = (s + 5)^2 + 10^2$$

dans lesquels on trouve les parties réelle et imaginaire de la paire de pôles. On voit donc que la partie réelle des pôles ( $-5$ ) entraîne un amortissement temporel correspondant à une translation dans le domaine complexe. Alors que la partie imaginaire ( $\pm j10$ ) conduit à une oscillation impliquant une somme de deux carrés parfaits dans le domaine complexe.



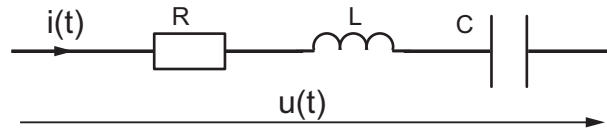


FIG. 1.3: Circuit RLC série

### 1.1.3 Impédances et fonctions de transfert symboliques

Tout circuit constitué de résistances, capacités et inductances peut être modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui représente ainsi un système linéaire et temporellement invariant (LTI).

Dans le cas d'un circuit RLC série à conditions initiales nulles (figure 1.3), l'équation différentielle pour  $t \geq 0$  s'écrit

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.16)$$

Sa transformée de Laplace est

$$U(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

d'où

$$U(s) = \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) = Z(s) I(s) \quad (1.17)$$

On retrouve ici la loi d'Ohm faisant apparaître l'impédance symbolique

$$Z(s) \equiv \frac{U(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (1.18)$$

similaire à l'impédance bien connue en régime sinusoïdal permanent

$$Z(j\omega) \equiv \frac{U(j\omega)}{I(j\omega)} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (1.19)$$

À partir de ceci, on voit que toutes les descriptions de circuits AC possèdent leur équivalent symbolique. En particulier, la règle du diviseur de tension est applicable et permet de calculer les fonctions de transfert de quadripôles

$$\left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \equiv G(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

## 1.2 Réponses temporelles vs pôles et zéros

### 1.2.1 Effets des pôles et zéros

En conclusion des exemples ci-dessus, on retiendra les points suivants :

## 1 ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Une fonction-image  $X(s)$  d'un signal  $x(t)$  s'écrit sous la forme d'un rapport de deux polynômes

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1.20)$$

2. Le *comportement temporel transitoire* est totalement déterminé par les *pôles* de la fonction  $X(s)$  (racines du dénominateur).
3. À *chaque pôle correspond une exponentielle* dont l'exposant est le pôle  $p_k$  multiplié par le temps  $t$ .
4. La forme générale de la fonction temporelle est donc déterminée par les pôles

$$x(t) = \sum A_k \exp(+p_k t) \quad (1.21)$$

5. Les *constantes de temps* dépendent de la *partie réelle* des pôles

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.22)$$

6. Les *périodes des oscillations* sont fixées par la *partie imaginaire* des pôles

$$T_{pk} = \frac{2\pi}{|Im(p_k)|} \quad (1.23)$$

7. Les racines du numérateur de la fonction-image sont appelées les *zéros de la fonction*; leur effet n'intervient qu'au niveau des amplitudes des fonctions temporelles, mais pas du tout sur les paramètres dynamiques.
8. Les *systèmes stables* sont caractérisés par des pôles à *partie réelle négative*.

Une illustration tirée de [2] montre le comportement des systèmes suivant l'emplacement de leurs pôles dans le plan complexe (figure 1.4).

### 1.2.2 Effet des conditions initiales

Considérons comme exemple le circuit RLC série pour lequel les conditions initiales (CI) ne sont pas nulles et calculons l'évolution du courant qui le traverse. Pour  $t \geq 0$ , l'équation différentielle de ce circuit s'écrit

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0)$$

Sa transformée de Laplace vaut

$$U(s) = RI(s) + L(sI(s) - i_L(0)) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_C(0)}{s}$$

Regroupant les facteurs de la fonction  $I(s)$ , on obtient

$$U(s) + L i_L(0) - \frac{u_C(0)}{s} = I(s) \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) = I(s) \frac{1 + sRC + s^2LC}{sC}$$

## 1.2 Réponses temporelles vs pôles et zéros

Type de pôle	Plan complexe $s = \sigma \pm j\omega_0$	Graphe de la réponse impulsionnelle	Remarques
Réel négatif			Asymptotiquement stable
Réel positif			Instable
Nul (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Complexe conjugué Partie réelle négative			Asymptotiquement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 1)			Marginalement stable
Imaginaire conjugué (Multiplicité = 2)			Instable
Complexe conjugué Partie réelle positive			Instable
Nuls (Multiplicité = 2)			Instable

FIG. 1.4: Position des pôles et réponses temporelles [2]

On voit ainsi que les conditions initiales jouent le rôle de sources de tension décrivant l'état du système en l'instant  $t = 0$ . De cette équation, on peut tirer le courant

$$I(s) = \frac{sC}{1 + sRC + s^2LC} U(s) + \frac{sLC i_L(0) - C u_C(0)}{1 + sRC + s^2LC}$$

On constate alors que les dénominateurs des deux fractions sont les mêmes et qu'ils ne dépendent pas des conditions initiales. On en déduit que les pôles de la fonction, donc la dynamique de la réponse temporelle, sont indépendants des conditions initiales. Seules les amplitudes des fonctions temporelles seront modifiées par celles-ci.

Plus généralement, on dira que la réponse d'un système est décrite par la somme de deux termes faisant intervenir le signal d'entrée  $X(s)$ , le système  $G(s) = N(s)/D(s)$  et ses conditions initiales

$$Y(s) = X(s) \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{P(s; CI)}{D(s)} \quad (1.24)$$

où :

- $P(s; CI)$  est un polynôme dont les coefficients dépendent directement des CI et qui s'annule si celles-ci sont nulles ;
- $N(s)$  et  $D(s)$  sont le numérateur et dénominateur de la fonction décrivant le système.

Ce résultat est important car il montre que la connaissance des pôles du système, c'est-à-dire du dénominateur de la fonction  $G(s)$  décrivant le système suffit pour prévoir le comportement temporel de celui-ci.

## 1.3 Analyse d'un système d'ordre 1

### 1.3.1 Fonction de transfert

L'exemple type d'un système d'ordre 1 est le filtre passe-bas RC (figure 1.5). Dans le cas où le courant de sortie du quadripôle RC est nul, le quadripôle est décrit par l'équation différentielle suivante (CI nulle)

$$u_1(t) = R i(t) + u_2(t) \quad \text{avec} \quad u_2(t) = u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.25)$$

La transformation de Laplace de ces deux équations donne

$$U_1(s) = R I(s) + U_2(s) \quad \text{avec} \quad U_2(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

Tirant le courant  $I(s) = sC U_2(s)$  de la deuxième équation et le portant dans la première, il vient

$$U_1(s) = sRC U_2(s) + U_2(s)$$

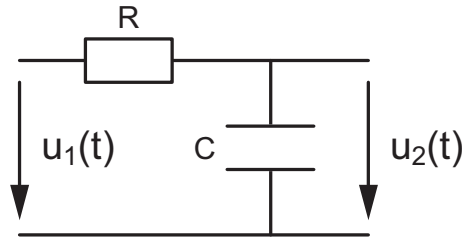


FIG. 1.5: Circuit élémentaire d'ordre 1

Sachant la fonction de transfert d'un quadripôle est définie comme le rapport des tensions sortie/entrée, on retrouve la fonction de transfert bien connue du circuit RC

$$G(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (1.26)$$

dont la constante de temps  $\tau = RC$  détermine la dynamique du circuit.

De manière générale, un système d'ordre 1 est représenté par une fonction de transfert de la forme

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (1.27)$$

dont la description se fera de préférence dans une des deux formes canoniques suivantes

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + \tau_1 s} \quad (\text{forme de Bode}) \quad (1.28)$$

$$G(s) = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + 1/\tau_2}{s + 1/\tau_1} = \frac{b_1}{a_1} \frac{s + \omega_2}{s + \omega_1} \quad (\text{forme de Laplace}) \quad (1.29)$$

avec

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_0} \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{b_1}{b_0}$$

### 1.3.2 Pôle et réponse transitoire

Un tel système possède un pôle et un zéro qui valent

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} \quad z_1 = -\frac{1}{\tau_2} \quad (1.30)$$

La réponse transitoire de ce système est alors décrite par une exponentielle

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} \quad \text{avec} \quad \tau_1 = \frac{1}{|p_1|} \quad (1.31)$$

### 1.3.3 Réponse indicielle

L'image de la réponse indicielle d'un système est décrite par

$$Y(s) = X(s) G(s) \quad \text{avec} \quad X(s) = \frac{1}{s} \quad (1.32)$$

**Cas particulier** Dans le cas d'un simple filtre passe-bas, on a

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} \frac{1}{1 + s\tau} \\ &= \frac{1}{s} \frac{1/\tau}{s + 1/\tau} \\ &= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + 1/\tau} \end{aligned}$$

avec  $A_0 = 1 = -A_1$ . La transformation inverse conduit à l'expression bien connue

$$y(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1.33)$$

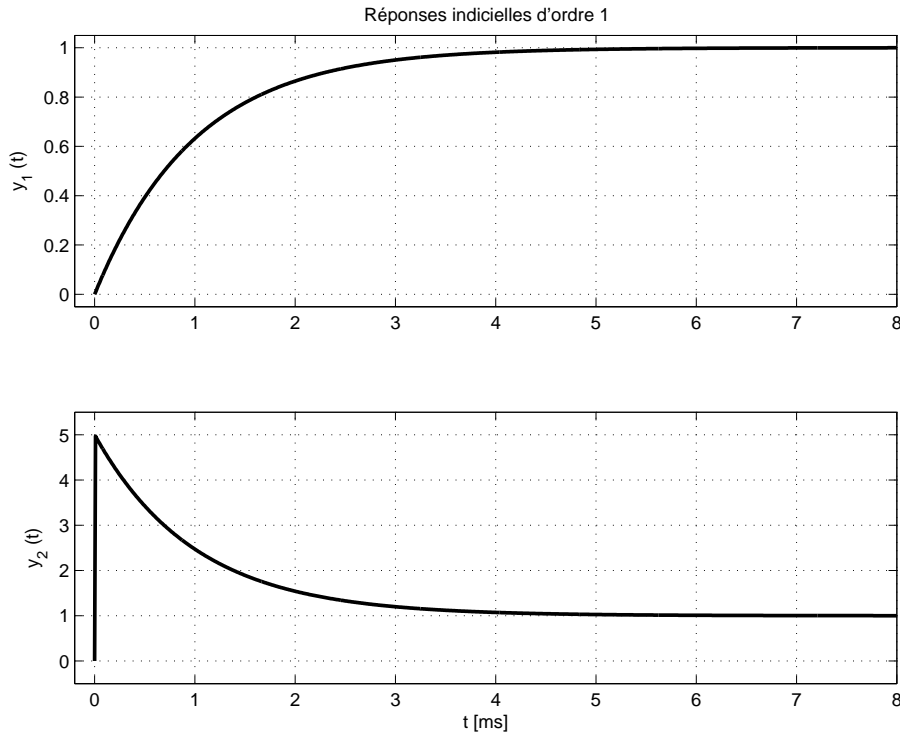


FIG. 1.6: Réponses indicielles de deux systèmes d'ordre 1

**Cas général** Dans le cas d'un système d'ordre 1 quelconque décrit par

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s} \quad (1.34)$$

on peut montrer que, indépendamment de la valeur des coefficients, les réponses indicielles sont telles que

1. L'évolution temporelle est entièrement décrite par

$$y(t) = y(0) + (y(\infty) - y(0)) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad (1.35)$$

2. Le temps pour atteindre la valeur  $y(t)$  vaut

$$t = \tau \ln \left( \frac{y(\infty) - y(0)}{y(\infty) - y(t)} \right) \quad (1.36)$$

3. Le 63% de l'évolution temporelle est réalisée au temps  $t = \tau$  car on a

$$\exp(-t/\tau)|_{t=\tau} = e^{-1} \simeq 0.37 \quad (1.37)$$

4. Le temps de montée défini comme le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la variation  $y(\infty) - y(0_+)$  vaut

$$t_r \equiv t_{90\%} - t_{10\%} = \tau \ln(9) \quad (1.38)$$

Les réponses indicielles de deux systèmes d'ordre 1 décrits par

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + s\tau_1}, \quad G_2(s) = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s\tau_1} \quad \text{avec} \quad \tau_1 = 1 \text{ ms}, \tau_2 = 5 \text{ ms}$$

sont illustrées dans la figure 1.6.

## 1.4 Analyse d'un système d'ordre 2

### 1.4.1 Fonction de transfert

L'exemple type d'un système d'ordre 2 est le filtre passe-bas RL-C (figure 1.7. Dans le cas où le courant de sortie est nul, le quadripôle est décrit par l'équation différentielle suivante (pour laquelle on admet que les CI sont nulles)

$$u_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) \quad (1.39)$$

$$u_2(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (1.40)$$

La transformation de Laplace de ces deux équations donne

$$U_1(s) = RI(s) + sLI(s) + U_C(s)$$

$$U_2(s) = U_C(s) = \frac{I(s)}{sC}$$

Tirant le courant  $I(s) = sC U_2(s)$  de la deuxième équation et le portant dans la première, il vient

$$U_1(s) = sRC U_2(s) + s^2LC U_2(s) + U_2(s)$$

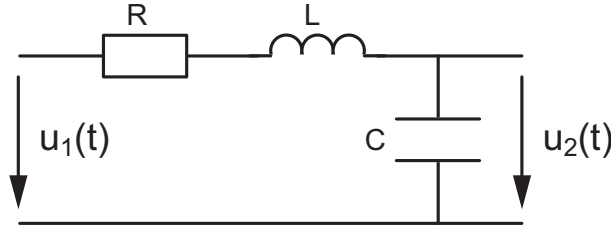


FIG. 1.7: Circuit élémentaire d'ordre 2

Sachant que la fonction de transfert d'un quadripôle est définie comme le rapport des tensions de sortie et d'entrée, on retrouve la fonction de transfert bien connue du filtre passe-bas

$$G(s) \equiv \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} \quad (1.41)$$

Comme un système d'ordre 2 peut représenter autre chose qu'un simple circuit RLC, on préfère travailler avec une expression plus générale pour le dénominateur

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 \quad (1.42)$$

faisant intervenir la pulsation naturelle du système  $\omega_n$  et le facteur de qualité  $Q_0$  ou son inverse, le coefficient d'amortissement

$$\zeta \equiv \frac{1}{2Q_0} \quad (1.43)$$

Ce qui donne

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (1.44)$$

De manière générale, un système d'ordre 2 est représenté par une fonction de transfert de la forme

$$G(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2}{b_0 + b_1s + b_2s^2} \quad (1.45)$$

Pour ce qui suit, on se contentera d'analyser les systèmes de type passe-bas décrits par

$$G(s) = \frac{1}{1 + b_1s + b_2s^2}$$

dont la description se fera dans une des deux formes canoniques suivantes

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{forme de Bode}) \quad (1.46)$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{forme de Laplace}) \quad (1.47)$$



### 1.4.2 Pôles et réponse transitoire

Les pôles d'un système décrit par cette fonction de transfert  $G(s)$  valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\omega_n \left( \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.48)$$

Selon la valeur de  $\zeta$ , on voit que ces pôles peuvent être réels, complexes ou imaginaires. Pour étudier le comportement temporel du système, il faut donc considérer les trois situations suivantes.

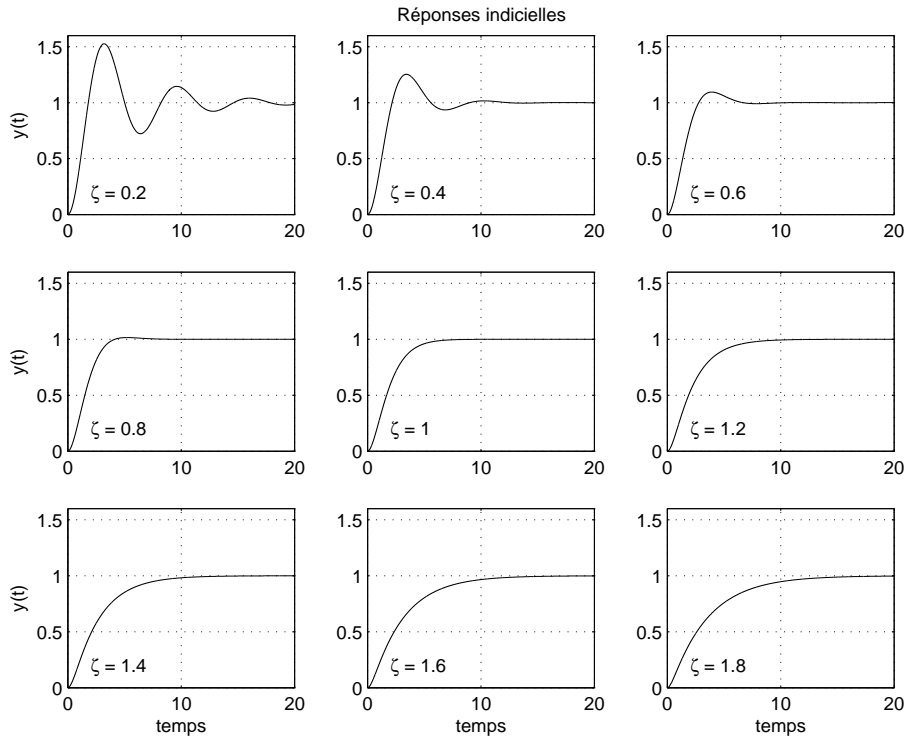


FIG. 1.8: Réponses indicielles d'un système d'ordre 2 en fonction de  $\zeta$

$\zeta > 1$  : **les pôles sont réels distincts** La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_{1,2} = \frac{1}{|p_{1,2}|} \quad (1.49)$$

La durée du régime transitoire  $t_{tr}$  vaut alors

$$t_{tr} \simeq 5 \tau_{max} \quad (1.50)$$

$\zeta = 1$  : **les pôles sont réels confondus** La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau} (1 + A_2 t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{|p_2|} \quad (1.51)$$

Dans ce cas, la durée du régime transitoire vaut

$$t_{tr} \simeq 7 \tau \quad (1.52)$$

$0 \leq \zeta < 1$  : **les pôles sont complexes** La réponse transitoire du système est alors décrite par

$$y_h(t) = A_1 e^{-t/\tau} \cos(\omega_p t + \alpha_1) \quad (1.53)$$

avec

$$\tau = \frac{1}{|Re(p_{1,2})|} = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (1.54)$$

$$\omega_p \equiv \frac{2\pi}{T_p} = |Im(p_{1,2})| = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.55)$$

La durée du régime transitoire et le nombre de périodes visibles valent alors

$$t_{tr} \simeq 5\tau, \quad N_{osc} \simeq \frac{t_{tr}}{T_p} \quad (1.56)$$

Tenant compte de ces expressions, on en déduit que pour les systèmes dont le facteur de qualité est supérieur à 0.5, le nombre de périodes visibles durant la partie transitoire vaut

$$N_{osc} \simeq \frac{5\tau}{T_p} = 5 \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\pi \zeta} = \frac{5}{2\pi} \sqrt{4Q_0^2 - 1} \quad (1.57)$$

Dans le cas où le facteur de qualité est supérieur à 1, le nombre de périodes visibles vaut environ  $1.6Q_0$ .

### 1.4.3 Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

La réponse indicielle d'un système d'ordre 2 est décrite par

$$Y(s) = X(s) G(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.58)$$

L'image de Laplace de la réponse  $y(t)$  possède un pôle  $p_0$  dû au signal appliqué  $x(t) = \epsilon(t)$  et une paire de pôles  $p_{1,2}$  provenant du système  $G(s)$  :

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad p_{1,2} = -\omega_n \left( \zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad (1.59)$$

La figure 1.8 illustre la réponse indicielle d'un système d'ordre 2 pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement  $\zeta$ . Le regroupement de ces réponses sur un seul graphe (figure 1.9 a) permet de mettre en évidence les caractéristiques de la réponse indicielle d'un système d'ordre 2.

**Position des pôles** La figure 1.9 b montre comment les pôles se déplacent dans le plan complexe lorsque  $\zeta$  varie de 0 à l'infini. On peut relever que pour  $0 \leq \zeta \leq 1$ , l'angle  $\psi$  parcouru sur le demi-cercle est tel que  $\sin(\psi) = \zeta$ . Globalement, on peut alors considérer les quatre situations suivantes

1.  $\zeta = 0$  : **les pôles sont imaginaires** ; ils se situent sur l'axe imaginaire en  $\pm j\omega_n$ .

## 1.4 Analyse d'un système d'ordre 2

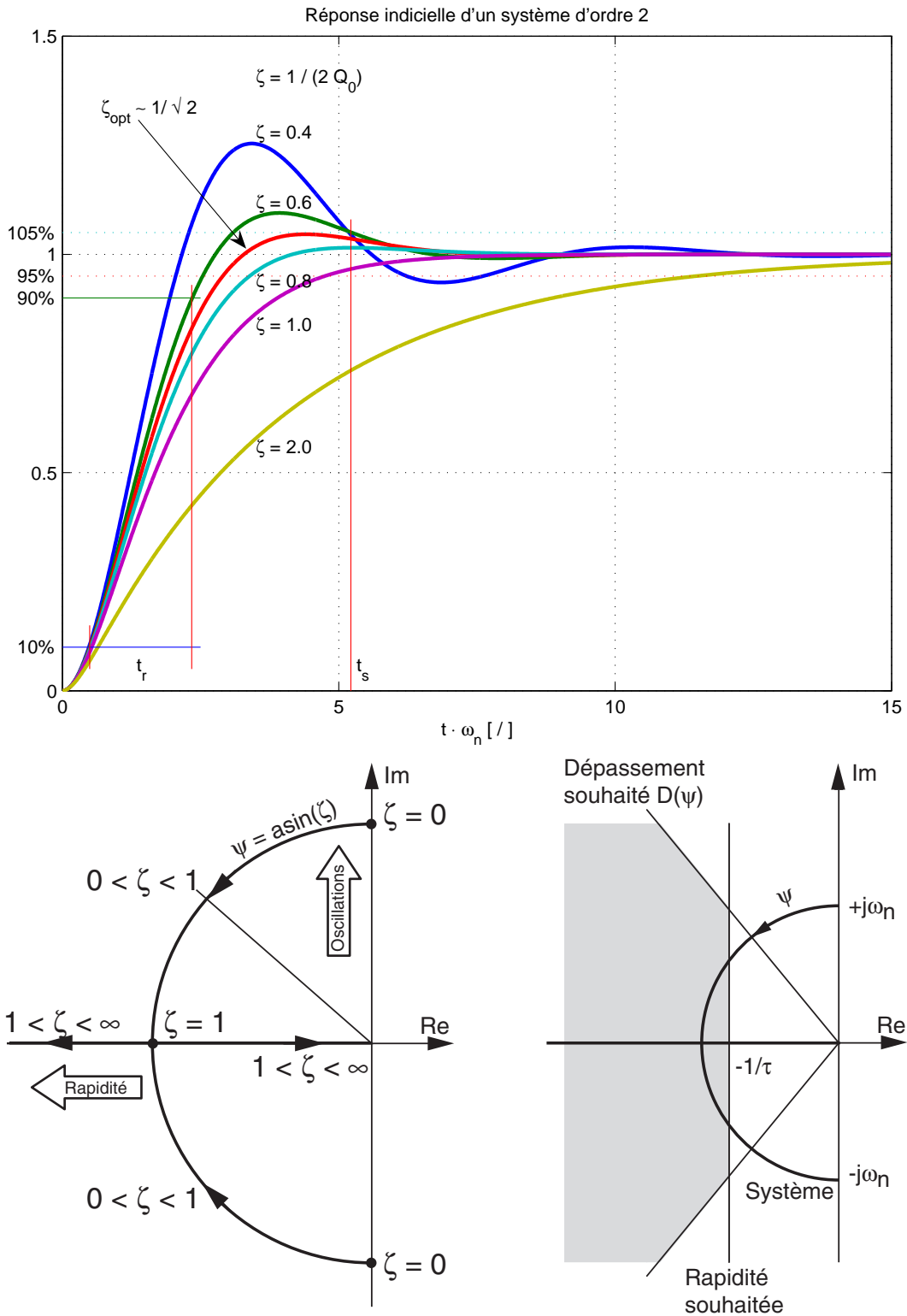


FIG. 1.9: Réponse indicielle et lieu des pôles en fonction de  $\zeta$

2.  $0 < \zeta < 1$  : **les pôles sont complexes** ; ils se déplacent alors sur un demi-cercle de rayon  $\omega_n$ .
3.  $\zeta = 1$  : **les pôles sont réels confondus** ; ils se situent sur l'axe réel en  $-\omega_n$ .
4.  $1 < \zeta < \infty$  : **les pôles sont réels négatifs distincts** ; l'un des deux pôles parcourt l'axe réel négatif de  $-\omega_n$  à  $-\infty$  alors que le deuxième se déplace de  $-\omega_n$  à 0 et ralentit la réponse temporelle.

**Domaine intéressant** Sur la figure 1.9 c, on a représenté dans le plan complexe un domaine délimité par le dépassement  $D$  souhaité (droite inclinée), la constante de temps désirée  $\tau$  (droite verticale) et le lieu des pôles décrivant le système d'ordre 2. Ainsi, la partie grisée correspond-elle à une réponse indicielle dont le dépassement est inférieur à  $D$  et le temps d'établissement  $t_s$  inférieur à  $3\tau$ . On voit que seules certaines valeurs de  $\zeta$  permettent d'atteindre le comportement souhaité.

**Temps caractéristiques** Dans le cas où  $\zeta < 1$  ou, de manière équivalente,  $Q_0 > 0.5$ , ces éléments caractéristiques sont

1. la constante de temps

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (1.60)$$

2. la période d'oscillation

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.61)$$

3. le temps d'établissement à 5% de la valeur asymptotique

$$t_s \equiv t_{(100\pm 5)\%} \simeq 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (1.62)$$

4. la durée du régime transitoire

$$t_{tr} \equiv t_{(100\pm 1)\%} \simeq 5\tau = \frac{5}{\zeta\omega_n} \quad (1.63)$$

5. le nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr}}{T_p} = \frac{5\tau}{T_p} \simeq 1.6 Q_0 \quad (1.64)$$

6. le dépassement qui ne dépend que de  $\zeta < 1$

$$D = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Leftrightarrow \zeta(D) = \frac{|\ln(D)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(D)}} \quad (1.65)$$

7. le temps de montée valant très approximativement

$$t_r \equiv t_{90\%} - t_{10\%} \simeq \frac{1.8}{\omega_n} \quad (1.66)$$

La figure 1.10 montre l'évolution des grandeurs caractéristiques  $t_r$ ,  $t_s$  et  $D$  en fonction de  $\zeta$ . Il est important de noter que le calcul du temps de montée d'un système d'ordre 2 conduit à une équation transcendante et qu'il n'existe donc pas de solution analytique, d'où l'approximation proposée par l'équation (1.66).

## 1.5 Réponses temporelles des circuits linéaires

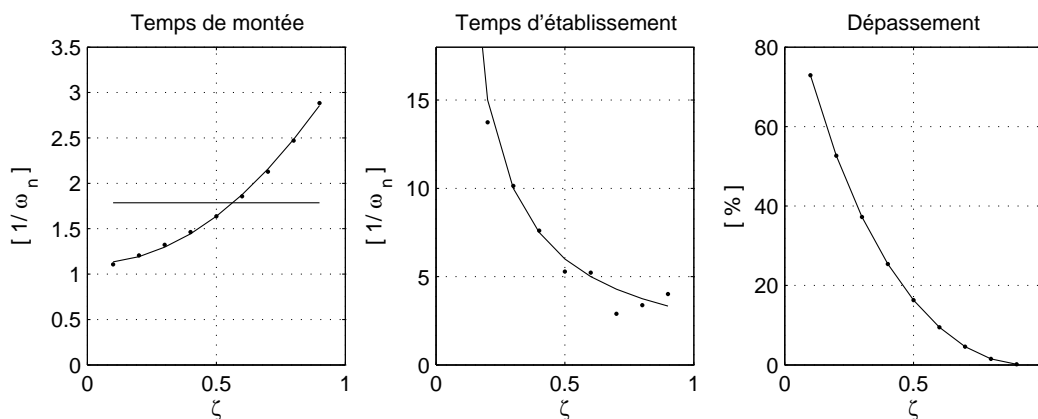


FIG. 1.10: Temps de montée, d'établissement à 5% et dépassement en fonction de  $\zeta$

**Réponse optimum** Dans la mesure où l'on recherche une réponse atteignant rapidement sa valeur asymptotique, la figure 1.9 a montré qu'un compromis raisonnable entre le temps de montée  $t_r$ , le dépassement  $D$  et le temps d'établissement  $t_s$  est obtenu lorsque  $\zeta \simeq 0.7$ . Pour cette valeur particulière de  $\zeta$ , on obtient

$$\left. \begin{array}{l} t_r \simeq \frac{2.1}{\omega_n} \\ t_s \simeq \frac{3}{\omega_n} \\ D \simeq 5\% \end{array} \right\} \text{ lorsque } \zeta \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.7 \quad (1.67)$$

## 1.5 Réponses temporelles des circuits linéaires

On notera en préambule que les principes présentés ci-après dans le cadre de circuits électriques sont tout à fait généraux et applicables à n'importe quel système linéaire et temporellement invariant.

### 1.5.1 Représentation des quadripôles

Un quadripôle est décrit complètement par des deux grandeurs d'entrée ( $u_1(t)$ ,  $i_1(t)$ ) et ses deux grandeurs de sortie ( $u_2(t)$ ,  $i_2(t)$ ). Après transformation de Laplace, on obtient les images des tension et courant d'entrée  $U_1(s)$  et  $I_1(s)$ , et des tension et courant de sortie  $U_2(s)$  et  $I_2(s)$  qui permettront de représenter le circuit par la fonction de transfert  $Q(s)$  (figure 1.11).

Le plus souvent, on se contente de caractériser un quadripôle par le rapport des tensions d'entrée et de sortie :

$$G(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.68)$$

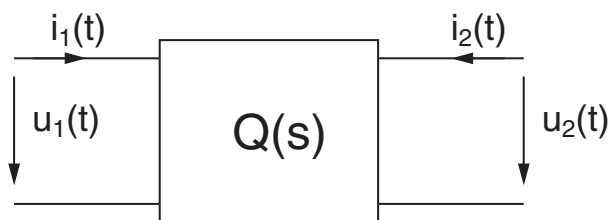


FIG. 1.11: Quadripôles et ses signaux d'entrée et de sortie

Cependant et plus généralement, ce sont six relations qui peuvent être définies entre les signaux d'entrée et de sortie :

– l'impédance d'entrée

$$Z_{in}(s) \equiv \left. \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.69)$$

– le gain en tension

$$A_U(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.70)$$

– le gain en courant

$$A_I(s) \equiv \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.71)$$

– la transimpédance

$$Z_m(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (1.72)$$

– la transconductance

$$Y_m(s) \equiv \left. \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (1.73)$$

– l'impédance de sortie

$$Z_{out}(s) \equiv \left. \frac{U_2(s)}{-I_2(s)} \right|_{U_1=0} \quad (1.74)$$

### 1.5.2 Pôles d'un système et réponse temporelle

Considérons l'entrée  $x(t)$  (un courant ou une tension) d'un quadripôle et  $y(t)$  sa réponse (également un courant ou une tension) ainsi que  $Q(s)$  une des six représentations du circuit. On a alors

$$Y(s) = X(s) Q(s) + \frac{P(s; CI)}{D(s)} \quad (1.75)$$

où  $P(s; CI)$  est un polynôme en  $s$ , dont les coefficients sont déterminés par les conditions initiales, et  $D(s)$  est le dénominateur de  $Q(s)$ . Les pôles associés à  $Y(s)$  proviennent du système  $Q(s)$  (régime transitoire) et du signal d'entrée  $X(s)$  (régime forcé).

## 1.5 Réponses temporelles des circuits linéaires

Dans le cas où les pôles ne sont pas confondus, la réponse temporelle  $y(t)$  est alors la somme des fonctions temporelles décrivant le régime transitoire (dicté par  $Q(s)$ ) et le régime forcé (dicté par  $X(s)$ )

$$y(t) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(p_m t) + \sum_{n=1}^N B_n \exp(p_n t) \quad (1.76)$$

où les  $p_m$  sont les  $M$  pôles de  $Q(s)$  et les  $p_n$  sont les  $N$  pôles de  $X(s)$ .

### 1.5.3 Évaluation du comportement temporel

Pour évaluer le comportement temporel d'un système à CI nulles décrit par sa fonction de transfert générale  $Q(s)$ , il suffit d'appliquer les étapes suivantes.

1. Rechercher l'image  $X(s)$  du signal d'entrée et la représentation  $Q(s)$  souhaitée du système. Le signal de sortie est alors décrit par

$$Y(s) = X(s) Q(s) \quad (1.77)$$

2. Calculer les valeurs asymptotiques du signal de sortie

$$y(t \rightarrow 0_+) = s Y(s)|_{s \rightarrow \infty} \quad (1.78)$$

$$y(t \rightarrow \infty) = s Y(s)|_{s \rightarrow 0} \quad (1.79)$$

3. Rechercher les pôles de  $Y(s)$ , c'est-à-dire les racines de  $D(s)$ . On en déduira alors que le système est

- a) **stable** si tous les pôles sont à **parties réelles négatives** ;
- b) **marginalelement stable** s'il y a une paire de pôles purement **imaginaires** ou un pôle **nul** alors que les autres sont à parties réelles négatives ;
- c) **instable**, s'il y a un pôle à **partie réelle positive**.

4. Calculer les paramètres dynamiques de la réponse temporelle en considérant

- a) pour chaque pôle réel  $p_k$

- i. la constante de temps

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.80)$$

- ii. la durée du régime transitoire du pôle  $p_k$

$$t_{tr,k} = 5\tau_k \quad (1.81)$$

- b) pour chaque paire de pôles complexes  $p_k$

- i. la constante de temps de l'amortissement

$$\tau_k = \frac{1}{|Re(p_k)|} \quad (1.82)$$

ii. la période de l'oscillation

$$T_k = \frac{2\pi}{|Im(p_k)|} \quad (1.83)$$

iii. la durée de l'oscillation

$$t_{tr,k} = 5\tau_k \quad (1.84)$$

iv. le nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr,k}}{T_k} \quad (1.85)$$

5. Evaluer la durée du régime transitoire

$$t_{tr} \simeq 5 \max \{\tau\} \quad (1.86)$$

Dans le cas (plutôt rare) où l'on souhaite obtenir l'expression exacte de  $y(t)$ , il faut décomposer  $Y(s)$  en somme de fractions simples, puis calculer les valeurs de chacun des coefficients correspondants. La réponse  $y(t)$  est alors la somme des fonctions temporelles correspondant à chacune des fractions simples.

### 1.5.4 Exemple

On considère ici la mise en cascade d'un filtre passe-bas d'ordre 1 suivi d'un filtre passe-bande d'ordre 2. Admettant que l'ensemble est décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{1}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s} \frac{0.3 \cdot 10^{-4}s}{1 + 0.3 \cdot 10^{-4}s + 1 \cdot 10^{-8}s^2}$$

on se propose d'évaluer la réponse indicielle de ce système d'ordre 3 dont les CI sont admises nulles.

En suivant les étapes proposées ci-dessus, on trouve :

1. L'image  $Y(s)$  du signal de sortie décrit par une fonction d'ordre 4

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s} \frac{0.3 \cdot 10^{-4}s}{1 + 0.3 \cdot 10^{-4}s + 1 \cdot 10^{-8}s^2}$$

2. Les valeurs asymptotiques de  $y(t)$

$$y(t \rightarrow 0_+) = sY(s)|_{s \rightarrow \infty} = \frac{\infty}{\infty^3} = 0$$

$$y(t \rightarrow \infty) = sY(s)|_{s \rightarrow 0} = \frac{0}{1} = 0$$

3. Les pôles et zéros de  $Y(s)$  au nombre de 4 et 1, respectivement

$$\begin{array}{ll} p_0 = 0 & \text{dû au signal d'entrée} \\ p_1 = -1000 [1/sec] & \text{dû au filtre passe-bas} \\ p_{2,3} = -1500 \pm j9887 [1/sec] & \text{dus au filtre passe-bande} \\ z_1 = 0 & \text{dû au filtre passe-bande} \end{array}$$



Comme tous les pôles du filtre sont à partie réelle négative, on en déduit que celui-ci est stable et que la réponse temporelle est décrite par

$$y(t) = A_0 + A_1 \exp(-1000t) + A_2 \exp(-1500t) \cos(9887t + \alpha_2)$$

On notera que le pôle  $p_0$ , dû au signal d'entrée, est compensé par le zéro  $z_1$  du filtre passe-bande (mathématiquement, les termes en  $s$  du numérateur et du dénominateur se simplifient) et conduit ainsi à l'annulation de la constante  $A_0$ .

4. Les paramètres dynamiques fixés par

a) le pôle réel  $p_1$  qui donne la constante de temps

$$\tau_1 = \frac{1}{|Re(p_1)|} = 1 [ms]$$

et une durée de l'exponentielle amortie valant  $t_{tr1} \simeq 5 \tau_1 = 5 [ms]$

b) la paire de pôles complexes conjugués  $p_{2,3}$  qui conduit à

i. un amortissement de constante de temps

$$\tau_{23} = \frac{1}{|Re(p_{2,3})|} = 0.667 [ms]$$

ii. une oscillation de période

$$T_{23} = \frac{2\pi}{|Im(p_{2,3})|} = 0.635 [ms]$$

iii. une oscillation de durée

$$t_{tr,23} = 5\tau_{23} = 3.3 [ms]$$

iv. un nombre de périodes visibles

$$N_{osc} = \frac{t_{tr,23}}{T_{23}} = \frac{3.3 [ms]}{0.635 [ms]} \simeq 5.2$$

5. La durée du régime transitoire

$$t_{tr} \simeq 5 \max\{\tau_k\} = 5 \cdot 1 [ms] = 5 [ms]$$

La réponse indicielle  $y(t)$  de ce filtre est présentée à la figure 1.12 avec les contributions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  dues, respectivement, aux pôles  $p_1$  et  $p_{2,3}$ .

## 1.6 Réponse impulsionnelle d'un système

Pour des raisons de simplicité de description ou d'analyse, on étudie souvent les signaux et systèmes dans le domaine fréquentiel. Cependant, ceux-ci évoluent toujours dans le domaine temporel et leurs réponses physiques sont toujours temporelles.

Parmi celles-ci, on distingue plus particulièrement les suivantes :

- la réponse sinusoïdale due à un signal d'entrée en régime sinusoïdal permanent ;
- la réponse indicielle due à un saut unité appliqué à l'entrée du système ;
- la réponse impulsionnelle consécutive à l'application d'un signal purement théorique non réalisable, l'impulsion de Dirac.

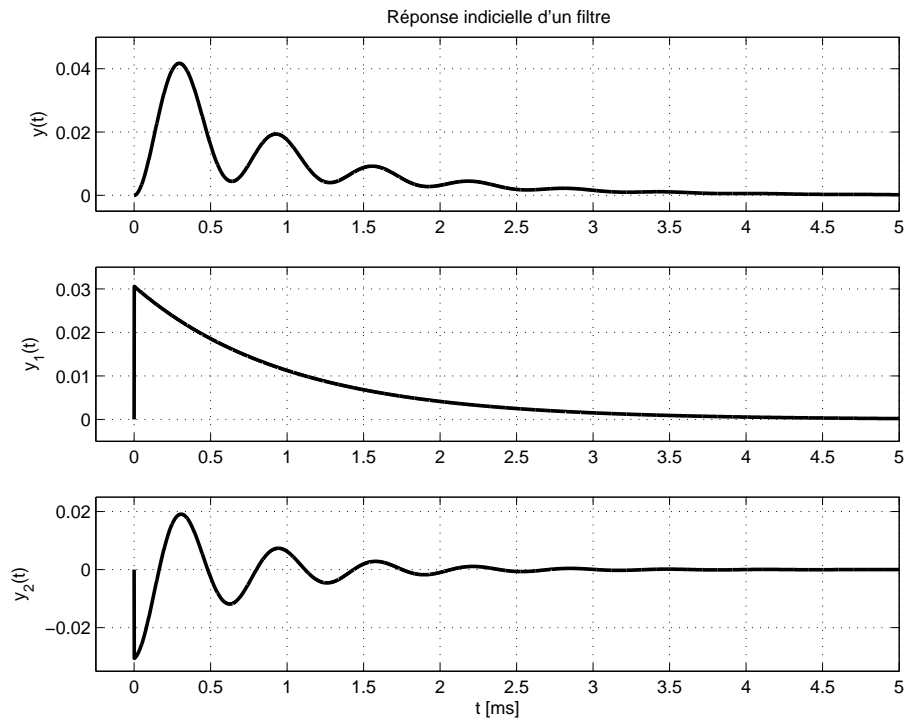


FIG. 1.12: Réponse indicielle  $y(t)$  d'un filtre passe-bande et ses deux composantes temporelles  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$

### 1.6.1 Remarques concernant l'impulsion de Dirac

#### Définition

L'impulsion de Dirac est définie comme une impulsion d'amplitude infinie, de largeur infiniment petite et de surface unité. Mathématiquement, cela revient à la décrire comme suit

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.87)$$

#### Valeur instantanée d'une fonction

L'utilisation de l'impulsion de Dirac permet de calculer la valeur instantanée d'une fonction par l'intermédiaire de l'intégrale suivante :

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1.88)$$

En effet, si la fonction  $f(t)$  est continue aux environs de  $t_0$ , le produit  $f(t) \delta(t - t_0)$  est nul partout sauf en  $t_0$ ; on peut donc remplacer  $f(t)$  par sa valeur en  $t_0$ ,  $f(t_0)$ . L'intégrale s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

puisque, par définition, l'impulsion de Dirac possède une surface unité.

De l'équation 1.88, on déduit les résultats intéressants suivants

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta - t) d\theta \quad (1.89)$$

$$f(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta - (t - t_0)) d\theta \quad (1.90)$$

Ces deux équations portent le nom d'intégrale de convolution que l'on écrit symboliquement sous la forme

$$f(t) = f(t) \otimes \delta(t) \quad (1.91)$$

$$f(t - t_0) = f(t) \otimes \delta(t - t_0) \quad (1.92)$$

On remarque ainsi que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution.

### Poids d'une impulsion de Dirac

En pratique, la surface d'une impulsion de Dirac n'est que rarement égale à l'unité ; de plus, si l'impulsion est une tension électrique, sa surface se mesure en [V sec]. Cette dernière est souvent désignée par *le poids de l'impulsion de Dirac*. On remarque ainsi que, lorsque l'on parle abusivement de "l'amplitude" d'une impulsion de Dirac, il s'agit en réalité de son poids, donc de sa surface.

## 1.6.2 Réponse impulsionnelle

Mathématiquement, la réponse impulsionnelle d'un système s'obtient par transformation inverse de sa fonction de transfert

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (1.93)$$

En effet,  $h(t)$  est bien la réponse du système à l'application d'une impulsion de Dirac  $x(t) = \delta(t)$  car on a

$$Y(s) = X(s) H(s) = 1 \cdot H(s) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = 1 \cdot h(t) = h(t)$$

Pratiquement, on ne peut pas réaliser une impulsion de Dirac ; on ne peut que l'approcher avec, par exemple, une impulsion rectangulaire de durée très courte par rapport aux constantes de temps du système. De plus, il faudrait que son amplitude soit suffisamment grande pour obtenir une action notable sur le système mais alors celui-ci risque de saturer.

Considérons donc, pour saisir concrètement ce qui se passe dans un système, une impulsion réelle de durée  $\Delta t$  suffisamment petite et d'amplitude  $E$  que l'on applique à un circuit électrique d'ordre 2 à l'état d'équilibre nul.

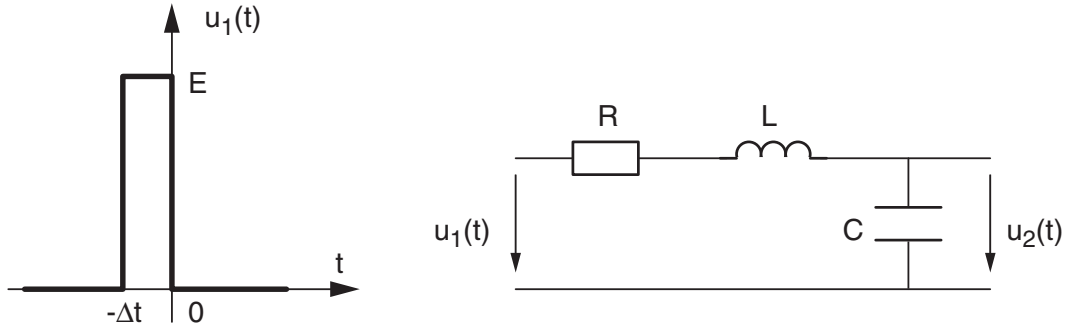


FIG. 1.13: Impulsion rectangulaire appliquée à un circuit RL-C

Si la durée de l'impulsion est très petite, le condensateur n'a pas le temps de se charger de manière appréciable. On peut alors considérer que le circuit est constitué de la résistance et de l'inductance seulement et qu'il est parcouru par le courant

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t + \Delta t}{\tau}\right) \right), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Comme la durée de l'impulsion est très courte, on peut remplacer l'exponentielle par son approximation linéaire et l'on obtient

$$i(t) \simeq \frac{E}{R} \left( 1 - \left( 1 - \frac{t + \Delta t}{\tau} \right) \right) = \frac{E}{R} \left( \frac{t + \Delta t}{\tau} \right), \quad -\Delta t \leq t \leq 0$$

Au moment où l'impulsion revient à zéro en l'instant  $t = 0$ , le courant qui a pris naissance dans le circuit vaut donc

$$i(0) \simeq \frac{E}{R} \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{E}{R} \frac{\Delta t}{L/R} = \frac{E}{L} \Delta t$$

Ainsi, pour  $t > 0$ , la tension appliquée au circuit est nulle alors que le courant  $i(t)$  ne l'est pas. On doit donc calculer un circuit à tension d'entrée nulle mais à conditions initiales non nulles :

$$i_0 = i_L(0) = \frac{E}{L} \Delta t \quad u_C(0) = 0 \quad (1.94)$$

L'équation différentielle pour  $t \geq 0$  s'écrit donc :

$$u_1(t) = 0 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_C(0) \quad (1.95)$$

En transformant de Laplace et tenant compte des conditions initiales, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= RI(s) + L(sI(s) - i_L(0)) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{u_C(0)}{s} \\ &= \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) - Li_0 \\ &= \left( R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) - E\Delta t \end{aligned}$$

Le courant circulant dans le circuit vaut donc :

$$I(s) = \frac{sC}{1 + sRC + s^2LC} E\Delta t \quad (1.96)$$

et la tension de sortie, prise aux bornes du condensateur, s'écrit :

$$U_2(s) = \frac{I(s)}{sC} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} E\Delta t \quad (1.97)$$

On retrouve, dans cette expression, la fonction de transfert  $H(s)$  du circuit :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} \quad (1.98)$$

**Conclusion** On a ainsi trouvé le résultat important suivant : si l'impulsion est suffisamment brève, la tension de sortie  $U_2(s)$  est proportionnelle à la fonction de transfert du circuit et à la surface de l'impulsion :

$$U_2(s) = E\Delta t \cdot H(s) \quad (1.99)$$

On peut montrer de manière générale que ceci est vrai quelle que soit la forme de l'impulsion à condition que sa durée soit négligeable par rapport aux temps caractéristiques du circuit.

On obtient alors le résultat général suivant :

$$U_2(s) = H(s) \int_{-\Delta t}^0 u_1(t) dt \quad \text{si } \Delta t \ll \tau_{min} \quad (1.100)$$

qui, après transformation inverse, s'écrit également :

$$u_2(t) = h(t) \cdot \int_{-\Delta t}^0 u_1(t) dt \quad (1.101)$$

avec, comme on l'a vu

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (1.102)$$

L'intérêt porté à la réponse impulsionnelle d'un système est dû au fait que cette réponse représente uniquement le système, indépendamment de la forme du signal d'entrée si celui est de durée suffisamment courte.

Il ne faut cependant pas oublier qu'une impulsion de courte durée ne fournit au système qu'une énergie très faible. L'amplitude du signal de sortie, qui a une durée beaucoup plus importante, sera donc beaucoup plus petite que l'amplitude du signal d'entrée. On court ainsi le risque de devoir mesurer un signal fortement entaché par le bruit de mesure.

## 1.7 Produit de convolution

Dans l'analyse des systèmes linéaires, les réponses temporelles sont souvent étudiées en passant par la résolution des équations différentielles ou l'utilisation de la transformation de Laplace ; c'est-à-dire que l'analyse et la résolution se font dans un espace autre que le domaine temporel.

Or, ainsi qu'on va le voir à l'aide d'un diagramme, le produit de convolution permet de calculer la réponse  $y(t)$  d'un système à un signal quelconque  $x(t)$  en restant dans l'espace temps. Ceci est très important pour les applications temps réel réalisées à l'aide d'un processeur numérique par exemple.

### 1.7.1 Réponse temporelle des systèmes linéaires

Considérons pour cela un système linéaire et temporellement invariant auquel on applique une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . La réponse à ce signal est la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système (figure 1.14 a). Elle représente ce dernier de manière complète, comme le font la fonction de transfert  $H(s)$  ou l'équation différentielle.

Puisque le système est temporellement invariant, le décalage de l'impulsion d'une valeur  $t_d$ , entraînera le même décalage de la réponse impulsionnelle qui vaut alors  $h(t - t_d)$  (figure 1.14 b).

Comme le système est également linéaire, une modification de l'amplitude de l'impulsion de Dirac entraînera une modification de l'amplitude de la réponse impulsionnelle : à un signal d'entrée  $x(\theta) \cdot \delta(t - \theta)$ , le système répondra par  $x(\theta) \cdot h(t - \theta)$  (figure 1.14 c).

Nous avons vu au paragraphe précédent que le signal d'entrée  $x(t)$  peut être décrit à l'aide d'une somme d'impulsions de Dirac :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \delta(t - \theta) d\theta$$

Donc, comme le système est linéaire, la réponse à cette somme d'impulsions est la somme des réponses impulsionnelles (figure 1.14d) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

**Ce résultat est important parce qu'il permet de calculer directement la réponse  $y(t)$  à partir du signal d'entrée  $x(t)$  et la représentation du système  $h(t)$ .** Cette expression porte le nom de produit de convolution.

Un changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif. On a alors :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) h(t - \theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta \quad (1.103)$$

Le produit de convolution est souvent écrit sous la forme symbolique suivante :

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t)$$

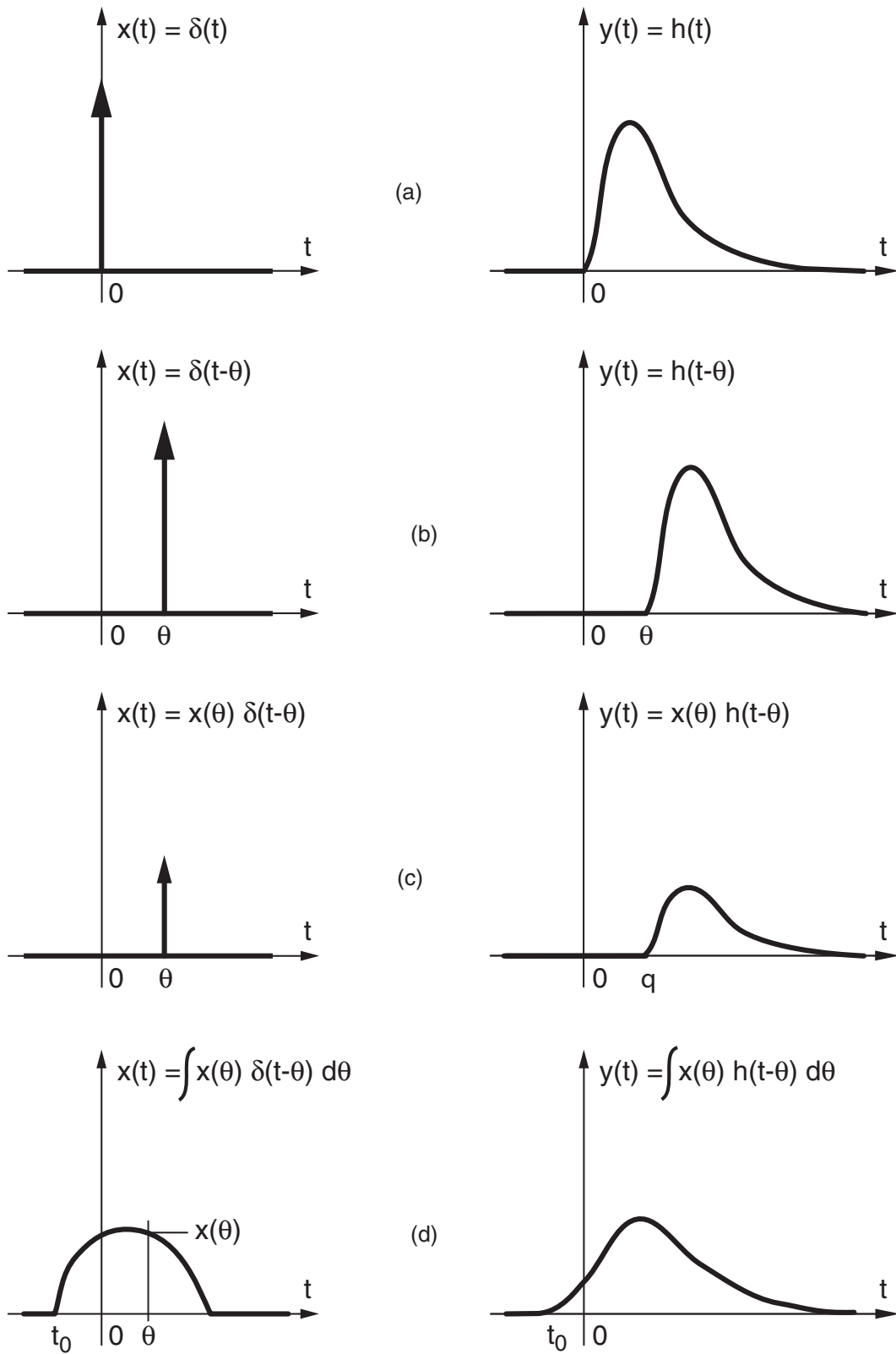


FIG. 1.14: Calcul d'un signal à l'aide du produit de convolution

### 1.7.2 Réponse d'un système causal

Dans le cas fréquent où le signal  $x(t)$  est appliqué en l'instant  $t = 0$  et que le système est causal, c'est-à-dire que sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  est nulle pour  $t < 0$ , le produit de convolution s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta = \int_0^t x(t - \theta) h(\theta) d\theta \quad (1.104)$$

Pour calculer  $y(t)$  à l'aide de la première de ces deux équations, il faut réaliser les opérations successives suivantes (figure 1.15) :

1. retourner la réponse impulsionnelle autour de l'ordonnée pour obtenir  $h(-\theta)$
2. décaler  $h(-\theta)$  d'une valeur égale à  $t$ ; ce qui donnera  $h(t - \theta)$
3. multiplier cette fonction  $h(t - \theta)$  par le signal d'entrée  $x(\theta)$
4. intégrer le résultat de ce produit entre 0 et  $t$ .

Cette démarche peut être illustrée en considérant la réponse indicielle bien connue d'un filtre passe-bas RC dont la fonction de transfert vaut :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + 1/RC}$$

Sa réponse impulsionnelle est obtenue par transformation inverse de Laplace :

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \varepsilon(t)$$

L'illustration des deux approches de la convolution est donnée à la figure 1.15. On y voit, en (a) les signaux originaux  $x(\theta)$  ou  $h(\theta)$ , en (b) leur retournement, en (c) leur décalage et en (d) leur produit. La surface sous cette dernière courbe (son intégrale) représente le signal de sortie  $y(t)$ .

Une deuxième illustration du calcul de la réponse indicielle d'un système linéaire est donnée dans la figure 1.16. Les signaux représentés sont dans l'ordre : le saut unité appliqué à l'entrée, la réponse impulsionnelle d'un circuit RL-C passe-bas et le retournement du saut unité, le produit  $h(\theta)x(t - \theta)$  représenté par l'enveloppe de la surface noire, la valeur de cette surface en chaque instant.

### 1.7.3 Convolution numérique

Comme on l'a déjà dit, le produit de convolution est nécessaire pour calculer une réponse temporelle sans devoir passer par la résolution des équations différentielles ; la connaissance de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  suffit. Si cette démarche est peu utilisée, c'est simplement parce que le calcul analytique de cette intégrale est souvent peu aisé.

Par contre, dans le cas où on désire calculer numériquement la réponse d'un système, le produit de convolution se prête parfaitement au calcul de celle-ci. Il suffit pour cela de remplacer l'intégrale par une somme et la limite d'intégration supérieure par



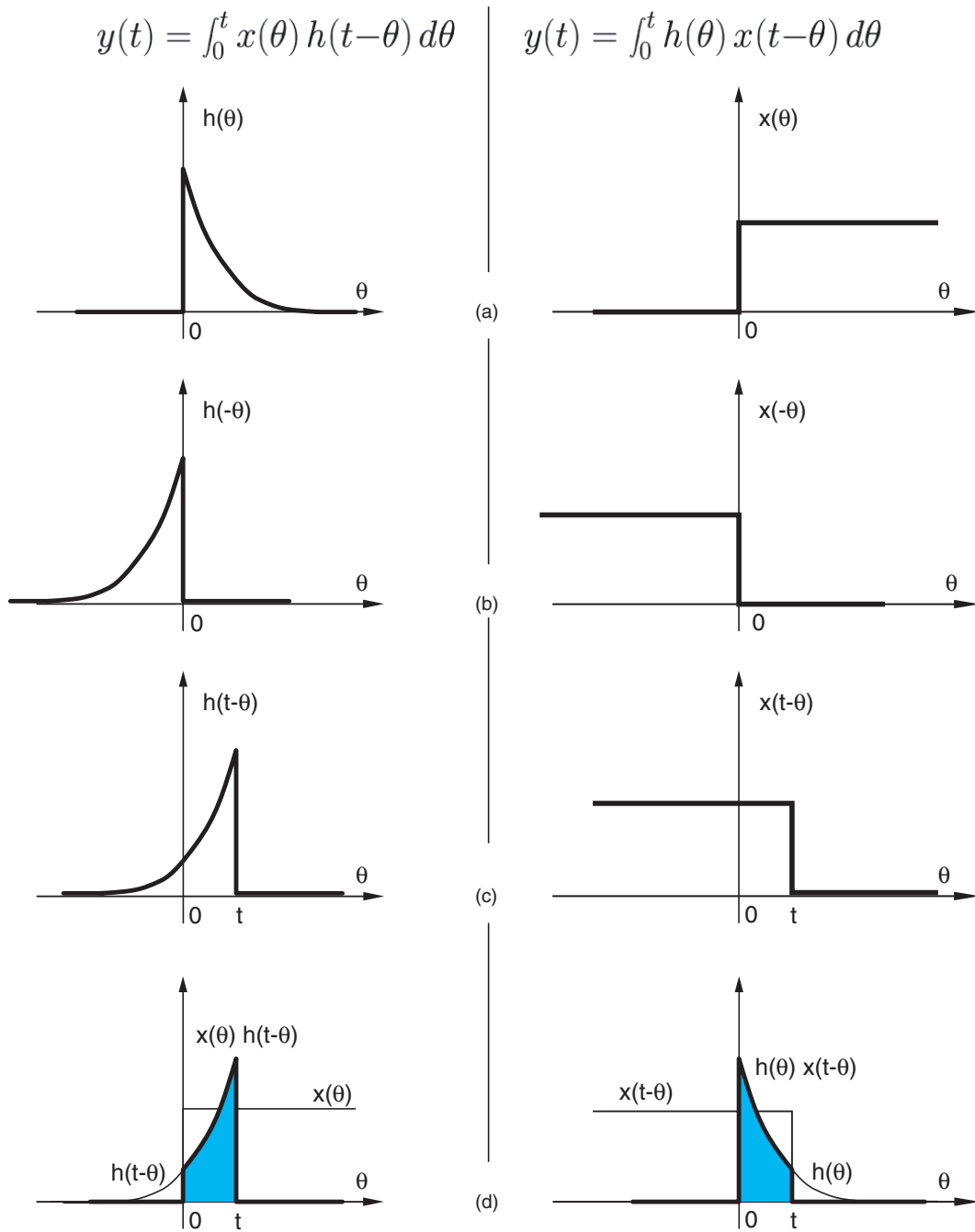


FIG. 1.15: Convolution de deux signaux

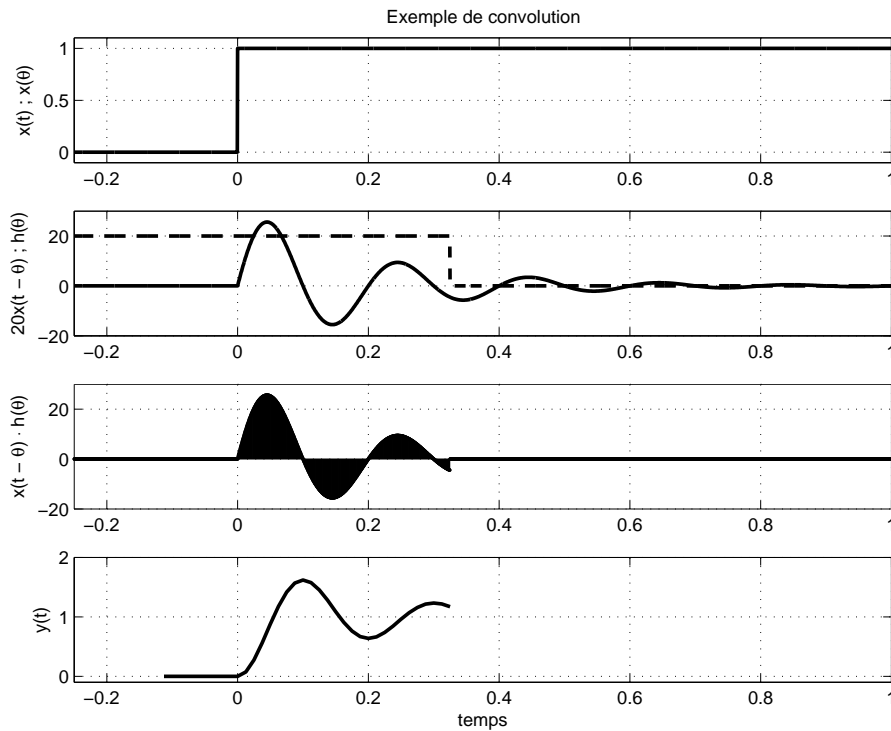


FIG. 1.16: Exemple de convolution

une valeur finie suffisamment grande pour que la réponse impulsionnelle puisse être considérée nulle. Ainsi, dans le cas où  $x(t < 0) = 0$  et  $h(t > t_{max}) \simeq 0$ , on obtient :

$$y(t) = \int_0^t x(t - \theta) h(\theta) d\theta \simeq \int_0^{t_{max}} x(t - \theta) h(\theta) d\theta$$

En considérant que les signaux temporels  $x(\theta)$  et  $h(\theta)$  sont échantillonnés avec une période  $\Delta t$  pendant une durée finie allant de 0 à  $t_{max}$ , le calcul de  $y(t)$  peut alors se faire comme suit :

$$y[n] \simeq \sum_{k=0}^{k_{max}} x[n - k] h[k] \Delta t \quad (1.105)$$

Ce qui, algorithmiquement, se traduit par les quelques lignes de code suivantes :

```

deltaT = tmax / kmax ;
for n = 0 to kmax
do begin
convol = 0.0 ;
for k = 0 to kmax
do begin
convol = convol + x[n-k] * h[k] ;
end ;
y[n] = convol * deltaT ;
end ;

```

## 1.8 Exercices

**Remarque** Pour tous les exercices qui suivent, on admettra implicitement, sauf précision contraire, que les conditions initiales sont nulles.

**TL 1** Pour chacun des deux systèmes décrits par les équations différentielles suivantes

$$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 24y(t) = 5\dot{x}(t) + 3x(t)$$

$$6\dot{y}(t) + 11y(t) + \int (y(t) - x(t)) dt = x(t)$$

calculez leur fonction de transfert.

**TL 2** Considérant les systèmes décrits par les fonctions de transfert suivantes

$$H_1(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 8}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1s + 3}$$

retrouvez leur équation différentielle.

**TL 3** Pour chacun des systèmes décrits par les fonctions de transfert suivantes

$$H_1(s) = \frac{s - 5}{s^2 + 3s + 8}$$

$$H_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 2s^2 + 1s + 3} = \frac{s^2 + 3s + 5}{(s + 2.17)(s^2 - 0.174s + 1.38)}$$

$$H_3(s) = \frac{5s^2 + 7s + 2}{s^2 - 3s + 5}$$

dessinez leurs pôles et zéros dans le plan complexe. Déterminez s'ils sont stables ou non ; justifiez vos réponses.

**TL 4** Pour chacune des fonctions de transfert  $H_k(s)$  ci-après,

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + s/1000} \quad H_2(s) = \frac{s}{s + 1000}$$

$$H_3(s) = \frac{5}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \quad H_4(s) = \frac{1 + 4 \cdot 10^{-6}s^2}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

$$H_5(s) = \frac{10e^{-3}s}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \quad H_6(s) = \frac{s + 200}{s + 50} \frac{5}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

$$H_7(s) = \frac{1}{1 - 5 \cdot 10^{-4}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2}$$

## 1 ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. calculez leurs pôles et zéros et dessinez leur position dans le plan complexe ;
2. calculez la réponse indicielle  $U_2(s)$  et donnez son expression générale  $u_2(t)$  ;
3. calculez les valeurs initiale et finale de  $u_2(t)$  ;
4. quelle sera la durée de la réponse transitoire et, s'il y a lieu, le nombre de périodes visibles ?
5. esquissez chacune de ces réponses indicielles.

**TL 5** On applique à un circuit RC passe-bas une rampe de pente constante  $a$  ;

1. montrez qu'après le régime transitoire la sortie suit l'entrée avec un décalage égal à la constante de temps  $\tau = RC$  ;
2. esquissez la réponse à cette rampe.

**TL 6** On peut montrer qu'un filtre passe-bas d'ordre 2 à pôles complexes ( $\zeta < 1$ ) suit une rampe appliquée en entrée avec un décalage  $2\zeta/\omega_n$ . Admettant que ce circuit est réalisé avec  $R = 500 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \text{ nF}$ ,

1. dessinez le schéma du circuit ;
2. calculez  $t_{tr}$  et  $N_{osc}$  ?
3. esquissez la réponse au signal  $u_1(t)$  de la figure 1.17 lorsque  $t_0 = 10 \mu s$ .

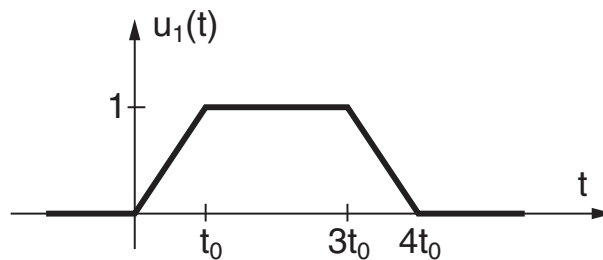


FIG. 1.17: Ex. TL 6

**TL 7** Considérant le circuit  $R - L // C$  de la figure 1.18,

1. de quel type de filtre s'agit-il ?
2. écrivez les équations temporelles reliant  $u_2(t)$  à  $u_1(t)$  pour  $t \geq 0$  (CI nulles) ;
3. à partir de celles-ci, recherchez la fonction de transfert du circuit.

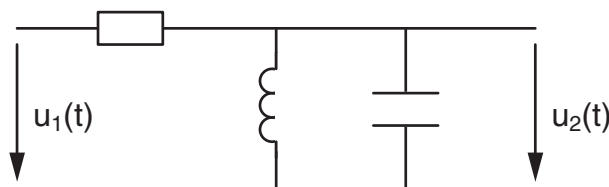


FIG. 1.18: Ex. TL 7 et TL 8

**TL 8** Considérant le circuit  $R - L // C$  de la figure 1.18,

1. utilisez les impédances symboliques pour calculer directement sa fonction de transfert ;
2. calculez le facteur de qualité, le coefficient d'amortissement, la constante de temps, la période d'oscillation, la durée du régime transitoire et le nombre de périodes visibles lorsque  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \text{ nF}$  ;
3. esquissez sa réponse indicielle ; que valent  $u_2(0_+)$  et  $u_2(\infty)$  ?
4. quelle valeur faut-il donner à la résistance pour que  $N_{osc} \simeq 1.5$ .

**TL 9** Considérant la réponse indicielle d'un système décrit par

$$G(s) = \frac{1 + s/30}{(1 + s/10)(1 + s/16 + s^2/16)}$$

1. que valent  $y(0)$  et  $y(\infty)$  ?
2. écrivez  $G(s)$  dans la forme de Laplace ;
3. que valent les pôles et zéros de  $G(s)$  ;
4. calculez les paramètres caractéristiques de la réponse transitoire ;
5. donnez la forme générale de la réponse indicielle  $y(t)$  ;
6. esquissez  $y(t)$ .

Rép. : 
$$\begin{array}{lll} y(0) = 0 & \tau_1 = 0.1 \text{ [sec]} & t_{trans} = 10 \text{ [sec]} \\ y(\infty) = 1 & \tau_2 = 2 \text{ [sec]} & N_{osc} \simeq 6 \end{array}$$

**TL 10** Quelle doit être la fonction de transfert d'un amplificateur tel que sa réponse indicielle est caractérisée par un temps d'établissement inférieur à  $10 \mu\text{s}$  et un dépassement maximum de 5% ? Estimez le temps de montée de cette réponse.

**Conv 1** Considérant deux systèmes distincts représentés par les réponses impulsionnelles respectives  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  de la figure 1.19,

1. utilisez le produit de convolution pour calculer les réponses indicielles  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  de chacun des systèmes ;
2. esquissez avec soin ces 2 réponses ;
3. à quoi correspond la valeur asymptotique  $y(t \rightarrow \infty)$  ?
4. si les signaux d'entrée et de sortie sont des tensions électriques, quelles sont les unités des réponses impulsionnelles ?

**Conv 2** On applique le signal  $x(t)$  à un système dont la réponse impulsionnelle est décrite par  $h(t)$  (figure 1.20). Calculez la réponse  $y(t)$  à l'aide du produit de convolution. Pour vous faciliter la tâche, analysez ce qui se passe dans les tranches temporelles suivantes :

$$t < 0, \quad 0 < t < T, \quad T < t < 2T, \quad 2T < t < 3T, \quad t > 3T$$

puis effectuez une représentation graphique des fonctions intervenant dans ces tranches.

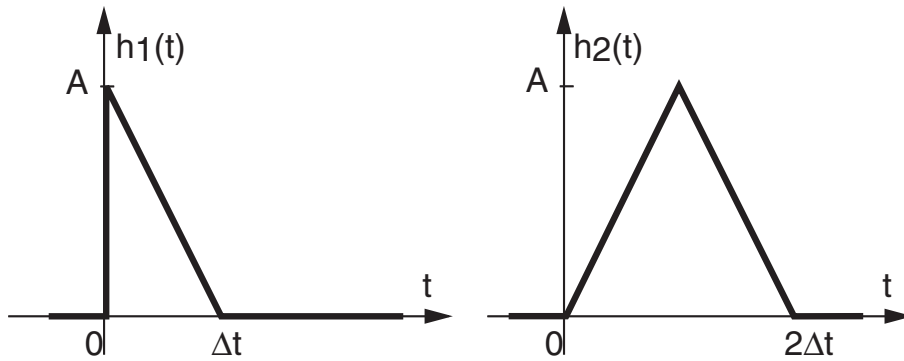


FIG. 1.19: Ex. Conv 1

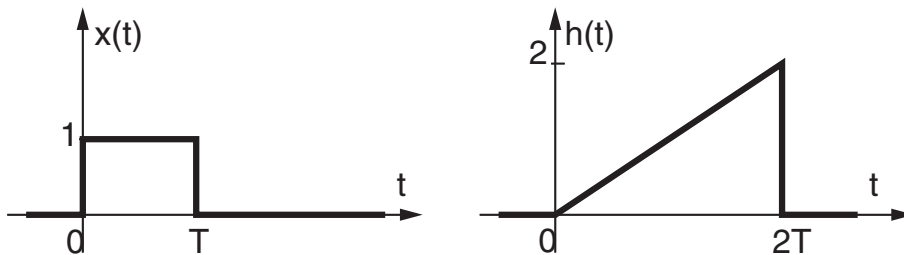


FIG. 1.20: Ex. Conv 2

**Conv 3** Dans cet exercice, on souhaite utiliser le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1 décrit par sa fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

Pour ce faire,

1. calculez la réponse impulsionnelle  $h(t)$  de ce système ;
2. rappelez la définition du produit de convolution et esquissez les fonctions temporelles intervenant dans celui-ci ;
3. appliquez le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle du système.

**Rép :**  $h(t) = \frac{1}{RC} \exp(-t/RC)$ ,  $y(t) = 1 - \exp(-t/RC)$

**Conv 4**

On applique un signal  $x[n]$  à un système numérique décrit par sa réponse impulsionnelle  $h[n]$  :

$n$	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$h[n]$	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x[n]$	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]$																		

Utilisez le produit de convolution numérique

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] x[n - m]$$

pour calculer la réponse  $y[n]$ . Représentez cette réponse sur la figure 1.21.

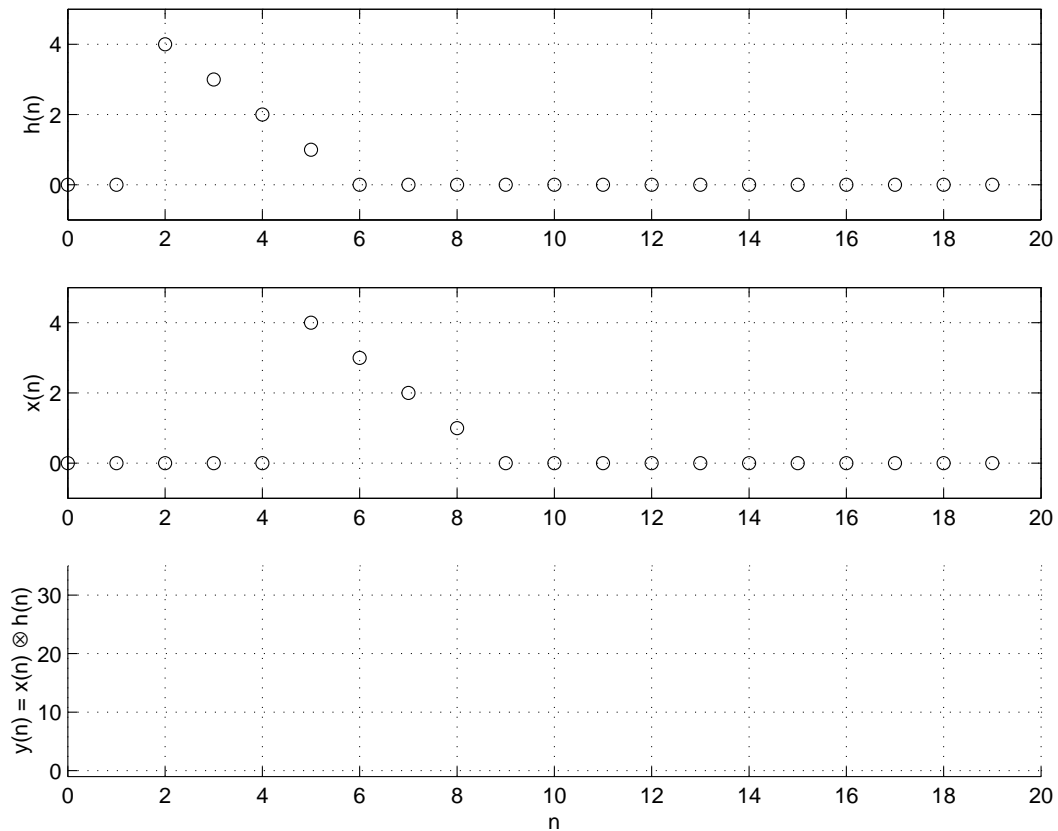


FIG. 1.21: Ex. Conv 4

## 1 ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES



# Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, 1992
- [2] L. Maret, *Régulation automatique*, Presses Polytechniques Romandes, 1987