

2 Modélisation des systèmes analogiques

L'étude des systèmes analogiques passe par la description mathématique de leur comportement. Cette description, obtenue par le biais de la connaissance des lois physiques ou de l'observation, constitue une modélisation de la réalité. Suivant l'approche utilisée, on obtiendra

1. un *modèle de connaissance* lorsque celui-ci est construit à partir de la structure interne et des équations décrivant le système considéré ;
2. un *modèle de représentation* dans le cas où le modèle ne fait que relier globalement la sortie à l'entrée sans tenir compte des détails internes du système.

De plus, dans le cas des systèmes non linéaires, on peut être amené à les représenter par des modèles linéaires autour d'un point de fonctionnement afin d'en obtenir une description linéaire nécessaire pour analyser leur comportement. Quelques exemples illustrent ces diverses approches de la modélisation.

2.1 Système oscillant

Comme exemple de modélisation de connaissance, considérons un rail horizontal sur lequel est déposée une masse reliée à un ressort lui-même attaché à un point mobile ; les pertes par frottement sont modélisées par un amortisseur visqueux (figure 2.1). La position $x(t)$ du point de fixation du ressort est variable et l'on s'intéresse à la position $y(t)$ de la masse. Ces positions sont des variations autour des points d'équilibre X_0 et Y_0 .

2.1.1 Équations différentielles

L'équation de Newton décrivant le mouvement $y(t)$ de la masse m prend en compte la force due à l'élongation du ressort ($x - y$) et la force causée par le frottement visqueux dépendant de la différence des vitesses ($\dot{x} - \dot{y}$). Ce qui donne

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k(x(t) - y(t)) + \lambda \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

En réordonnant les termes, on obtient une équation différentielle d'ordre 2 en $y(t)$ et d'ordre 1 en $x(t)$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + k y(t) = \lambda \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) \quad (2.2)$$

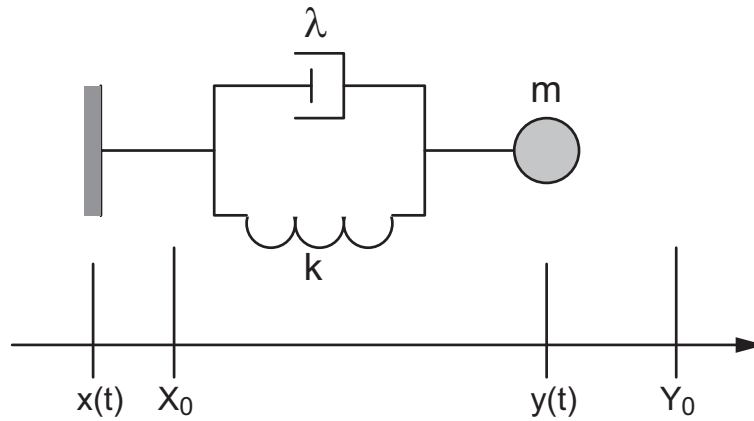


FIG. 2.1: Système oscillant

On peut ainsi considérer que cette équation décrit un système dont l'entrée est la position $x(t)$ du point mobile et la sortie, la position $y(t)$ de la masse.

2.1.2 Fonction de transfert

La transformation de Laplace de l'équation ci-dessus (admise à CI nulles) permet d'obtenir la fonction de transfert du système

$$\begin{aligned} m s^2 Y(s) + \lambda s Y(s) + k Y(s) &= \lambda s X(s) + k X(s) \\ Y(s) (m s^2 + \lambda s + k) &= X(s) (\lambda s + k) \end{aligned}$$

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\lambda s + k}{m s^2 + \lambda s + k} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{m}} \right]$$

qui s'écrit dans les formes canoniques de Bode et de Laplace

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1 + s(\lambda/k)}{1 + (\lambda/k)s + s^2(m/k)} \quad (2.3)$$

$$G(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\lambda}{m} \frac{s + (k/\lambda)}{s^2 + (\lambda/m)s + (k/m)} \quad (2.4)$$

Se souvenant que le dénominateur d'une fonction d'ordre 2 s'écrit

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2 = \frac{1}{\omega_n^2} (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)$$

avec $Q_0 \equiv \frac{1}{2\zeta}$, on en déduit que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2\zeta \equiv \frac{1}{Q_0} = \frac{\lambda}{m \omega_n} = \frac{\lambda}{\sqrt{k m}} \quad (2.5)$$

2.1.3 Conclusion

Le système que nous venons d'étudier est un système mécanique décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On a donc affaire à un *système linéaire temporellement invariant* (LTI) représenté par un *modèle de connaissance* puisque le système est entièrement décrit par ses trois composants que sont la masse, le ressort et l'amortisseur.

2.2 Échangeur de chaleur

On considère à présent un échangeur de chaleur dont le fonctionnement peut être représenté par le schéma technologique de la figure 2.2. Ce système apparemment simple ne peut être décrit qu'à l'aide d'équations aux dérivées partielles spatio-temporelles dont les coefficients ne sont connus que grossièrement. Généralement, seule une simulation complexe (par la méthode des éléments finis, par exemple) permettra de représenter en détail le fonctionnement de l'échangeur.

Cependant, une représentation globale reliant la température de sortie $\theta_s(t)$ à une variation de la puissance $p(t)$ de chauffage peut être obtenue expérimentalement avec une précision suffisante du point de vue de l'utilisateur. Cette modélisation fait appel à un modèle simple plus ou moins arbitraire qui traduit le comportement (*modèle de représentation*) et non la structure interne du processus considéré.



FIG. 2.2: Schéma technologique d'un échangeur de chaleur

Cette modélisation se fait en observant, l'évolution de la température après une augmentation de la puissance de chauffage. On constate alors que, dans un premier temps, la température de sortie ne change pratiquement pas puis qu'elle augmente régulièrement avant de tendre vers une valeur asymptotique. L'analyse attentive de cette évolution et la connaissance du fonctionnement de l'échangeur permettent d'en tirer quelques éléments caractéristiques :

2 MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

1. Le calcul du rapport entre la variation de température à la sortie et la variation de puissance appliquée donne le *gain statique* de l'échangeur

$$K_0 \equiv \frac{\Delta\Theta_s}{\Delta P} \quad [\text{deg/W}]$$

2. La durée pendant laquelle la température n'a pas changé peut correspondre au temps de circulation de l'eau entre la chaudière et le capteur de température. Il s'agit là d'un retard pur T_r dû au déplacement de l'eau dont la représentation de Laplace est

$$e^{-sT_r}$$

3. Enfin le comportement de type "filtre passe-bas" peut être modélisé par une fonction de transfert très simple d'ordre n à pôles confondus

$$\frac{1}{(1 + s\tau)^n}$$

Un modèle possible pour un échangeur de chaleur pourrait donc être donné par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{P(s)} = K_0 \frac{e^{-sT_r}}{(1 + s\tau)^n} \quad (2.6)$$

avec :

K_0	=	gain statique de l'échangeur	[deg/W]
T_r	=	temps de déplacement de l'eau	[sec]
τ	=	constante de temps de l'échangeur	[sec]
n	=	ordre du modèle	[/]

Des méthodes d'identification permettent d'obtenir ces quatre paramètres susceptibles de représenter le comportement global de l'échangeur.

Conclusion On constate donc que, dans ce cas, sans rien connaître du système physique et faisant *l'hypothèse que le système est linéaire*, on a obtenu un *modèle de représentation* pouvant traduire correctement le comportement du système.

2.3 Démarche associée à la modélisation

Nous venons de voir que la modélisation (mathématique) ou l'identification (expérimentale) constituent deux approches permettant d'obtenir une représentation qualitative et quantitative de la réalité. Afin de mieux préciser et conclure cette démarche, prenons comme exemple l'identification d'une bobine à noyau ferromagnétique réalisée sous la forme d'un tore (figure 2.3). Face à cet objet, on peut se poser les questions suivantes.

Qu'est-ce que c'est ?

La réponse à cette question simple implique une interprétation de l'objet basée sur des connaissances préalables. Elles permettent une modélisation de l'objet, c'est-à-dire l'écriture d'une équation. Dans le cas d'une bobine (l'objet), sa description est souvent donnée au travers de sa réactance (un modèle linéaire)

$$Z(j\omega) = j\omega L \quad (2.7)$$

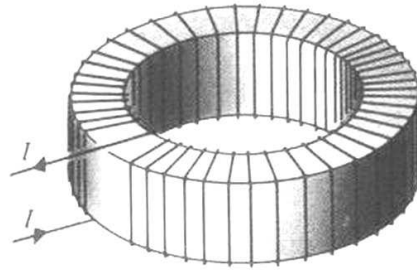


FIG. 2.3: Réalisation d'une bobine

Quelle expérience mettre en oeuvre ?

La donnée d'un modèle doit permettre l'évaluation expérimentale des paramètres afin d'en obtenir une représentation quantitative. Il est donc nécessaire à ce stade de réaliser une expérience permettant d'obtenir directement ou indirectement les paramètres intéressants. Au travers du choix de l'expérience, on fixera implicitement le choix du signal appliqué à l'objet.

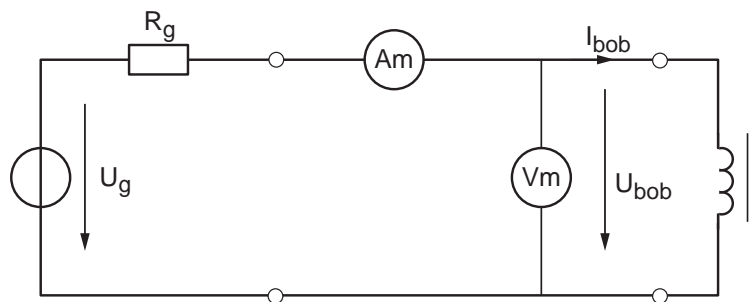


FIG. 2.4: Schéma de mesure d'une impédance

Dans notre cas, l'expérience la plus simple que l'on puisse imaginer consiste à appliquer un signal sinusoïdal à la bobine et à mesurer le courant et la tension à ses bornes (figure 2.4). On devra donc au préalable fixer les domaines de fréquence et d'amplitude des signaux. Le choix des instruments de mesure (voltmètre et ampèremètre) sous-entend que les effets de saturation magnétique ne seront pas visibles. Pour éviter la saturation magnétique, l'amplitude du courant devra être faible. Les résultats des mesures sont donnés dans la figure 2.5 ; ils doivent maintenant être analysés.

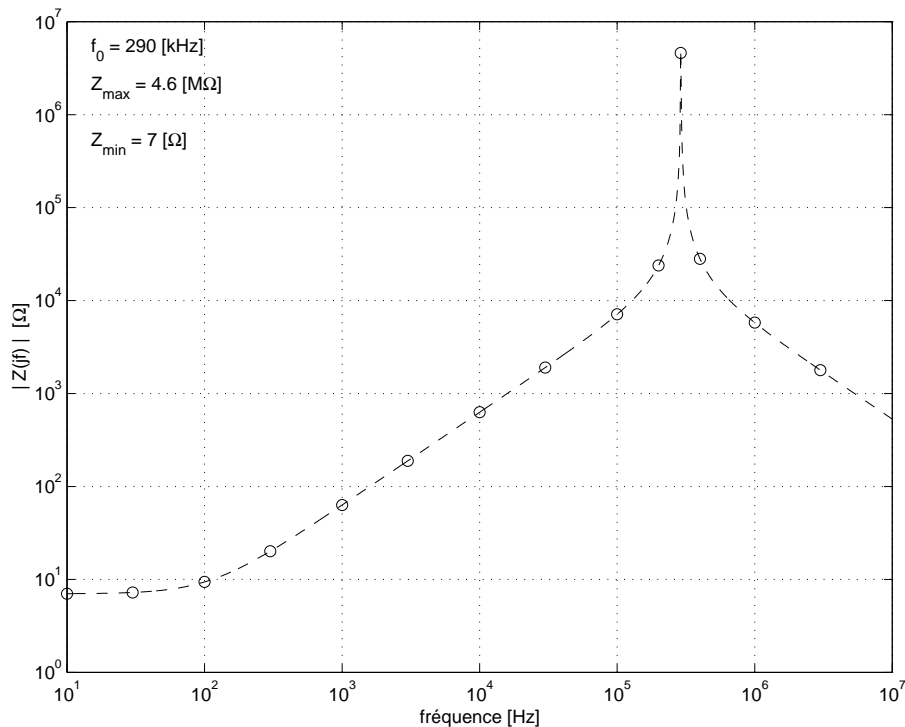


FIG. 2.5: Mesure de l'impédance d'une bobine

Faut-il modifier le modèle ?

L'équation $Z(j\omega) = j\omega L$ représentant cette bobine nous indique que sa réactance devrait augmenter linéairement avec la fréquence. Or, on constate que les mesures ne coïncident pas du tout avec les résultats attendus, si ce n'est en moyennes fréquences. On en déduit donc que le modèle choisi doit être amélioré afin de mieux représenter la réalité. L'analyse de la courbe expérimentale (figure 2.5) conduit aux remarques suivantes.

1. En moyennes fréquences, l'impédance varie linéairement avec la fréquence comme le prévoit le modèle initial (figure 2.6b) :

$$Z(j\omega) = j\omega L \quad \text{si } 300 \text{ [Hz]} < f < 100 \text{ [kHz]} \quad (2.8)$$

2. En basses-fréquences, l'impédance tend vers une valeur constante correspondant à la résistance du fil de bobinage. On en déduit que si l'on veut tenir compte des basses et moyennes fréquences, le modèle doit être modifié comme suit (figure 2.6a) :

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \quad \text{si } 0 < f < 100 \text{ [kHz]} \quad (2.9)$$

3. En hautes-fréquences, l'impédance passe par un maximum qui est le fait d'une antirésonance. Celle-ci provient de la capacité parasite répartie entre les spires dont le modèle est celui de la figure 2.6c :

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 + (j\omega)^2 L C_p} \quad \text{si } f > 300 \text{ [Hz]} \quad (2.10)$$

4. Un modèle valable dans tout le domaine de fréquences peut être celui proposé dans la figure 2.6d dont l'impédance vaut :

$$Z(j\omega) = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega R C_p + (j\omega)^2 L C_p} \quad \text{si } 0 < f < \infty \quad (2.11)$$

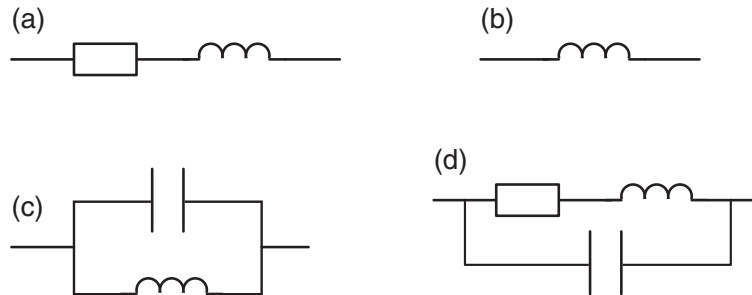


FIG. 2.6: Différents modèles peuvent représenter une bobine

Ainsi, suivant le domaine de fréquences dans lequel sera utilisée la bobine, on pourra choisir un des quatre modèles présentés à la figure 2.6. A ce stade, il ne faut cependant pas oublier que ces modèles sont linéaires et qu'ils ne tiennent pas compte d'une saturation magnétique possible.

Faut-il envisager une représentation non-linéaire ?

Si la tension sinusoïdale appliquée possède une forte amplitude, le courant résultant ne sera plus sinusoïdal : il y a distorsion due à la saturation du noyau ferromagnétique. La description de la bobine au travers de son impédance $Z(j\omega)$ n'est alors plus possible. On est donc obligé de la représenter par un ensemble d'équations non linéaires nécessitant les variables suivantes :

$u(t)$	=	tension appliquée	[V]
$i_C(t)$	=	courant dans la capacité parasite	[A]
$i_B(t)$	=	courant dans la bobine	[A]
C_p	=	capacité parasite	[F]
N	=	nombre de spires	[/]
S_m	=	section moyenne du tore	[m ²]
L_m	=	longueur moyenne du tore	[m]
B	=	induction magnétique	[T]
H	=	champ d'excitation magnétique	[A/m]
$B(H)$	=	caractéristique magnétique du matériau	[T]

On peut alors décrire la bobine à partir des équations fondamentales suivantes – les équations de Kirchhoff

$$i(t) = i_C(t) + i_B(t) \quad (2.12)$$

$$i_C(t) = C_p \frac{du(t)}{dt} \quad (2.13)$$

$$u(t) = R i_B(t) + \frac{d\psi(t)}{dt} \quad (2.14)$$

– les équations électromagnétiques

$$\psi = N \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} \simeq N B S_m \quad (2.15)$$

$$N i_B(t) = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \simeq H(B) L_m \quad (2.16)$$

Ainsi, la bobine est finalement décrite par un ensemble d'équations différentielles non linéaires qui sont

$$B(t) \simeq \frac{\psi(t)}{N S_m} \quad (2.17)$$

$$i_B(t) \simeq \frac{H(B) L_m}{N} \quad (2.18)$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = u(t) - R i_B(t) \quad (2.19)$$

$$i_C(t) = C_p \frac{du(t)}{dt} \quad (2.20)$$

$$i(t) = i_C(t) + i_B(t) \quad (2.21)$$

Enfin, il est important de rappeler que, dans le cas où la bobine est non linéaire, il n'est plus possible de la représenter par son impédance. L'évaluation de son comportement ne peut alors se faire qu'en résolvant numériquement les équations ci-dessus.

2.3.1 Conclusion

De ce que nous venons de voir, il est évident que la modélisation d'un système est un processus itératif pouvant être représenté par le diagramme de la figure 2.7. On y voit que l'identification débute par le choix d'un modèle permettant d'imaginer une expérience afin de confronter les résultats théoriques avec les résultats expérimentaux. A partir de cette comparaison, on décidera si, oui ou non, le modèle choisi est satisfaisant.

On peut encore remarquer que l'identification de la bobine nous a permis de construire un modèle de connaissance. De cette modélisation découle la possibilité de mesurer les valeurs des éléments constitutifs de la bobine, à savoir sa résistance R , son inductance L et sa capacité répartie C_p . C'est la modélisation la plus complète que l'on puisse envisager.

Il arrive parfois que l'on ne s'intéresse qu'à une description globale des systèmes permettant de représenter de manière simple le comportement de ceux-ci sans se préoccuper du fonctionnement interne. On construit alors des modèles de représentation. Ce type de modélisation est fréquemment utilisé pour décrire le comportement dynamique des systèmes ; on analyse alors, suivant les possibilités, leur réponse harmonique et/ou leur réponse indicielle.

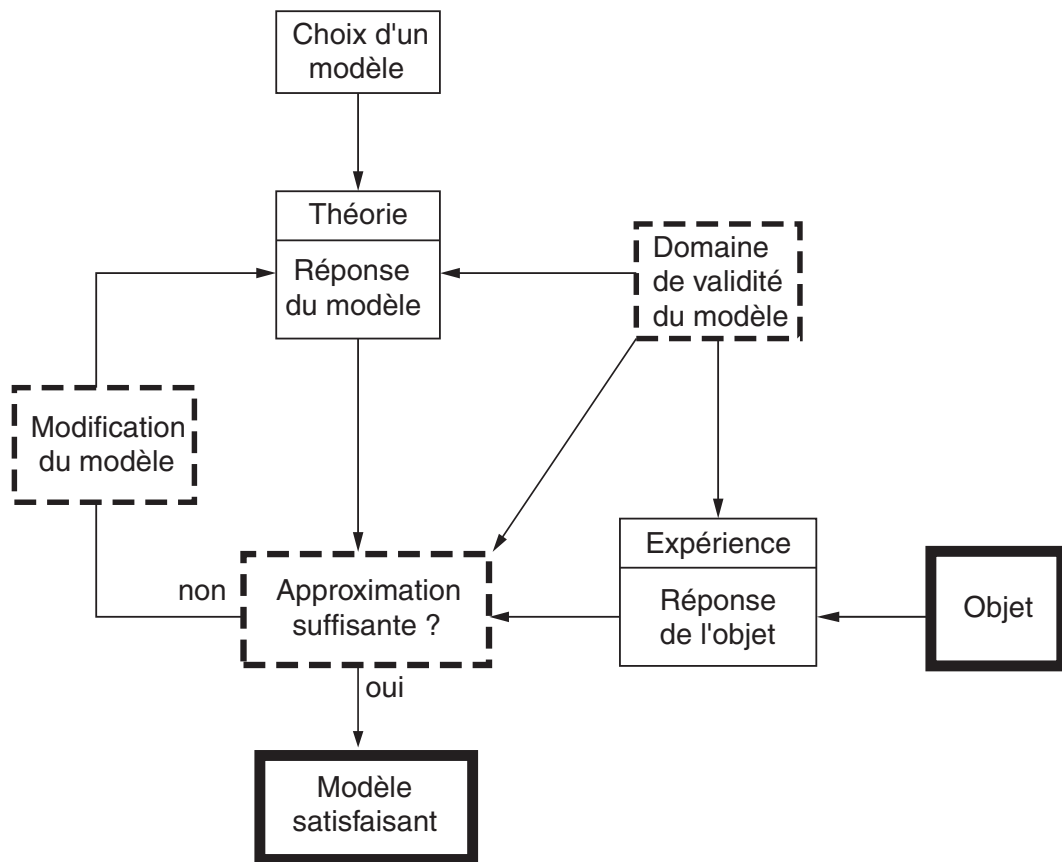


FIG. 2.7: Diagramme illustrant le processus de modélisation

2.4 Un système non linéaire : le réservoir d'eau

On considère ici un réservoir de section A_1 avec une ouverture à sa base de section A_2 par laquelle l'eau peut s'écouler (figure 2.8). Sachant que ce réservoir est alimenté par un débit d'eau Q_1 [kg/sec] et que l'eau s'échappe sous l'effet de la pesanteur avec un débit Q_2 [kg/sec] dépendant de la hauteur, on désire connaître l'évolution du niveau d'eau H [m] dans le réservoir.

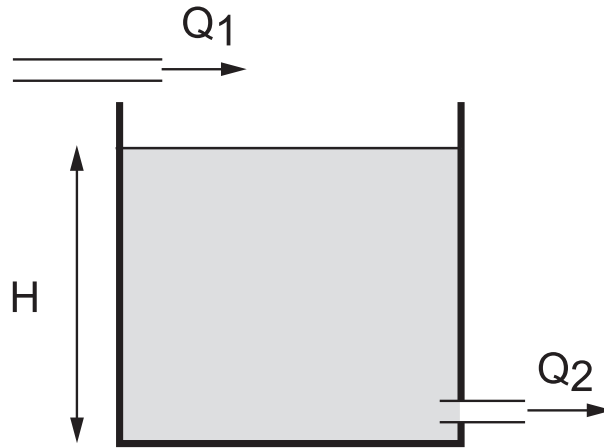


FIG. 2.8: Écoulement dans un réservoir

2.4.1 Équations

Niveau d'eau et débits La masse d'eau M stockée dans le réservoir dépend de sa masse spécifique ρ , de la section A_1 du réservoir et de la hauteur H du niveau

$$M = \rho V_1 = \rho A_1 H \quad (2.22)$$

Son évolution au cours du temps t dépend de la différence des débits

$$M(t) = \rho A_1 H(t) = \int_0^t (Q_1(t) - Q_2(t)) dt \quad (2.23)$$

La variation de la hauteur d'eau vaut donc

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \quad (2.24)$$

Débit de sortie Le débit de sortie Q_2 dépend de la vitesse d'écoulement v_2 et de la section A_2 du tube de sortie

$$Q_2 = \rho \frac{dV_2(t)}{dt} = \rho A_2 \frac{dx(t)}{dt} = \rho A_2 v_2 \quad (2.25)$$

2.4 Un système non linéaire : le réservoir d'eau

En l'absence de frottements, la loi de conservation d'énergie permet d'écrire que la perte d'énergie potentielle de l'eau stockée est compensée par l'augmentation d'énergie cinétique de l'eau sortante

$$\delta E_p = gH dM = \delta E_c = \frac{1}{2}v_2^2 dM \quad (2.26)$$

La vitesse de l'eau sortante vaut donc

$$v_2(H) = \sqrt{2gH} \quad (2.27)$$

Portant ce résultat dans l'équation du débit, on trouve que celui-ci varie comme la racine carrée de la hauteur

$$Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.28)$$

Cette caractéristique non linéaire liant le débit de sortie à la hauteur d'eau est représentée à la figure 2.9.

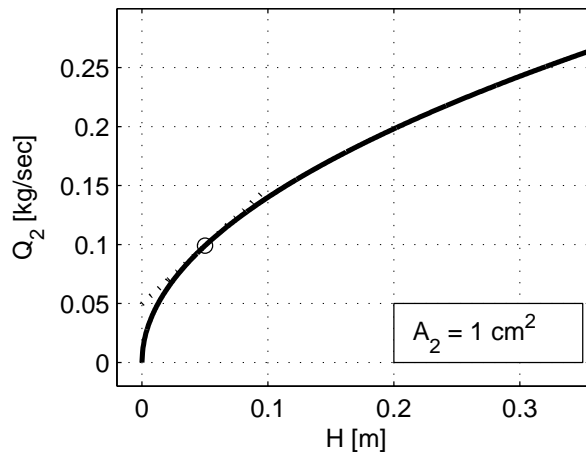


FIG. 2.9: Débit de sortie en fonction du niveau d'eau avec son approximation linéaire autour de $H_0 = 0.05 \text{ m}$

Équation différentielle Tenant compte du débit de sortie, on voit que l'équation différentielle (2.24) décrivant l'évolution du niveau d'eau au cours du temps s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} \left(Q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{2g} \sqrt{H(t)} \right) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} Q_1(t) - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{H(t)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) est une *équation différentielle non linéaire* d'ordre 1 traduisant le fait que le système est non linéaire à cause du terme $\sqrt{H(t)}$. Ce système ne peut donc pas être représenté par une fonction de transfert liant le niveau d'eau H au débit d'entrée Q_1 .

Il n'y a pas de solution analytique à cette équation différentielle ; pour connaître l'évolution temporelle du niveau $H(t)$, il faut l'intégrer numériquement. Par contre, lorsque le débit d'entrée est constant $Q_1 = \text{cte} = Q_0$, il est facile de calculer le niveau d'équilibre $H_0 \equiv H(t \rightarrow \infty)$. En effet, cette valeur asymptotique du niveau est atteinte lorsque dH/dt s'annule

$$\frac{dH(t)}{dt} = 0 = \frac{1}{\rho A_1} Q_0(t) - \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{H(t)}$$

d'où

$$H_0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{\rho A_2} \right)^2 \quad (2.30)$$

2.4.2 Résolution numérique

Comme on vient de le dire, la solution analytique d'une équation différentielle non linéaire n'existe pas. Par contre, l'utilisation d'un algorithme d'intégration numérique permet de trouver aisément la solution pour différents débits d'entrée (figure 2.10).

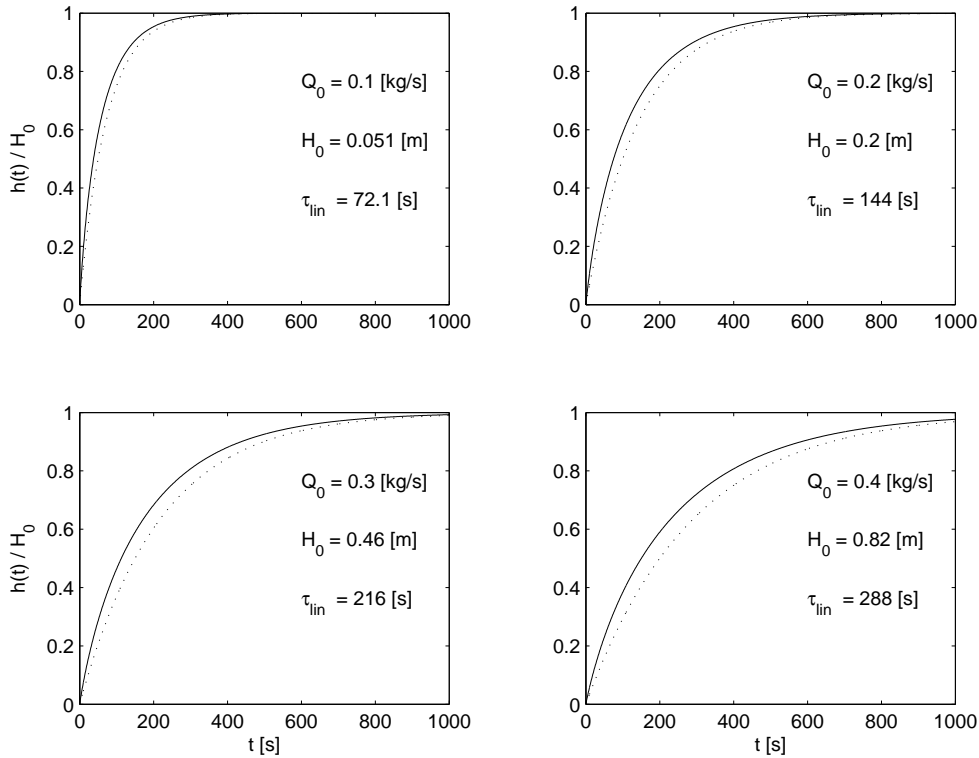


FIG. 2.10: Évolution du niveau d'eau dans un réservoir avec, en traitillé, l'approximation linéaire ($D_1 = 30 [cm]$, $A_2 = 1 [cm^2]$)

La résolution numérique d'un système analogique commence par l'écriture d'une fonction explicitant l'équation différentielle du système

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} \left(Q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{2g H(t)} \right)$$

2.4 Un système non linéaire : le réservoir d'eau

```
function dH_dt = ed_reservoir(t,Ht,Q1) ;
    D1 = 0.30 ;    A1 = pi*D1^2/4 ;
    A2 = 1e-4 ;    D2 = sqrt(4*A2/pi) ;
    rho = 1000 ;    g = 9.81 ;
    dH_dt = (Q1-rho*A2*sqrt(2*g*Ht))/rho/A1 ;
```

Cette fonction est écrite dans un fichier portant le nom de la fonction `ed_reservoir.m` et le calcul de $H(t)$ se fait avec les commandes suivantes :

```
% calcul de l'évolution temporelle du niveau
H0 = 0.0 ; % niveau initial
Q1 = 0.4 ; % [kg/sec]
tmax = 500 ; Npts = 1000 ; dt = tmax/Npts ;
tt = 0 :dt :tmax ;
[tt, Ht] = ode45(@ed_reservoir,tt,H0,[],Q1) ;
```

La commande `ode45` intègre numériquement l'équation différentielle et fournit la solution numérique `Ht` pour le temps correspondant `tt`. À partir de cela, on peut tracer l'évolution du niveau d'eau :

```
% graphe
plot(tt,ht,'LineWidth',2) ; grid on ;
axis([-7,tmax,-0.01,0.2]) ;
texte = ['Q_0 = ',num2str(Q1,2),' [kg/s]'] ;
legend(texte,4) ;
xlabel('temps [s]') ; ylabel('H(t)') ;
```

La figure 2.10 présente l'évolution temporelle du niveau pour plusieurs débits d'entrée. Contrairement aux systèmes linéaires, la durée d'établissement du niveau n'est pas constante et le niveau atteint n'est pas proportionnel au débit d'entrée.

2.4.3 Linéarisation

Lors de variations légères autour d'un point de fonctionnement X_0 , on peut décrire un système non linéaire par une approximation linéaire de sa caractéristique $f(X)$. Cette linéarisation de $f(X)$ se fait en partant du développement limité de la fonction autour d'un point X_0 . Posant $X = X_0 + x$, on a alors

$$f(X) = f(X_0 + x) = f(X_0) + \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_0} x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dX^2} \right|_{X_0} x^2 + \dots$$

Ne gardant que les termes d'ordres 0 et 1, on obtient l'approximation linéaire suivante

$$f(X_0 + x) \simeq f(X_0) + \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_0} x$$

On a ainsi remplacé la caractéristique non linéaire $f(X) = f(X_0 + x)$ par une droite tangente au point X_0 (figure 2.9).

Dans le cas du réservoir, l'évolution du niveau est décrite par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \quad \text{avec} \quad Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.31)$$

Autour du point d'équilibre H_0 , la hauteur est décrite par $H = H_0 + h$ où h représente de faibles variations de hauteur autour de H_0 . Le développement limité du débit de sortie Q_2 en un polynôme d'ordre 1 donne alors

$$\begin{aligned} Q_2(H_0 + h) &\simeq Q_2(H_0) + \left. \frac{dQ_2}{dH} \right|_{H_0} \cdot h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{2g} \left. \frac{d\sqrt{H}}{dH} \right|_{H_0} \cdot h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{2g} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{H_0}} h \\ &\simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que la caractéristique non linéaire de la figure 2.9 décrite par

$$Q_2(H) = \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (2.32)$$

peut être approchée par le modèle linéaire suivant

$$Q_2(H_0 + h) \simeq Q_0 + \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h \quad (2.33)$$

En désignant les variables par leurs variations autour du point d'équilibre

$$Q_1(t) = Q_0 + q_1(t) \quad (2.34)$$

$$H(t) = H_0 + h(t) \quad (2.35)$$

$$Q_2(t) = Q_0 + q_2(t) \quad (2.36)$$

l'équation différentielle décrivant le fonctionnement du réservoir s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (Q_1(t) - Q_2(t)) \\ \frac{d(H_0 + h(t))}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (Q_0 + q_1(t) - (Q_0 + q_2(t))) \\ \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{\rho A_1} (q_1(t) - q_2(t)) \end{aligned}$$

Prenant en compte l'approximation

$$q_2(t) \simeq \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t)$$

l'équation différentielle devient linéaire et elle s'écrit sous la forme

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A_1} \left(q_1(t) - \rho A_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t) \right)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{\rho A_2}{\rho A_1} \sqrt{\frac{g}{2H_0}} h(t) = \frac{1}{\rho A_1} q_1(t)$$

En définissant le temps caractéristique

$$\tau \equiv \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

on obtient l'équation différentielle linéaire décrivant le comportement du niveau d'eau pour de faibles variations autour de son point d'équilibre H_0

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} h(t) = \frac{1}{\rho A_1} q_1(t) \quad (2.37)$$

L'évolution temporelle du niveau d'eau prévue par ce modèle linéaire est présentée en traitillé sur la figure 2.10 pour différents niveaux d'équilibre H_0 . L'observation de ces courbes montre que, même en partant d'un réservoir vide, le temps caractéristique ainsi trouvé donne une assez bonne idée de la réalité.

2.4.4 Fonction de transfert

L'approximation d'ordre 1 du réservoir permet de le modéliser par une fonction de transfert. Celle-ci s'obtient par transformation de Laplace de l'équation différentielle (2.37)

$$s H(s) + \frac{1}{\tau} H(s) = \frac{1}{\rho A_1} Q_1(s)$$

d'où

$$G(s) \equiv \frac{H(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{\rho A_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right] \quad (2.38)$$

Dans la forme de Bode, cette fonction de transfert s'écrit

$$G(s) \equiv \frac{H(s)}{Q_1(s)} = K_0 \frac{1}{(1 + s\tau)} \quad (2.39)$$

avec

$$K_0 \equiv \frac{\Delta H}{\Delta Q} = \frac{\tau}{\rho A_1} = \frac{1}{\rho A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right]$$

$$\tau = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \text{ [sec]} \quad (2.40)$$

On constate ainsi que le réservoir est caractérisé une constante de temps τ et par un gain K_0 qui augmentent tous deux avec la hauteur d'équilibre H_0 . Comme la hauteur asymptotique dépend du débit d'entrée Q_0 (équation 2.30)

$$H_0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{\rho A_2} \right)^2$$

on trouve que le gain et la constante de temps sont tous deux proportionnels au débit moyen Q_0 et qu'ils valent

$$K_0 = \frac{Q_0}{g (\rho A_2)^2} \left[\frac{\text{m}}{\text{kg/sec}} \right] \quad (2.41)$$

$$\tau = \frac{A_1}{g \rho A_2^2} Q_0 \quad [\text{sec}] \quad (2.42)$$

2.4.5 Conclusion

Le système que nous venons d'étudier est un système mécanique décrit par une *équation différentielle non linéaire à coefficients constants*. On a donc affaire à un *système non linéaire* temporellement invariant représenté par un *modèle de connaissance* puisque le système est entièrement décrit par ses dimensions géométriques, la pesanteur et la masse spécifique du liquide.

Seule son approximation d'ordre 1 a permis de représenter et analyser le comportement du réservoir à l'aide d'une fonction de transfert ; de celle-ci, on a tiré un temps caractéristique dépendant du débit d'entrée ou, ce qui est équivalent, du niveau d'équilibre.

2.5 Représentations des systèmes analogiques

En conclusion de ce que nous venons de voir, il faut rappeler que :

La description d'un système par un ensemble d'équations différentielles est la plus fondamentale que l'on puisse imaginer.

Quel que soit le système considéré, linéaire ou non, temporellement invariant ou non, sa réponse temporelle peut toujours être calculée à partir des équations différentielles le représentant. Dans le cas des **systèmes non linéaires**, le calcul de la réponse temporelle $y(t)$ se fera sous forme numérique en intégrant les équations différentielles à l'aide d'un algorithme d'intégration (Runge-Kutta par exemple).

Dans le cas où les systèmes sont décrits par des **équations différentielles linéaires**, on peut alors, à l'aide des transformations de Fourier ou de Laplace, créer d'autres représentations d'un système telles que la fonction de transfert, l'impédance, etc. Ces représentations ne sont valables que pour les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI). Il en est de même pour les notions de réponse impulsionnelle et de produit de convolution. Il est donc important de noter que :

Seuls les systèmes linéaires temporellement invariants peuvent être représentés par une fonction de transfert en s ou en $j\omega$.

Les représentations et démarches utilisées pour la résolution des systèmes linéaires peuvent être résumées par le tableau 2.1.

Description du système	Variable	Démarche	Solution $y(t)$
Équation différentielle	$t \in \mathbb{R}$	Résolution de l'équ. diff.	$y_h(t) + y_p(t)$
Réponse impulsionnelle	$t \in \mathbb{R}$	Calcul du produit de convolution	$x(t) \otimes h(t)$
Transformation de Laplace	$s \in \mathbb{C}$	Résolution d'une équ. algébrique	$\mathcal{L}^{-1}\{X(s) \cdot H(s)\}$
Transformation de Fourier	$j\omega \in \mathbb{I}$	Résolution d'une équ. algébrique	$\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega) \cdot H(j\omega)\}$

TAB. 2.1: Représentations et résolution des systèmes linéaires

2.6 Un système électromécanique : le moteur DC

Pour terminer, considérons un moteur à courant continu et excitation permanente. Son fonctionnement est basé sur la loi de Lorentz qui dit qu'une force apparaît en présence d'un courant électrique et d'un champ magnétique :

$$d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} \quad (2.43)$$

Le courant circulant dans les spires câblées sur un cadre (figure 2.11) crée un couple qui oriente le cadre perpendiculairement aux lignes du champ \vec{B} . De plus, comme le flux magnétique embrassé par le cadre varie au cours du temps, il faut s'attendre à l'apparition d'une force contre-électromotrice décrite par la loi de Lenz :

$$u_{fem}(t) = -\frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2.44)$$

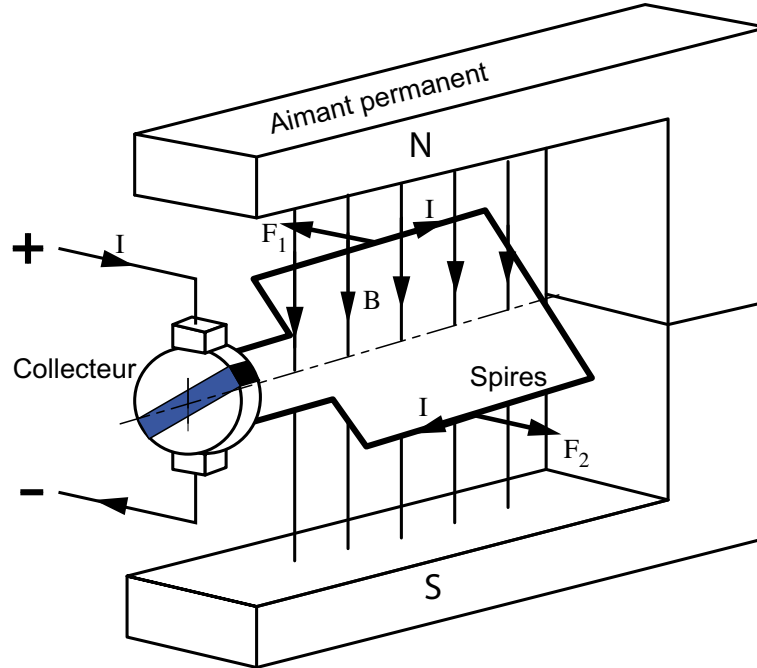


FIG. 2.11: Principe du moteur DC

Pour que le mouvement de rotation s'entretienne, il suffit de changer le sens du courant au bon moment grâce au collecteur (figure 2.11). La figure 2.12 présente une réalisation actuelle d'un petit moteur DC à aimant permanent.

2.6.1 Équations différentielles

Pour la modélisation qui suit, on considère que les non linéarités sont suffisamment faibles afin qu'on puisse les négliger et admettre que le système est linéaire. On fait également l'hypothèse que les constituants du moteur ne changent pas au cours du temps ; celui-ci est donc temporellement invariant. Le schéma technologique d'un tel moteur est donné à la figure 2.13.

Comme le moteur est constitué d'une partie électrique et d'une partie mécanique, sa description passe par l'écriture d'une équation électrique (Kirchhoff)

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_E \omega(t) \quad [\text{V}] \quad (2.45)$$

et d'une équation mécanique (Newton)

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_T i(t) - R_f \omega(t) + C_{ext}(t) \quad [\text{Nm}] \quad (2.46)$$

À celle-ci, on peut ajouter l'équation liant la position du rotor $\theta(t)$ à la vitesse $\omega(t)$

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt \quad [\text{rad}] \quad (2.47)$$

Dans ces équations électromécaniques-mécaniques, il y a

2.6 Un système électromécanique : le moteur DC

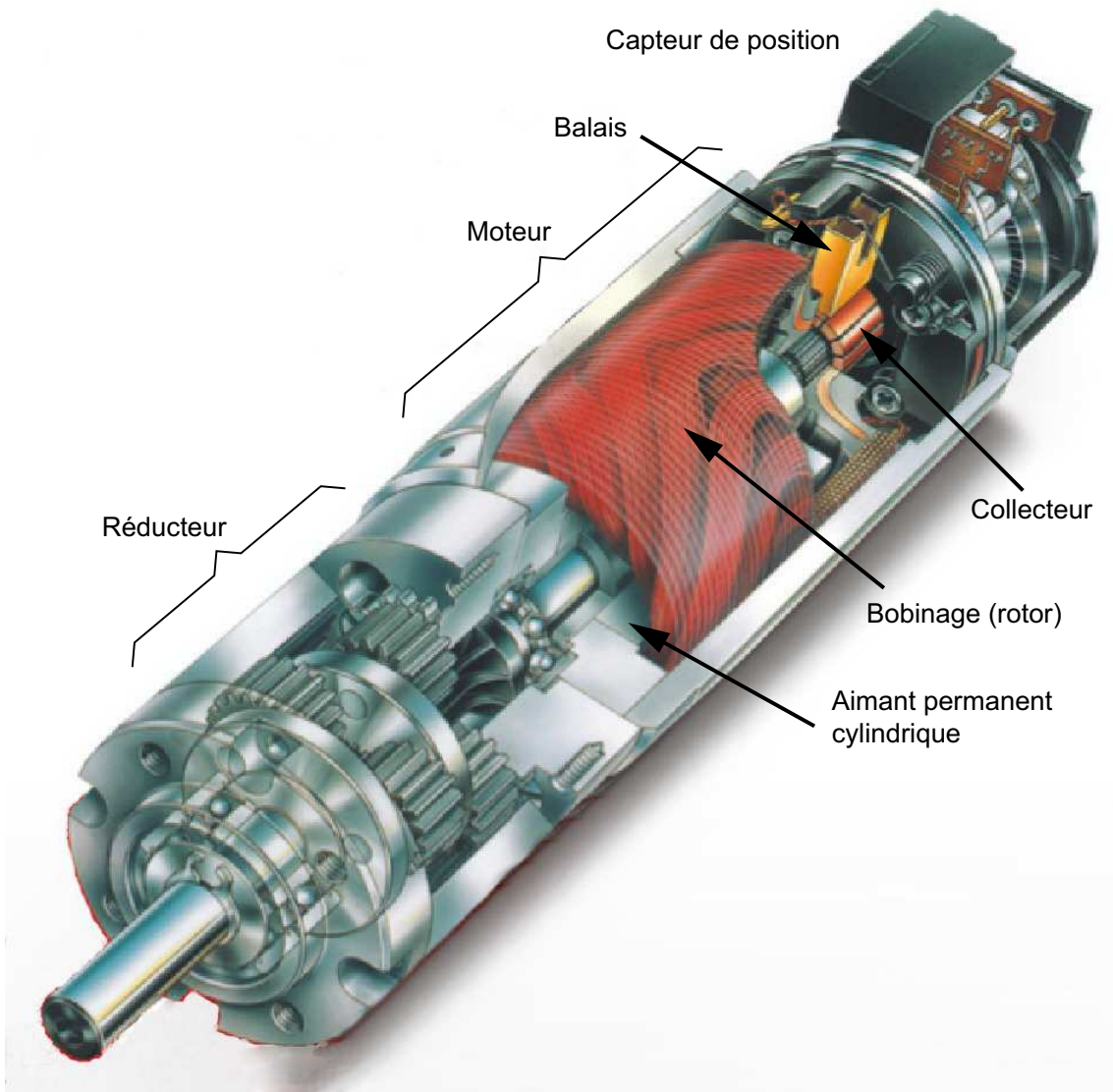


FIG. 2.12: Vue intérieure d'un petit moteur DC avec son réducteur et son capteur de position numérique ($P = 70\text{W}$, $D = 36\text{ mm}$, $L = 71\text{ mm}$)

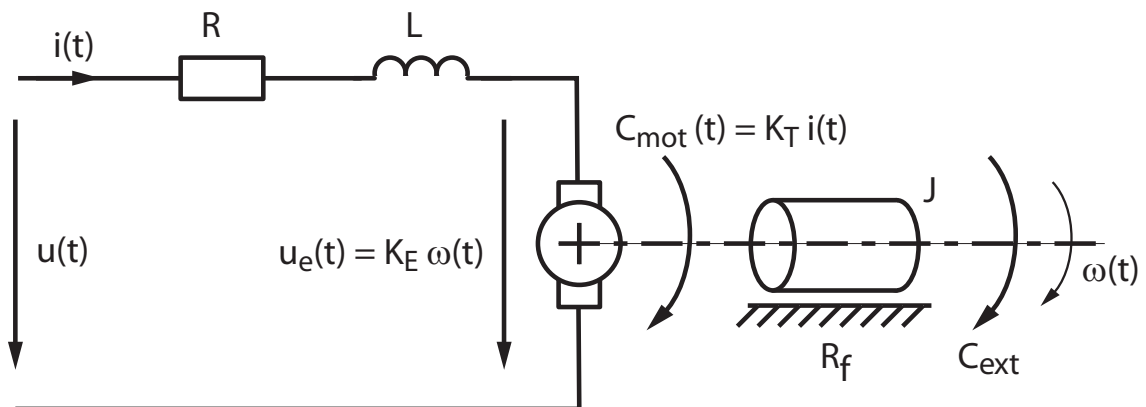


FIG. 2.13: Schéma technologique d'un moteur DC

2 MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

- les chutes de tension causées par la résistance R et l'inductance L du bobinage du moteur ;
- la force électromotrice (fem) $K_E \omega(t)$ générée par le moteur lorsqu'il tourne à vitesse $\omega(t)$;
- le couple moteur $K_T i(t)$ créé par la circulation du courant $i(t)$;
- le couple résistant $R_f \omega(t)$ causé par les frottements qui, pour que l'équation soit linéaire, sont admis visqueux ;
- le couple extérieur C_{ext} appliqué sur le rotor.

Remarques

1. On peut noter qu'à partir de ces équations, on trouve les constantes de temps électriques et mécaniques de chaque partie prise séparément

$$\tau_{el} = \frac{L}{R} \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} \quad [\text{sec}] \quad (2.48)$$

2. Le principe de conservation de l'énergie permet de montrer que les constantes de couple K_T et de fem K_E sont égales. En effet, dans le cas où il n'y pas de pertes lors de la transformation de la puissance électrique en puissance mécanique, on a l'égalité des deux expressions suivantes

$$P_{el} = U I = (K_E \omega) i \quad [\text{W}]$$

$$P_{mec} = C \omega = (K_T i) \omega \quad [\text{W}]$$

On en déduit que

$$K_E \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right] = K_T \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right] \quad (2.49)$$

3. En régime permanent constant, les dérivées s'annulent ; on peut alors calculer la vitesse asymptotique ω_∞ et le courant i_∞ consommé pour compenser les pertes. Considérant que le moteur est alimenté par une tension continue U_0 et que le couple extérieur est nul, on obtient ainsi deux équations à deux inconnues

$$U_0 = R i_\infty + K_E \omega_\infty$$

$$0 = K_T i_\infty - R_f \omega_\infty$$

dont la solution est

$$i_\infty = \frac{R_f}{K_T} \omega_\infty = U_0 \frac{R_f}{K_T K_E + R R_f} \quad [\text{A}] \quad (2.50)$$

$$\omega_\infty = U_0 \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad (2.51)$$

Représentation d'état Un système d'équations différentielles peut toujours être mis sous une forme canonique constituée par un ensemble d'équations différentielles d'ordre 1. Dans le cas du moteur, cet ensemble s'écrit

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} (u(t) - Ri(t) - K_E \omega(t)) \quad (2.52)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J} (K_T i(t) - R_f \omega(t) + C_{ext}) \quad (2.53)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \quad (2.54)$$

Cette représentation porte le nom de représentation d'état du système. Dans le cas présent, les variables d'état sont le courant $i(t)$, la vitesse de rotation $\omega(t)$ et la position angulaire $\theta(t)$.

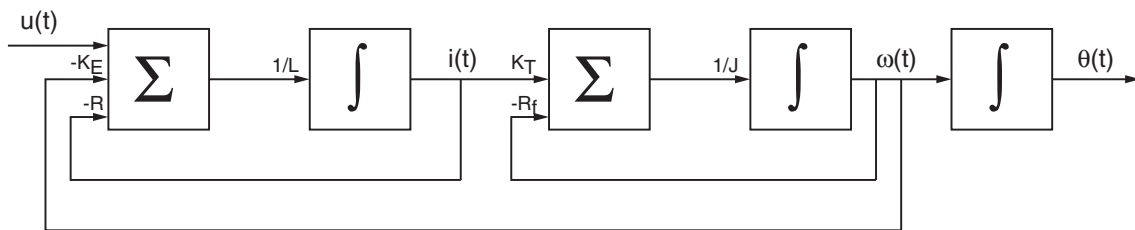


FIG. 2.14: Graphe représentant un système d'équations différentielles

Représentation graphique À partir de ces équations, il est aisé de dessiner le graphe des équations différentielles. Ce graphe (figure 2.14) est constitué de sommateurs et d'intégrateurs dont les entrées sont des grandeurs temporelles auxquelles on associe un coefficient. L'entrée de chaque intégrateur représente la dérivée d'une variable d'état. On obtient donc à la sortie de chaque intégrateur une des variables d'état décrivant complètement le comportement du système.

Ce schéma peut être directement interprété par des logiciels tels que Spice ou Simulink (programmation graphique) avant d'être résolu pour fournir les réponses temporelles du système étudié.

2.6.2 Fonction de transfert

La transformation de Laplace des équations différentielles décrivant le moteur conduit aux équations algébriques suivantes

$$U(s) - K_E \Omega(s) = (R + sL) I(s)$$

$$(R_f + sJ) \Omega(s) = K_T I(s) + C_{ext}(s)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \Omega(s)$$

Celles-ci permettent de calculer les images du courant du moteur, de la vitesse et de la position du rotor

$$I(s) = \frac{U(s) - K_E \Omega(s)}{R + sL} \quad (2.55)$$

$$\Omega(s) = \frac{K_T I(s) + C_{ext}}{R_f + sJ} \quad (2.56)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s} \Omega(s) \quad (2.57)$$

Comme on s'intéresse ici à la vitesse du rotor par rapport à la tension appliquée au moteur, on prendra $C_{ext} = 0$. Le courant et la vitesse du moteur valent alors

$$I(s) = \frac{U(s) - K_E \Omega(s)}{R + sL}$$

$$\Omega(s) = \frac{K_T I(s)}{R_f + sJ}$$

Portant le premier résultat dans le deuxième, il vient

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \frac{K_T}{R_f + sJ} \left(\frac{U(s)}{R + sL} - \frac{K_E}{R + sL} \Omega(s) \right) \\ \Omega(s) \left(1 + \frac{K_T K_E}{R_f + sJ} \frac{1}{R + sL} \right) &= \frac{K_T}{R_f + sJ} \frac{1}{R + sL} U(s) \\ \Omega(s) \left(\frac{(R_f + sJ)(R + sL) + K_T K_E}{(R_f + sJ)(R + sL)} \right) &= \frac{K_T}{(R_f + sJ)(R + sL)} U(s) \end{aligned}$$

En recherchant le rapport entre la vitesse de rotation $\Omega(s)$ et la tension $U(s)$ appliquée au moteur, on obtient sa fonction de transfert

$$G_{mot}(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (2.58)$$

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{s^2 JL + s(JR + LR_f) + K_T K_E + RR_f}$$

que l'on peut écrire dans les formes de Laplace ou de Bode

$$G_{mot}(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_T}{JL} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) + \frac{K_T K_E + RR_f}{JL}} \quad (2.59)$$

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + RR_f} \frac{1}{1 + s \frac{JR + LR_f}{K_T K_E + RR_f} + s^2 \frac{JL}{K_T K_E + RR_f}} \quad (2.60)$$

C'est cette dernière qui est généralement utilisée pour décrire le moteur DC. On voit ainsi que le moteur est représenté par un système d'ordre 2 caractérisé par son gain

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + RR_f} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (2.61)$$

et deux constantes de temps qui sont l'inverse de la valeur absolue des pôles de la fonction de transfert car, de par sa réalisation, un moteur DC est stable et ne peut pas avoir de comportement oscillant

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)} \quad (2.62)$$

2.6.3 Temps caractéristiques

Les pôles $p_{1,2}$ de la fonction de transfert sont les racines de son dénominateur

$$s^2 + s \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) + \frac{K_T K_E + R R_f}{JL} = (s - p_1)(s - p_2)$$

Ils valent

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} + \frac{R_f}{J} \right)^2 - 4 \frac{K_T K_E + R R_f}{JL}} \right) \quad (2.63)$$

On notera que, dans cette expression, on peut négliger le terme R_f/J par rapport à R/L car on a vu que de manière générale, on a $\tau_{mec} = J/R_f \gg \tau_{elt} = L/R$. De plus, dans le cas de moteurs dont la puissance est supérieure à quelques dizaines de watts, les pertes électriques et mécaniques dues, respectivement, à la résistance du bobinage R et au coefficient de frottement R_f sont négligeables par rapport aux puissances électrique et mécanique mises en jeu. Le produit des coefficients de couple K_T et de fem K_E est alors beaucoup plus important que le produit des coefficients de pertes R et R_f

$$K_T K_E \gg R R_f \quad (2.64)$$

Ce qui donne

$$p_{1,2} \simeq \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{R}{L} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L} \right)^2 - 4 \frac{K_T K_E}{JL}} \right) \quad (2.65)$$

$$\simeq - \frac{1}{2 \tau_{elt}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_T K_E}{J R} \tau_{elt}} \right) \quad (2.66)$$

On constate ainsi que les pôles du moteur, donc ses constantes de temps, ne dépendent pratiquement pas des pertes mécaniques et l'on a

$$\tau_{1,2} \simeq 2 \tau_{elt} \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_T K_E}{J R} \tau_{elt}}} \quad (2.67)$$

2.6.4 Schéma fonctionnel

Généralement, on préfère décrire et analyser le fonctionnement d'un système complexe à l'aide d'un schéma fonctionnel plutôt qu'avec les équations différentielles.

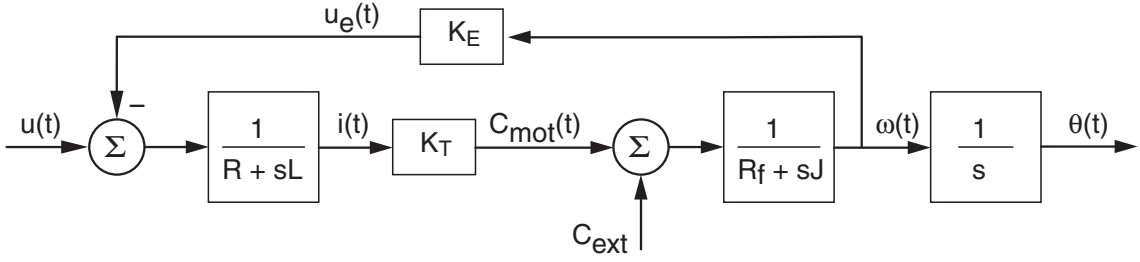


FIG. 2.15: Schéma fonctionnel d'un moteur DC

L'usage du schéma fonctionnel est en effet plus souple car celui-ci peut contenir le détail des fonctions de transfert partielles interconnectées entre elles ou, au contraire, être ramené à un seul bloc traduisant le fonctionnement global du système.

Prenant comme exemple le moteur DC, son schéma fonctionnel (figure 2.15) se dessine aisément à partir de ses fonctions de transfert. En effet, partant de la description du courant

$$I(s) = (U(s) - K_E \Omega(s)) \frac{1}{R + sL} \quad (2.68)$$

on en déduit le couple moteur

$$C_{mot}(s) = I(s) K_T \quad (2.69)$$

À celui-ci, on peut ajouter un couple extérieur et obtenir ainsi le couple total fourni à la charge

$$C_{tot}(s) = C_{mot} + C_{ext} = I(s) K_T + C_{ext} \quad (2.70)$$

La vitesse du moteur vaut alors

$$\Omega(s) = (I(s) K_T + C_{ext}) \frac{1}{R_f + sJ} \quad (2.71)$$

Ces équations conduisent tout naturellement au schéma fonctionnel de la figure 2.15. Dans ce schéma, on a encore ajouté le passage de la vitesse à la position angulaire qui se fait par simple intégration

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(s) = \Omega(s) \frac{1}{s} \quad (2.72)$$

2.6.5 Approximation d'ordre 1

Comme la constante de temps électrique $\tau_{el} = L/R$ est beaucoup plus petite que la constante de temps mécanique $\tau_{mec} = J/R_f$, il est fréquent de considérer que l'inductance L a un effet négligeable et que le moteur peut être modélisé par un système d'ordre 1

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E + R R_f}} \quad (2.73)$$

2.6 Un système électromécanique : le moteur DC

Il est alors caractérisé par son gain et sa constante de temps

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad \tau_{mot} \simeq \frac{J R}{K_T K_E + R R_f} [\text{sec}] \quad (2.74)$$

Dans le cas où l'on peut négliger les pertes, on obtient

$$G_{mot}(s) \simeq \frac{1}{K_E} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E}} \quad (2.75)$$

Avec ces approximations, le gain du moteur et sa constante de temps valent simplement

$$K_{mot} \simeq \frac{1}{K_E} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad \tau_{mot} \simeq \frac{J R}{K_T K_E} [\text{sec}] \quad (2.76)$$

2.6.6 Effets d'un réducteur

Dans l'utilisation des moteurs, il est fréquent d'y adjoindre un réducteur afin d'adapter la charge au moteur (figure 2.16). Cela conduit généralement à une augmentation du couple utile donc à une diminution de la vitesse de rotation de la charge. Ces relations sont aisément démontrées grâce aux lois fondamentales. Pour le voir, considérons un réducteur décrit par le rapport des engrenages n_2 (côté charge) et n_1 (côté moteur)

$$N \equiv \frac{n_2}{n_1} > 1 \quad (2.77)$$

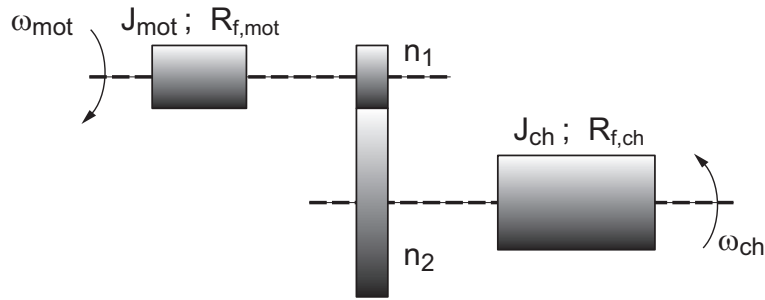


FIG. 2.16: Réducteur

Positions et vitesses L'égalité des chemins parcourus ($s(t) = \theta(t) r$) par la circonférence des engrenages donne

$$\theta_{mot} n_1 = \theta_{ch} n_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_{ch} = \frac{n_1}{n_2} \theta_{mot} = \frac{1}{N} \theta_{mot} \quad (2.78)$$

Il en est de même pour les vitesses

$$\omega_{mot} n_1 = \omega_{ch} n_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ch} = \frac{n_1}{n_2} \omega_{mot} = \frac{1}{N} \omega_{mot} \quad (2.79)$$

Couples De plus, la conservation de l'énergie d'un corps en rotation permet d'écrire

$$dW_{mot} = C_{mot} d\theta_{mot} = dW_{ch} = C_{ch} d\theta_{ch}$$

d'où

$$C_{ch} = \frac{d\theta_{mot}}{d\theta_{ch}} C_{mot} = \frac{n_2}{n_1} C_{mot} = N C_{mot} \quad (2.80)$$

Paramètres de la charge ramenés vers le moteur Partant de la conservation de la puissance entre l'entrée et la sortie du réducteur, on peut montrer que les paramètres mécaniques de la charge (son inertie J_{ch} , ses frottements $R_{f, ch}$ et son élasticité κ_{ch}) sont vus par le moteur avec les valeurs suivantes

$$J = \frac{1}{N^2} J_{ch} \quad R_f = \frac{1}{N^2} R_{f, ch} \quad \kappa = \frac{1}{N^2} \kappa_{ch} \quad (2.81)$$

Rendement Enfin, il ne faut pas oublier que le réducteur possède sa propre inertie et que son rendement n'est pas très bon. Celui-ci dépend du type de réducteur, du nombre d'étages et diminue d'autant plus que le rapport de réduction est grand. Voici quelques chiffres pour un réducteur à pignons droits.

Rapport de réduction	15 :1	30 :1	60 :1	100 :1
Nombre d'étages	3	3	4	4
Rendement η [%]	73	73	66	66

Le rendement η d'un réducteur entraîne à une diminution du couple transmis à la charge

$$C_{ch} = \eta N C_{mot} \quad (2.82)$$

On peut alors montrer que le terme de transformation $1/N^2$ des paramètres de la charge vus par le moteur doit prendre en compte le rendement de la manière suivante

$$\frac{1}{N^2} \longrightarrow \frac{1}{\eta N^2} \quad (2.83)$$

Paramètres vus par le moteur Ainsi, dans les équations d'un moteur couplé à une charge, il faudra bien prendre garde à reporter les paramètres globaux du moteur et de la charge tels que

$$J = J_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} J_{ch} \quad (2.84)$$

$$R_f = R_{f, mot} + \frac{1}{\eta N^2} R_{f, ch} \quad (2.85)$$

$$\kappa = \kappa_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} \kappa_{ch} \quad (2.86)$$

2.7 Comportement d'un moteur DC

2.7.1 Paramètres d'un moteur

Afin de rendre les choses plus concrètes, appliquons ce que nous venons de voir en considérant un moteur à courant continu réel de type Maxon RE75-118825 dont la fiche technique est présentée dans la figure 2.17. Le moteur choisi a une puissance de 250 W, pèse 2.8 kg et mesure 75x75x201 mm³.

Lors de la lecture des caractéristiques techniques, il est important de bien considérer la signification des grandeurs fournies par les catalogues car les appellations varient d'un constructeur à l'autre. Dans notre cas, on a les équivalences présentées dans le tableau 2.2.

Catalogue	Cours
Courant à vide I_0	Courant asymptotique i_∞ pour $u(t) = U_0$
Vitesse à vide n_0	Vitesse asymptotique n_∞ pour $u(t) = U_0$
Courant de démarrage	Courant à rotor bloqué U_0/R
Constante de vitesse	Gain du moteur $K_{mot} \simeq 1/K_E$
Cte de temps <i>mécanique</i>	Cte de temps du moteur $\tau_{mot} \simeq JR/(K_T K_E)$

TAB. 2.2: Équivalence des appellations

De plus, parmi les nombreuses valeurs fournies par le constructeur, on ne gardera que celles correspondant aux paramètres fondamentaux du moteur ainsi que les paramètres du modèle d'ordre 1. Ces valeurs sont présentées dans le tableau 2.3.

Paramètres	Valeurs	Unités	Symboles	Valeurs SI	Unités SI
Tension nominale	48.0	V	U_0	48.0	V
Courant à vide	0.147	A	$I_0 \equiv i_\infty$	0.147	A
Vitesse à vide	1940	tr/min	$\omega_0 \equiv \omega_\infty$	203	rad/sec
Inertie du rotor	1420	gcm ²	J_{mot}	$0.142 \cdot 10^{-3}$	kgm ²
Résistance du bobinage	1.42	Ω	R	1.42	Ω
Inductance du bobinage	0.64	mH	L	$0.64 \cdot 10^{-3}$	H
Constante de couple	233	mNm/A	K_T	0.233	Nm/A
Constante de vitesse	41.1	(tr/min)/V	K_{mot}	4.3	(rad/sec)/V
Constante de temps	4	msec	τ_{mot}	$4 \cdot 10^{-3}$	sec

TAB. 2.3: Paramètres fondamentaux d'un moteur et modèle d'ordre 1

2.7.2 Comportement statique

Couple maximum Le courant et le couple du moteur sont maximums lorsque le rotor est bloqué car la fem $K_E \omega(t)$ est alors nulle. Ils valent alors

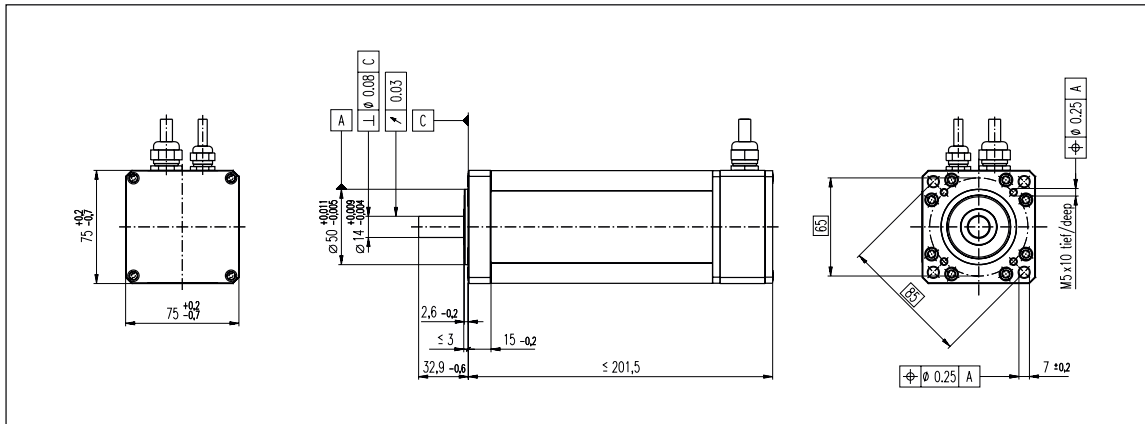
$$I_{max} = \frac{U_0}{R} = 34 \text{ [A]} \quad C_{max} = K_T \frac{U_0}{R} = 7.9 \text{ [Nm]}$$

2 MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

maxon DC motor

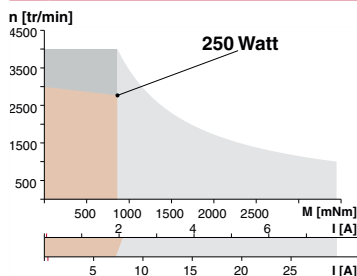
RE 75

75 mm, Commutation Graphite, 250 Watt



Caractéristiques moteur:		Numéros de commande										
Sans surveillance des balais		118819	118820	118821	118822	118823	118824	118825	118826	118827	118828	118829
Avec surveillance des balais		118832	118833	118834	118835	118836	118837	118838	118839	118840	118841	118842
1	Puissance conseillée	W	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250
2	Tension nominale	Volt	12.0	24.0	36.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0
3	Vitesse à vide	tr/min	1850	2770	2890	3100	2480	2300	1940	1550	1270	1150
4	Couple de démarrage	Nm	6.27	10.9	11.4	12.3	9.72	8.83	7.87	6.23	4.93	4.48
5	Pente vitesse/couple	tr/min/mNm	0.314	0.263	0.259	0.257	0.260	0.264	0.250	0.253	0.261	0.265
6	Courant à vide	mA	571	520	367	306	214	190	147	105	79	69
7	Courant de démarrage	A	108	136	98.4	84.5	53.5	45.0	33.9	21.4	13.8	11.4
8	Résistance aux bornes	Ohm	0.111	0.176	0.366	0.568	0.897	1.07	1.42	2.24	3.47	4.21
9	Vitesse limite	tr/min	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000	4000
10	Courant permanent max.	A	10.00	9.70	7.23	5.98	4.89	4.53	3.98	3.21	2.61	2.38
11	Couple permanent max.	mNm	581	775	841	869	889	888	924	933	928	933
12	Puissance max. fournie à la tension nom.	W	273	748	838	973	618	521	393	249	161	133
13	Rendement max.	%	77	84	85	86	86	86	86	85	84	84
14	Constante de couple	mNm/A	58.1	79.9	116	145	182	196	233	291	356	392
15	Constante de vitesse	tr/min/V	164	119	82.1	65.7	52.6	48.7	41.1	32.9	26.8	24.3
16	Constante de temps mécanique	ms	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4
17	Inertie du rotor	gcm ²	1400	1460	1420	1400	1380	1360	1420	1400	1360	1340
18	Inductivité	mH	0.04	0.08	0.16	0.25	0.39	0.46	0.64	1.01	1.51	1.83
19	Résistance therm. carcasse/air ambiant	K/W	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3
20	Résistance therm. rotor/carcasse	K/W	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
21	Constante de temps thermique du bobinage	s	100	110	100	100	99	97	100	100	97	95

Plages d'utilisation



Légende

- Plage de puissance conseillée
- Plage de fonctionnement permanent. Compte tenu des résistances thermiques (lignes 19 et 20) et de la température ambiante à 25°C, la température max. du rotor sera atteinte. = Limite thermique.
- Fonctionnement intermittent. La surcharge doit être de courte durée.

- 118829 Moteur avec bobinage à haute résistance
- 118821 Moteur avec bobinage à basse résistance

Explications page 36

Programme Stock

- Programme Standard
- Programme Spécial (sur demande!)

Système de surveillance des balais (Option)
Le signal de sortie est donné par un contact unipolaire d'ouverture.

Puissance applicable au contact max. 3 W
Tension de coupure max. 150 VDC
Courant de coupure max. 0.25 ADC

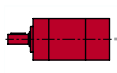
Presse-étoupe PG 7
diamètre d'ouverture 5 - 7 mm
Connectique moteur 6 mm
Casse à câble rond 2 x 4 mm²
Presse-étoupe PG 13
diamètre d'ouverture 8 - 15 mm
section recommandée du câble 2 x 4 mm²
Jeu axial < 0,15 mm

Roulements à billes (fixe sur la face avant)
Charge maximum des roulements axiale (dynamique) 70 N
radiale (à 5 mm de la face) 350 N
Chassage (statique) 420 N
(statique, axe soutenu) 12000 N
Températures d'utilisation -20/+100°C
Température rotor max. +125°C
Nombre de lames au collecteur 26
Poids 2800 g

Les caractéristiques moteur du tableau sont des valeurs nominales.
Option: Arbre de sortie avec clavette A5 de passage (5x5x25 DIN 6885) sur demande

Construction modulaire maxon

Réducteur planétaire
81 mm
20-120 Nm
Détail page 167



Frein 75 mm
24 VDC, 1.2 Nm
Détail page 189
Codeur digital HP HEDS 5540
500 imp., 3 canaux
Détail page 176
Codeur digital HP HEDL 5540
500 imp., 3 canaux
Détail page 178

FIG. 2.17: Fiche technique des moteurs RE75

Fonctionnement à vide Par fonctionnement à vide, on désigne le comportement du moteur seul (sans charge et sans couple extérieur) alimenté par sa tension nominale constante U_0 . Dès que le régime transitoire est terminé, la vitesse et le courant sont constants et on a

$$L \frac{di(t)}{dt} = 0 = u(t) - R i(t) - K_E \omega(t)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = 0 = K_T i(t) - R_f \omega(t)$$

De la première équation, on déduit le coefficient de force électromotrice K_E qui, comme on peut le constater, est très légèrement supérieur à K_T

$$K_E = \frac{U_0 - R I_0}{\omega_0} = \frac{48 - 1.42 \cdot 0.147}{203} = 0.235 \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right]$$

De la deuxième équation, on tire le coefficient de perte mécanique

$$R_f = \frac{K_T I_0}{\omega_0} = \frac{0.233 \cdot 0.147}{203} = 0.17 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/sec}} \right]$$

Connaissant ces valeurs, on peut calculer le gain du moteur qui relie la vitesse de rotation ω_∞ à la tension appliquée U_0

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = \frac{0.233}{0.233 \cdot 0.235 + 1.42 \cdot 0.17 \cdot 10^{-3}} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

On notera que le gain ainsi trouvé est pratiquement égal à la constante de vitesse fournie par le constructeur

$$K_{mot,c} = 41.1 \left[\frac{\text{tr/min}}{\text{V}} \right] = 4.3 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

Remarque Comme mentionné plus haut, on peut voir que le produit des paramètres de puissance est beaucoup plus important que le produit des paramètres de perte

$$K_T K_E = 55 \cdot 10^{-3} \gg R R_f = 0.24 \cdot 10^{-3}$$

2.7.3 Comportement dynamique

Dans le cas où l'on bloque le rotor, le comportement électrique est décrit par la constante de temps

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 0.45 [ms]$$

Inversement, si on fait tourner sur le rotor avec le circuit électrique ouvert, sa dynamique est décrite par

$$\tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 840 [ms]$$

Ceci dit, il est très important de réaliser que, à cause du couplage électromécanique-mécanique, ces deux temps caractéristiques n'ont aucun intérêt pratique dès l'instant où le moteur est entraîné par une tension électrique. Le comportement dynamique du moteur ne peut alors être connu qu'à partir de l'analyse des pôles de sa fonction de transfert

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}$$

Dans le cas particulier du moteur RE75, elle vaut

$$G_{mot}(s) = 4.23 \frac{1}{1 + \frac{1}{272} s + \frac{1}{(778)^2} s^2}$$

On en déduit immédiatement le gain statique du moteur qui relie sa vitesse à la tension appliquée et les pôles de $G_{mot}(s)$

$$K_{mot} \equiv \frac{\omega_\infty}{U_0} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad p_{1,2} = \begin{cases} -1901 & [1/\text{sec}] \\ -319 & [1/\text{sec}] \end{cases}$$

Ceux-ci nous permettent de calculer les constantes de temps du moteur représenté par un modèle d'ordre 2

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = 0.53 [\text{msec}] \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} = 3.1 [\text{msec}]$$

et de décrire le moteur par sa fonction de transfert d'ordre 2

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)} \quad (2.87)$$

Modèle d'ordre 1 Dans le cas où on néglige l'effet de l'inductance, on obtient un modèle approximatif d'ordre 1 du moteur suffisant pour une première évaluation du comportement dynamique du moteur. La fonction de transfert devient alors

$$\begin{aligned} G_{mot}(s) &\equiv K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}} \\ &\simeq \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E + R R_f}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} K_{mot} &= \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \simeq \frac{K_T}{K_T K_E} = \frac{1}{K_E} = 4.23 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \\ \tau_{mot} &= \frac{J R}{K_T K_E + R R_f} \simeq \frac{J R}{K_T K_E} = 3.7 [\text{msec}] \simeq \tau_1 + \tau_2 \end{aligned}$$

La valeur de la constante de temps ainsi trouvée est très proche de celle proposée par la fiche technique $\tau_{mot} = 4 [\text{msec}]$. On notera que la constante de temps du moteur

est pratiquement égale à la somme des deux constantes de temps du système d'ordre 2 et qu'elle est plus grande que la constante de temps électrique mais beaucoup plus petite que la constante de temps mécanique

$$\tau_{elt} < \tau_{mot} \ll \tau_{mec}$$

Les graphes de la figure 2.18 illustrent le comportement du moteur RE75 représenté par le modèle d'ordre 2 et celui fourni par le constructeur

$$G_{mot,c}(s) = 4.3 \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-3} s}$$

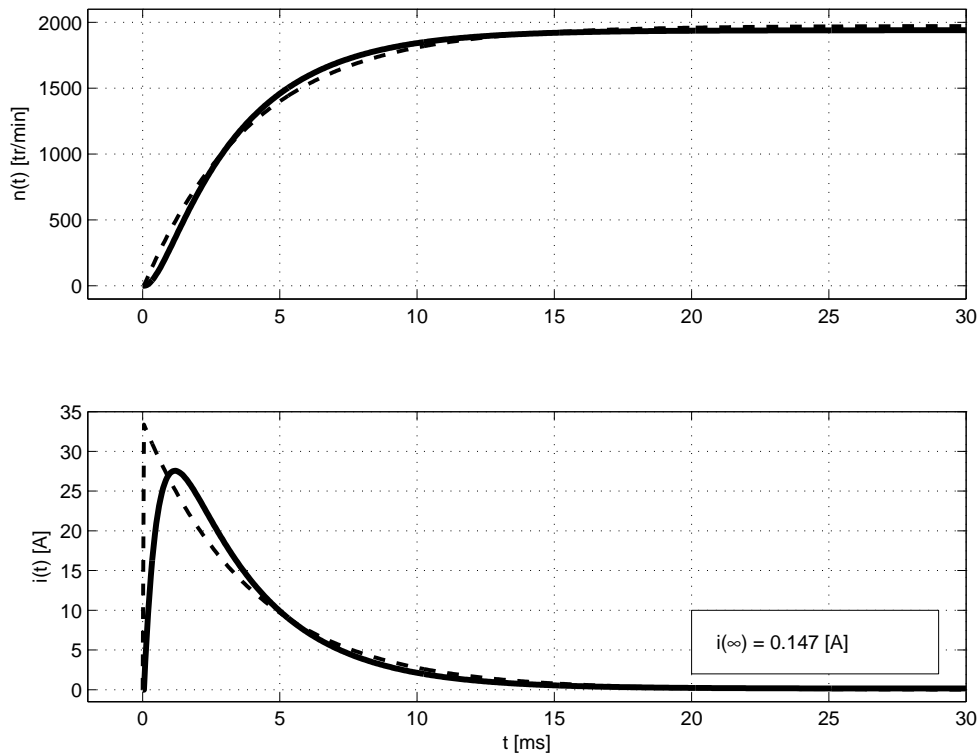


FIG. 2.18: Vitesse de rotation et courant d'un moteur DC avec son approximation d'ordre 1

2.7.4 Exemple

On charge un moteur RE75-118825 avec un disque en acier de diamètre $D = 20$ [cm], d'épaisseur $e = 2$ [cm] au travers d'un réducteur planétaire GP81 de rapport $N = 14$ et de rendement $\eta = 75\%$. Afin de chiffrer les frottements agissant sur la charge, on a lancé le disque seul sur son axe et on a observé qu'il s'arrête après environ 10 secondes. On demande de calculer

1. les paramètres du moteur K_E et R_f ;
2. les paramètres de la charge m_{ch} , J_{ch} et $R_{f,ch}$;
3. la charge totale vue par le moteur ;

4. les constantes de temps électrique et mécanique ;
5. la fonction de transfert du moteur et ses temps caractéristiques ;
6. son modèle d'ordre 1 ainsi que son gain et sa constante de temps ;
7. la vitesse de rotation n_∞ du moteur et le courant consommé i_∞ lorsque le moteur est alimenté par sa tension nominale.

Une fois ces calculs fait, on esquissera les évolutions temporelles de la vitesse et du courant.

Solution

Les paramètres intéressants fournis par la fiche technique du moteur RE75 sont les suivants

$$\begin{aligned} R &= 1.42 \Omega & U_0 &= 48 \text{ V} \\ L &= 0.64 \text{ mH} & I_0 &= 147 \text{ mA} \\ K_T &= 0.233 \text{ Nm/A} & n_0 &= 1940 \text{ rpm} \\ J_{mot} &= 1420 \text{ g cm}^2 \end{aligned}$$

Connaissant les valeurs SI de

$$\begin{aligned} J_{mot} &= 1420 \cdot 10^{-7} = 1.42 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\ \omega_\infty &= 2\pi n_0/60 = 203 \text{ rad/sec} \end{aligned}$$

on peut alors calculer les points suivants.

Paramètres du moteur K_E et R_f Du fonctionnement à vide du moteur, on tire

$$\begin{aligned} K_E &= \frac{U_0 - R I_0}{\omega_0} = \frac{48 - 1.42 \cdot 0.147}{203} = 0.235 \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right] \\ R_{f,mot} &= \frac{K_T I_0}{\omega_0} = \frac{0.233 \cdot 0.147}{203} = 0.17 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/sec}} \right] \end{aligned}$$

Paramètres de la charge Le disque en acier de rayon $R_d = 0.1$ [m] et d'épaisseur $e_d = 2$ [cm] possède une masse et une inertie valant

$$\begin{aligned} m_d &= \rho \pi R_d^2 e_d = 7800 \cdot \pi \cdot 0.1^2 \cdot 0.02 = 4.9 \text{ kg} \\ J_d &= m_d \frac{R_d^2}{2} = 0.0245 \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

Le lancement du disque seul lancé sur son axe a montré qu'il s'arrête après environ 10 secondes. On en déduit que sa constante de temps vaut environ

$$\tau_d \simeq \frac{t_{trans}}{5} = 2 \text{ sec}$$

et que les pertes mécaniques peuvent être représentées par un frottement visqueux dont le coefficient vaut

$$R_{f,d} = \frac{J_d}{\tau_d} = \frac{24.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2}{2 \text{ sec}} = 12.2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/(rad/sec)}$$

Charge totale vue par le moteur Comme le disque es relié au moteur à travers un réducteur de rapport $N = 14$ et de rendement $\eta = 75\%$, la charge totale entraînée par le moteur vaut

$$J = J_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} J_d = 0.309 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$R_f = R_{f,mot} + \frac{1}{\eta N^2} R_{f,d} = 0.25 \cdot 10^{-3} \text{ NM}/(\text{rad}/\text{sec})$$

Constantes de temps électrique et mécanique Par définition, celles-ci valent

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 0.45 \text{ msec}, \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 1.22 \text{ sec}$$

Fonction de transfert du moteur avec sa charge On a vu plus haut que la fonction de transfert d'un moteur s'écrit

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}$$

On en déduit son gain

$$K_{mot} \equiv \frac{\omega_\infty}{U_0} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = 4.22 \text{ rad}/\text{sec}/\text{V}$$

qui peut être calculé par rapport à $n_\infty = \omega_\infty / 2\pi / 60$

$$K_{mot,n} \equiv \frac{n_\infty}{U_0} = K_{mot} \frac{60}{2\pi} = 40.3 \text{ rpm}/\text{V}$$

Le dénominateur de $G_{mot}(s)$

$$D(s) = 1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}$$

$$= 1 + 7.95 \cdot 10^{-3} s + 3.59 \cdot 10^{-6} s^2$$

permet de calculer les pôles et constantes de temps du moteur avec sa charge

$$p_{1,2} = \begin{cases} -134 & 1/\text{sec} \\ -2086 & 1/\text{sec} \end{cases} \Rightarrow \tau_{12} \equiv \frac{1}{|p_{1,2}|} = \begin{cases} 7.5 & \text{msec} \\ 0.5 & \text{msec} \end{cases}$$

Modèle d'ordre 1 Dans le cas où un des temps caractéristiques est très petit par rapport à l'autre, on peut considérer que le système d'ordre 2 peut être assimilé à système d'ordre 1 :

$$D(s) = (1 + s\tau_1) \cdot (1 + s\tau_2)$$

$$= 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2$$

$$\simeq 1 + s(\tau_1 + \tau_2)$$

Ce qui conduit à un modèle décrit par

$$G_{mot,n}(s) \simeq K_{mot,n} \frac{1}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{40.3 \text{ [rpm}/\text{V}]}{1 + 8 \cdot 10^{-3} s}$$

Évolution de la vitesse et du courant En régime permanent et à tension nominale, on a :

$$n_{\infty} = U_0 K_{mot,n} \simeq 1936 \text{ rpm}$$

$$i_{\infty} = \frac{U_0 - K_E \omega_{\infty}}{R} \simeq 0.22 \text{ A}$$

L'évolution de la vitesse de rotation et du courant consommé est illustrée par les graphes de la figure 2.19 où l'on a porté également les résultats de l'approximation d'ordre 1.

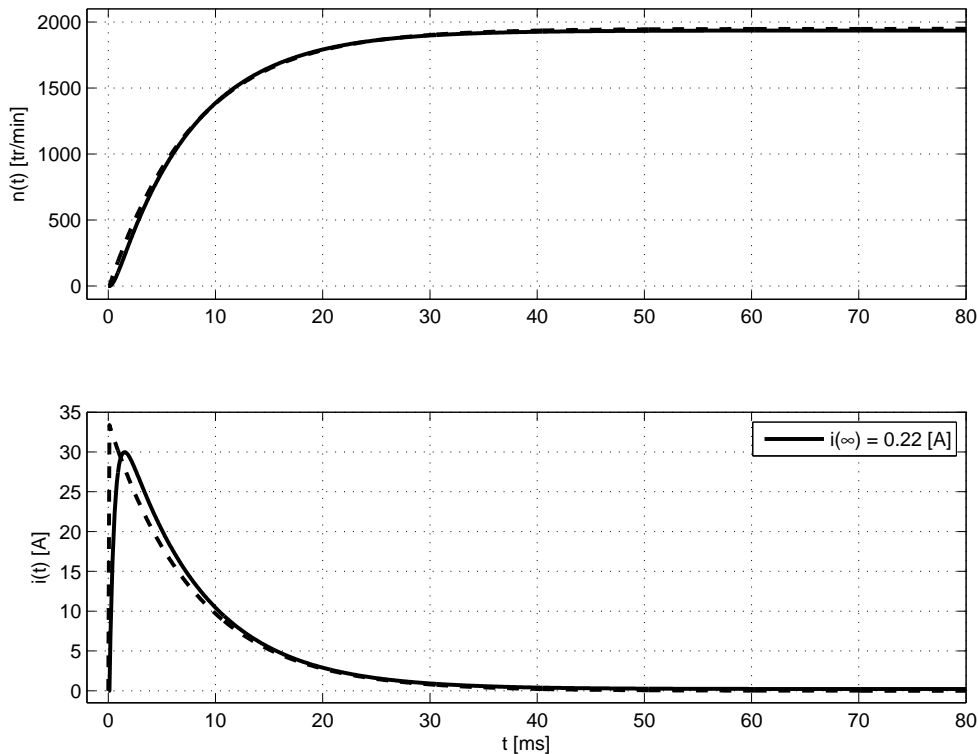


FIG. 2.19: Vitesse et courant d'un moteur DC chargé par un disque

2.8 Simulation d'un moteur DC

Dans cette section, on montre comment on peut obtenir des informations détaillées concernant le fonctionnement d'un moteur DC grâce à la simulation et, plus particulièrement, comparer les réponses du modèle complet (ordre 2) avec celles de son approximation d'ordre 1.

Remarque liminaire Matlab travaille avec des objets "fonction de transfert" définis par la commande `tf`. Grâce à cela, comme on va le voir, il est extrêmement simple de décrire des systèmes linéaires et d'analyser leur comportement comme on le ferait sur une feuille de papier.

Initialisation On doit d'abord initialiser le programme Matlab et fournir les grandeurs de la fiche technique.

```
% Simulation d'un moteur DC sans charge
% fmy - janvier 2006
clear all; close all; format compact; clc

% fiche technique du moteur RE075
U0 = 48;          % tension nominale
I0 = 0.147;       % courant à vide
n0 = 1940;       % vitesse à vide en tr/min
KT = 0.233;      % cte de couple
Kv = 41.1;       % cte de vitesse
Jm = 0.142e-3;   % inertie du rotor
R = 1.42;        % résistance aux bornes
L = 0.64E-3;     % inductance aux bornes
```

Paramètres On calcule ensuite les paramètres intéressants du moteur.

```
% parametres du moteur
w0 = n0/60*2*pi    % vitesse à vide en rad/sec
KE = (U0 - R*I0)/w0 % constante de fem
Rf = KT*I0/w0      % coeff. de frottement visqueux
Cmax = KT*U0/R     % couple maximum
Telt = L/R         % cte de temps electrique
Tmec = Jm/Rf       % cte de temps mecanique
Tmot = Jm*R/KT/KE  % cte de temps du moteur
KT_KE = KT*KE      % termes de puissance
R_RF = R*Rf        % termes de pertes
```

Fonction de transfert du moteur Avec Matlab, le calcul de la réponse d'un système linéaire se fait à partir de la donnée de la fonction de transfert. Dans notre cas :

$$G_{mot}(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U(s)} = K_{mot} \frac{1}{1 + \frac{1}{Q_0\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$= \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{J L}{K_T K_E + R R_f}}$$

Cette fonction de transfert est définie à l'aide de son gain, son numérateur et son dénominateur

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \quad N(s) = 1 \quad D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2$$

```
% fonction de transfert du moteur
Kmot = KT / (KT*KE + R*Rf)
```

2 MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

```

wn    = sqrt((KT*KE + R*Rf)/(Jm*L))
Q0_wn = (KT*KE + R*Rf)/(Jm*R + L*Rf)
Q0    = Q0_wn / wn
num_Gmot = 1 ;
den_Gmot = [1/wn^2, 1/Q0_wn, 1]
Gmot = tf(Kmot*num_Gmot,den_Gmot) ;

```

Vitesse de rotation Le calcul de la réponse du moteur à un saut de tension se fait avec la fonction `lsim` (simulation de systèmes linéaires) à laquelle on passe la fonction de transfert et le signal d'entrée.

```

% grandeurs temporelles
tmax = 30e-3 ;      Npts = 1000 ;
dt = tmax/Npts ;   tt = 0 :dt :tmax-dt ;

% reponse indicielle
Umot = U0*ones(size(tt)) ;    % tension appliquée
Umot(1) = 0 ;
wt = lsim(Gmot,Umot,tt) ;     % rotation en rad/sec
nt = wt/2/pi*60 ;            % rotation en tr/min

% graphes
subplot(2,1,1) ;
plot(tt*1000,nt,'LineWidth',2) ; grid on ;
ylabel('n(t) [tr/min]') ;
axis([-2,30,-100,2100]) ;

```

Courant consommé Comme on vient de le voir, les réponses temporelles sont calculées à partir des fonctions de transfert. Pour calculer le courant consommé, il faut donc définir une fonction de transfert correspondant au courant. Celle-ci est tout simplement égale à l'admittance représentée par la résistance et l'inductance

$$I(s) \equiv \frac{U_Z(s)}{Z(s)} = U_Z(s) Y(s) = (U(s) - K_E \Omega(s)) \frac{1}{R + sL}$$

Connaissant la tension aux bornes de l'admittance $Y(s)$

$$u_{RL}(t) = U_0 - K_E \omega(t)$$

on pourra calculer le courant $i(t)$ avec la fonction `lsim` puis le représenter dans un graphe.

```

% courant
Ys = tf(1, [L,R]) ;
ut_RL = Umot - KE*wt ;
it = lsim(Ys,ut_RL,tt) ;
it_inf = it(end)

```

```

% graphes
subplot(2,1,2) ;
plot(tt*1000,it,'LineWidth',2) ; grid on ;
ylabel('i(t) [A]') ;
xlabel('t [ms]'),
axis([-2,50,-1.5,35]) ;

% pose en p0 d'un rectangle blanc de cotes dp
p0 = [20,2] ; dp = [9,8] ;
px = p0(1)+[0,0,dp(1),dp(1)] ;
py = p0(2)+[0,dp(2),dp(2),0] ;
patch(px,py,'w') ;

% affichage du texte
texte = ['i(\infty) = ', num2str(it_inf,3), ' [A]'] ;
text(p0(1)+0.1*dp(1),p0(2)+0.5*dp(2),texte) ;

```

Dynamique du moteur Des informations particulières telles que les constantes de temps $\tau_{1,2}$ du moteur, la durée du régime transitoire, le courant et la vitesse maximums peuvent être affichées dans la fenêtre de commandes avec ces quelques lignes

```

% infos
p12 = roots(den)
tau_12 = 1./abs(p12)
t_trans = 5*max(tau_12)
i_max = max(it)
n_max = max(nt)

```

Approximation d'ordre 1 Pour terminer l'analyse temporelle, il est intéressant de comparer les résultats ci-dessus avec l'approximation d'ordre 1 proposée par le constructeur

$$G_{mot,1}(s) \simeq K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}}$$

```

% approximation d'ordre 1 (fiche technique)
K_mot = 41.1 ; % tr/min/V
tau_mot = 4e-3 ;
Gmot1 = tf(K_mot,[tau_mot,1]) ;
nt1 = lsim(Gmot1,Umot,tt) ;
it1 = U0/R*exp(-tt/tau_mot) ;
it1(1) = 0 ;
subplot(2,1,1) ; hold on ;
plot(tt*1000,nt1,' :') ;
subplot(2,1,2) ; hold on ;
plot(tt*1000,it1,' :') ;

```

On peut alors noter que l'approximation, bien que grossière, donne une assez bonne idée du comportement du moteur. Les graphes associés à ces calculs sont présentés dans la figure 2.20.

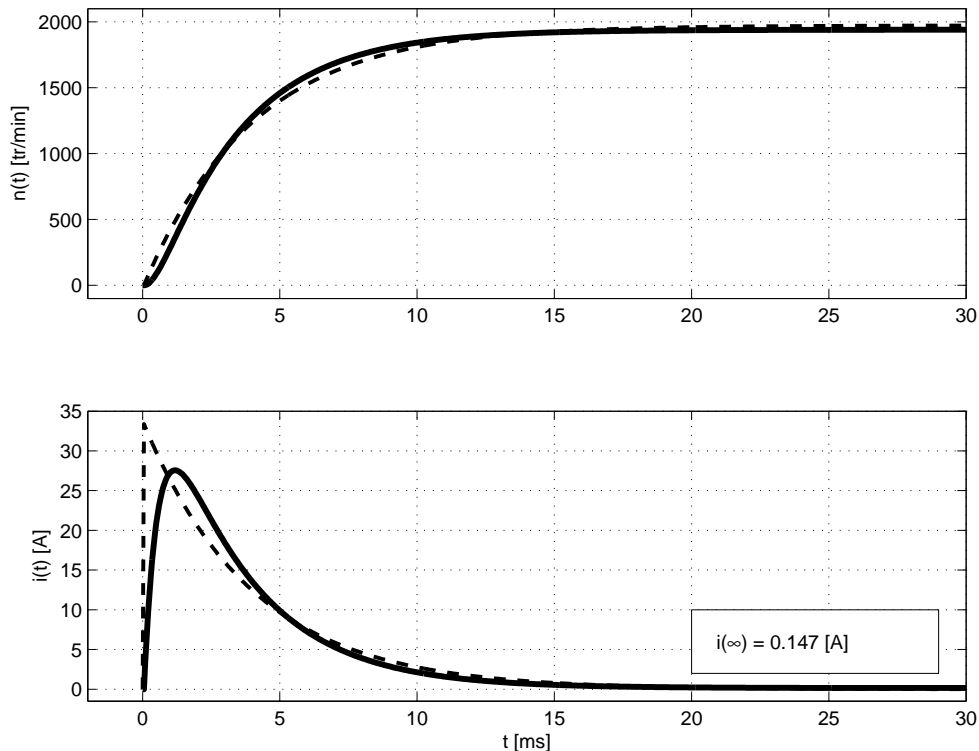


FIG. 2.20: Vitesse de rotation et courant d'un moteur DC

Réponse fréquentielle L'analyse du comportement du moteur peut être complétée par la représentation de sa réponse fréquentielle $G(j\omega)$. Dans Matlab, celle-ci se calcule aisément avec la fonction `freqs(num,den,w)`. Le code nécessaire pour le calcul et le traçage de la réponses fréquentielle est le suivant.

```
% reponse frequentielle
fmin =1 ; fmax = 1000 ;
ff = logspace(log10(fmin),log10(fmax),500) ;
Gmot_jw = freqs(num_Gmot,den_Gmot,2*pi*ff) ;
Gmot_db = 20*log10(abs(Gmot_jw)) ;

figure ;
subplot(2,1,1) ;
semilogx(ff,Gmot_db,'LineWidth',2) ; hold on ;
semilogx([fmin,fmax],[max(Gmot_db)-3]*[1,1]) ; grid on ;
title('Réponse fréquentielle d'un moteur DC') ;
ylabel('G_{dB}(f)') ;
subplot(2,1,2) ;
semilogx(ff, angle(Gmot_jw)/pi*180,'LineWidth',2) ; grid on ;
```

```
ylabel('\angle G(jf)');
xlabel('fréquence [Hz]');
```

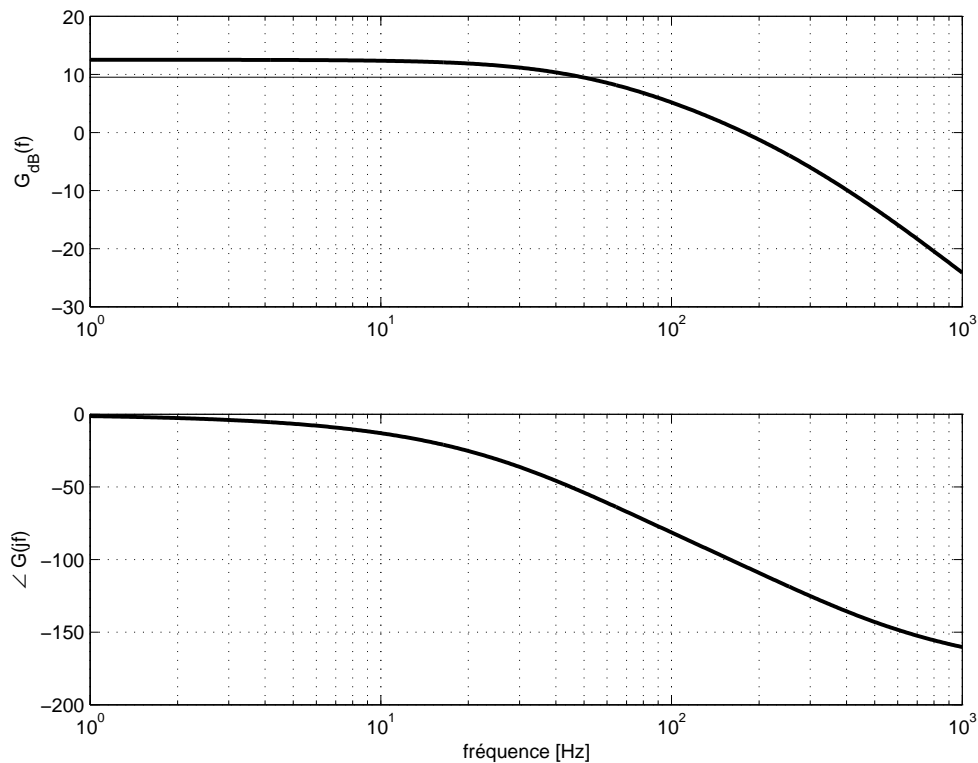


FIG. 2.21: Réponse fréquentielle d'un moteur DC

L'observation de la réponse fréquentielle montre que la bande passante du moteur à vide est légèrement inférieure à 50Hz et que le moteur est donc capable de suivre une commande sinusoïdale d'une dizaine de Hz.

2.9 Conclusion générale

À l'issue de ce chapitre, il est intéressant de remarquer que pour étudier les systèmes analogiques on est amené à devoir utiliser l'ensemble des connaissances acquises dans la formation de base des ingénieurs à savoir les mathématiques, la mécanique, l'électricité, la physique, l'électromagnétisme, la simulation numérique.

Comme on a pu le constater, l'étude de ces systèmes nous oblige à faire la synthèse de notre savoir; chaque branche étudiée doit donc s'ouvrir aux autres sciences et être maîtrisée si l'on veut les appliquer au monde réel.

2.10 Exercices

Sanl 1 Le graphe de la figure 2.22 représente les résultats de mesure d'une bobine à noyau ferromagnétique. Proposez un modèle pouvant représenter ces résultats et tirez-en les valeurs des composants.

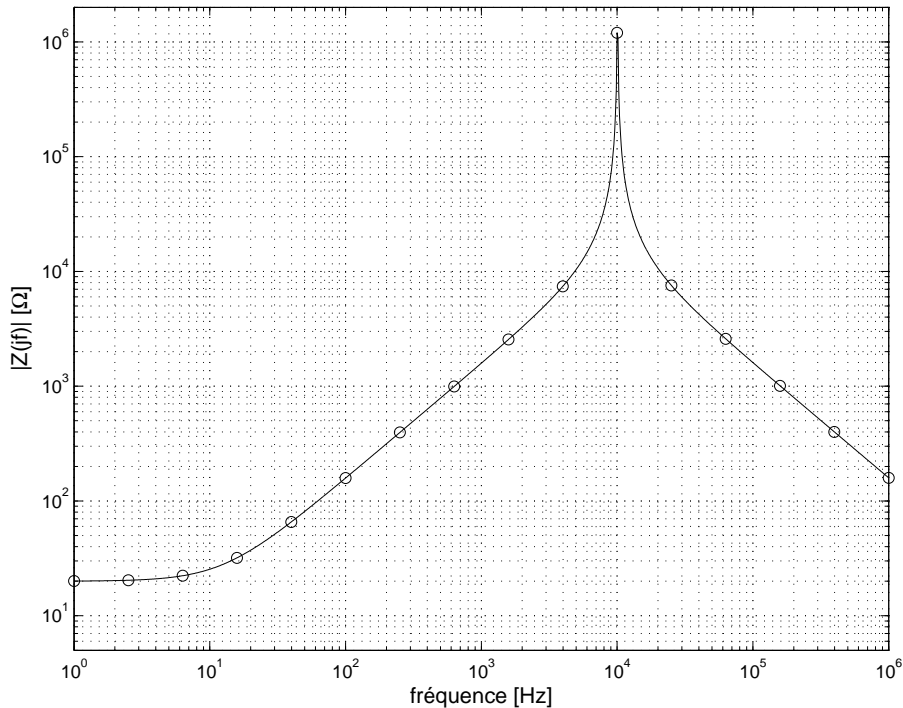


FIG. 2.22: Mesure de l'impédance d'une bobine

Sanl 2 On s'intéresse ici au mouvement d'une masse m suspendue à un ressort de constante k et d'amortissement λ .

1. Dessinez le schéma technologique représentant ce système et écrivez son équation différentielle en considérant qu'on applique à la masse une force $F(t)$.
2. Calculez la fonction de transfert $G(s)$ reliant la position $y(t)$ à la force $F(t)$; écrivez-la dans la forme canonique de Laplace. Tirez-en les expressions de ω_n , ζ et Q_0 .
3. Montrez que les pôles d'un système oscillant d'ordre 2 valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Sachant qu'on définit

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad \text{et} \quad \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

montrez que

$$\omega_n = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}}$$

4. L'application à l'instant $t = 0$ de la force $F(t) = -mg$ conduit au mouvement $y(t)$ présenté à la figure 2.23. Déduisez de ce graphe la constante de temps de l'amortissement et la période de l'oscillation. Tirez-en les valeurs numériques de ω_n , ζ et Q_0 .
5. Sachant que la masse m vaut 100 grammes, calculez la constante de rappel du ressort et le coefficient d'amortissement.
6. Comment justifiez-vous la valeur de la position finale ($\simeq -62$ mm) de la masse ?

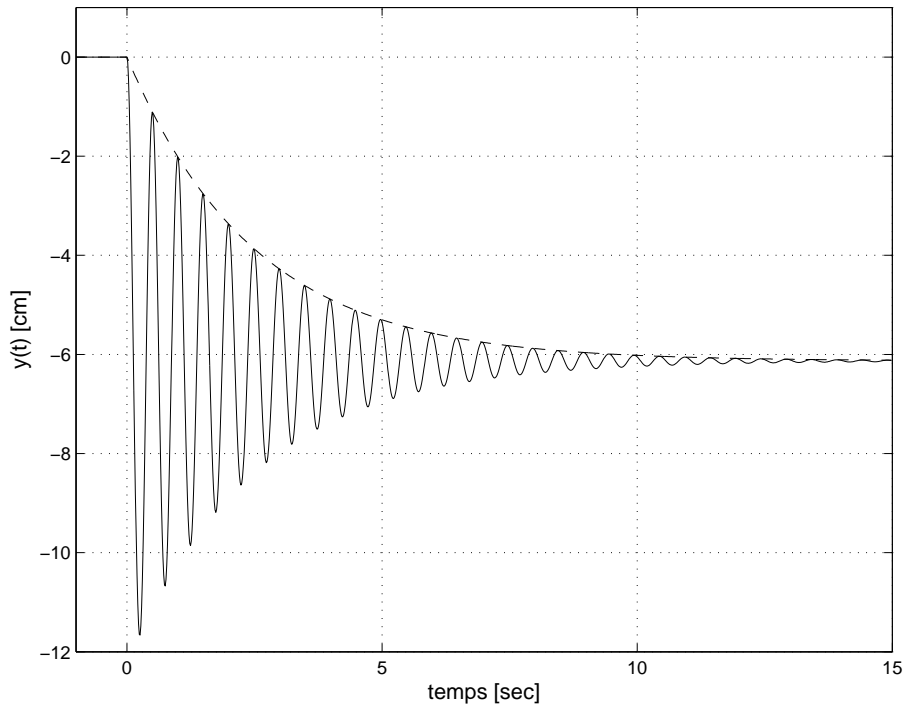


FIG. 2.23: Position d'une masse suspendue à un ressort

Sanl 3 On considère un seau d'eau de diamètre $D_1 = 25$ [cm] dont la base est percée d'un trou de diamètre $D_2 = 1$ [cm]. Admettant qu'on le remplit avec un débit constant de 1, 2 ou 3 [dl/sec], calculez la hauteur d'équilibre et le temps nécessaire pour l'atteindre. Quelle relation voyez-vous apparaître entre le débit, la hauteur atteinte et la durée de remplissage ?

Sanl 4 On s'intéresse ici au comportement d'une masse suspendue à un ressort dont on a mesuré la caractéristique $F(y)$. Celle-ci est manifestement non linéaire (figure 2.24). Le polynôme d'ordre 3 passant au mieux parmi les points mesurés est le suivant

$$F(y) = 11655 y^3 - 8365 y^2 + 2050 y - 160 \text{ [N]}$$

On notera que cette expression n'a pas de sens en dehors du domaine mesuré car pour une élongation nulle ($y = 0$), le ressort fournit une force négative ($F(0) = -160$ [N]).

2 MODÉLISATION DES SYSTÈMES ANALOGIQUES

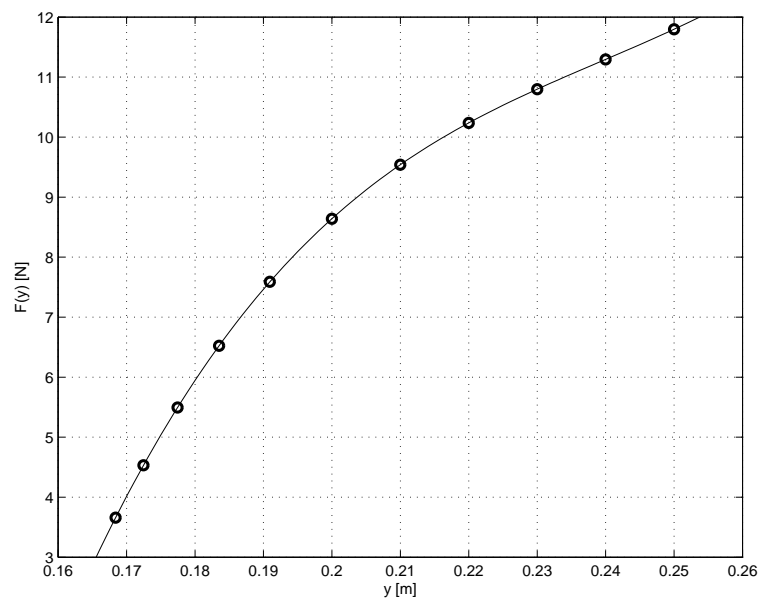


FIG. 2.24: Caractéristique statique d'un ressort

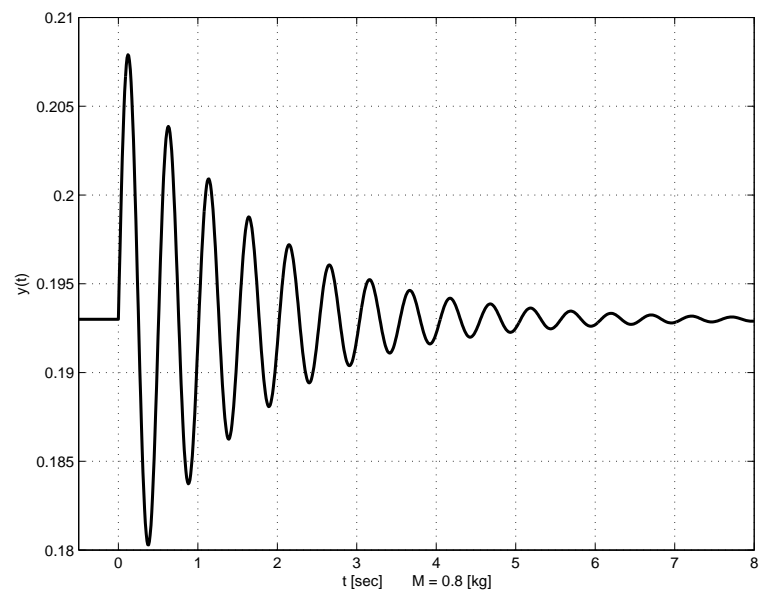


FIG. 2.25: Position d'une masse suspendue à un ressort

1. Sachant que le point de suspension du ressort est fixe, dessinez le schéma technologique représentant ce système et écrivez son équation différentielle linéaire autour du point d'équilibre fixé par le poids de la masse.
2. Admettant que les pertes sont faibles, rappelez sous forme littérale ce que valent la constante de temps d'amortissement et la période d'oscillation en fonction de k et m .
3. Considérant que la masse suspendue vaut 0.4, 0.8 ou 1.0 [kg] et sachant que le coefficient d'élasticité autour d'un point de fonctionnement est défini par

$$k = \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=Y_0} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

quels seront les positions d'équilibre et coefficients d'élasticité respectifs ?

4. Si la masse oscille légèrement autour de sa position d'équilibre, on peut considérer que le système est linéaire. L'enregistrement de la figure 2.25 permet d'estimer que le coefficient d'amortissement λ vaut environ 1 [N/(m/sec)]. Pour chacune des trois masses, calculez la période d'oscillation, la constante de temps et le nombre de périodes visibles.
5. A partir de l'enregistrement de la position d'une masse de 0.8 kg (figure 2.25), pouvez-vous trouver les coefficient d'élasticité k et de frottement λ du ressort ?

Sanl 5 On considère ici le comportement d'un petit moteur DC ($P=11\text{W}$, $D=32\text{mm}$, $L=45\text{mm}$) ; ses paramètres sont donnés dans le tableau 2.4. Calculez leurs valeurs SI et complétez le tableau.

Paramètres	Valeurs	Unités	Symboles	Valeurs SI	Unités SI
Tension nominale	18	V	U_0		V
Courant à vide	37	mA	$I_0 \equiv i_\infty$		A
Vitesse à vide	8000	tr/min	$\omega_0 \equiv \omega_\infty$		rad/sec
Inertie du rotor	18.4	gcm ²	J_{mot}		kgm ²
Résistance du bobinage	5.5	Ω	R		Ω
Inductance du bobinage	0.8	mH	L		H
Constante de couple	20.8	mNm/A	K_T		Nm/A
Constante de f.e.m			K_E		
Coeff. de frottement			R_f		

TAB. 2.4: Paramètres d'un moteur

1. Rappelez les équations différentielles du moteur DC. Que deviennent-elles en régime permanent ?
2. De ces deux équations, tirez les deux paramètres K_E et R_f manquants dans le tableau 2.4 ; précisez leurs unités.
3. Calculez la fonction de transfert du moteur $G_{mot}(s)$; exprimez-la dans la forme de Bode. Que vaut son gain (avec ses unités) ? Quelle signification lui donnez-vous ?

4. Calculez les pôles et les constantes de temps du moteur ; que pensez-vous de leurs valeurs respectives ? Pouvez négliger l'une d'entre elles ? Écrivez l'approximation d'ordre 1 de $G_{mot}(s)$.
5. Écrivez l'expression de la vitesse $\Omega(s)$. Que valent ses pôles ? Tirez-en la forme générale de $\omega(t)$. Calculez les vitesses $\omega(0_+)$ et $\omega(\infty)$ ainsi que $n(\infty)$ [tr/min]. Conclusion ?
6. Esquissez avec soin l'évolution de la vitesse du moteur lorsqu'on lui applique la tension nominale.

Sanl 6 On considère ici un micro-moteur DC 3257 Faulhaber dont la fiche technique est donnée à la figure 2.26. Pour le moteur 24V, on demande :

1. De la fiche technique, extrayez les informations nécessaires à la modélisation du moteur.
2. Quel est le modèle d'ordre 1 proposé par le constructeur ? Que vaut le couple maximum que peut fournir le moteur ?
3. Calculez les coefficient de fem et de frottement ainsi que les constantes de temps électrique et mécanique.
4. Calculez la fonction de transfert du moteur. Tirez-en le gain, les pôles et constantes de temps du modèle d'ordre 2. Est-il raisonnable d'adopter un modèle d'ordre 1 ? Si oui, que vaut-il ?
5. Comparez ces grandeurs avec celles fournies par le constructeur ainsi qu'avec τ_{elt} et τ_{mec} .
6. On alimente le moteur à sa tension nominale ; calculez la vitesse de rotation du moteur et le courant consommé en régime permanent.
7. Esquissez les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$.

Sanl 7 On charge un moteur Faulhaber 3257-24V avec un disque en acier de diamètre $D = 8$ [cm], d'épaisseur $e = 2$ [cm] au travers d'un réducteur G32-3 de rapport $N = 14$ et de rendement $\eta = 80\%$. Admettant que les pertes vues par le moteur ont simplement doublé sous l'effet de la charge, calculez

1. le modèle d'ordre 1 de l'ensemble ;
2. la durée du régime transitoire, le courant consommé i_∞ et la vitesse n_∞ de la charge.

Sanl 8 On considère ici un micro-moteur DC RE13-118467 de faible puissance et haute vitesse. De la fiche technique, on a tiré les paramètres présentés dans le tableau 2.5.

1. Quel est le modèle d'ordre 1 proposé par le constructeur ? Que vaut le couple maximum que peut fournir le moteur ?
2. Calculez le coefficient de frottement ainsi que les constantes de temps électrique et mécanique.

DC-Micromotors

Graphite Commutation

70 mNm

For combination with
Gearheads:
32/3, 38/1, 38/2
Encoders:
IE2 – 64 ... 512, 5500, 5540

Series 3257 ... CR		3257 G	012 CR	024 CR	048 CR	
1	Nominal voltage	U_N	12	24	48	Volt
2	Terminal resistance	R	0,41	1,63	6,56	Ω
3	Output power	$P_2 \text{ max}$	79,2	83,2	84,5	W
4	Efficiency	$\eta \text{ max}$	83	83	83	%
5	No-load speed	n_0	5 700	5 900	5 900	rpm
6	No-load current (with shaft \varnothing 5,0 mm)	I_0	0,258	0,129	0,064	A
7	Stall torque	M_H	531	539	547	mNm
8	Friction torque	M_R	4,9	4,9	4,9	mNm
9	Speed constant	k_n	500	253	125	rpm/V
10	Back-EMF constant	k_E	2,00	3,95	7,98	mV/rpm
11	Torque constant	k_M	19,1	37,7	76,2	mNm/A
12	Current constant	k_I	0,052	0,027	0,013	A/mNm
13	Slope of n-M curve	$\Delta n / \Delta M$	10,7	10,9	10,8	rpm/mNm
14	Rotor inductance	L	70	270	1 100	μH
15	Mechanical time constant	τ_m	4,7	4,7	4,7	ms
16	Rotor inertia	J	42	41	42	gcm^2
17	Angular acceleration	$\alpha \text{ max}$	130	130	130	$\cdot 10^3 \text{ rad/s}^2$
18	Thermal resistance	$R_{th 1} / R_{th 2}$	2 / 8			K/W
19	Thermal time constant	τ_{w1} / τ_{w2}	17 / 810			s
20	Operating temperature range:					
	- motor		- 30 ... + 125			$^{\circ}\text{C}$
	- rotor, max. permissible		+ 155			$^{\circ}\text{C}$
21	Shaft bearings		ball bearings, preloaded			
22	Shaft load max.:					
	- with shaft diameter		5			mm
	- radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		50			N
	- axial at 3 000 rpm		5			N
	- axial at standstill		50			N
23	Shaft play:					
	- radial	\leq	0,015			mm
	- axial	$=$	0			mm
24	Housing material		steel, black coated			
25	Weight		242			g
26	Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face			
Recommended values						
27	Speed up to	$n_e \text{ max}$	5 000	5 000	5 000	rpm
28	Torque up to	$M_e \text{ max}$	70	70	70	mNm
29	Current up to (thermal limits)	$I_e \text{ max}$	4,60	2,30	1,15	A

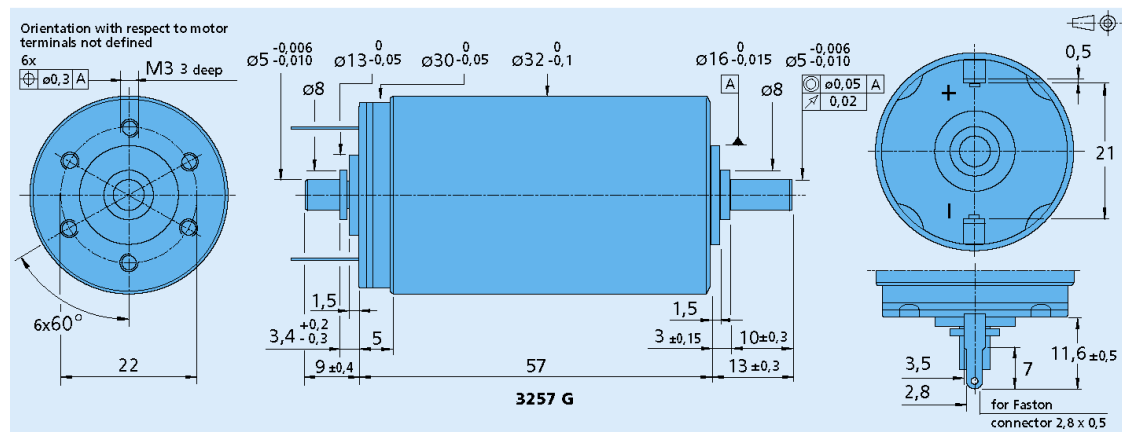


FIG. 2.26: Fiche technique des moteurs Faulhaber 3257

Paramètres	Symboles	Valeurs	Unités
Tension nominale	U_0	9.0	V
Courant à vide	I_0	28	mA
Vitesse à vide	n_0	17200	tr/min
Constante de couple	K_T	4.95	mNm/A
Inertie du rotor	J_{mot}	0.484	gcm ²
Résistance du bobinage	R	3.5	Ω
Inductance du bobinage	L	0.11	mH
Constante de vitesse	K_{mot}	1930	tr/min/V
Cte de temps du moteur	τ_{mot}	7	ms
Puissance	P	2.5	W
Dimensions	$D \times L$	13x32	mm ²
Poids	m	25	gr

TAB. 2.5: Paramètres d'un moteur DC RE13

3. Dessinez le schéma fonctionnel du moteur avec le couple extérieur.
4. Calculez les fonctions de transfert tension-vitesse $G_{mot}(s) = \Omega(s)/U(s)$, tension-position $G_\theta(s) = \Theta(s)/U(s)$ et couple-vitesse $G_C(s) = \Omega(s)/C_{ext}(s)$. Écrivez-les sous forme canonique.
5. Que valent le gain, les pôles et constantes de temps du moteur ?
6. Comparez ces grandeurs avec celles fournies par le constructeur ainsi que τ_{elt} et τ_{mec} . Est-il raisonnable d'adopter un modèle d'ordre 1 ? Si oui, que vaut-il ?
7. Est-il raisonnable de négliger les pertes ? Chiffrez l'erreur ainsi commise.
8. On alimente le moteur à sa tension nominale ; calculez la vitesse de rotation du moteur et le courant consommé en régime permanent.
9. Esquissez les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$.
10. On freine le moteur avec un couple extérieur $C_{ext} = 5$ [mNm] ; que valent alors la vitesse de rotation ω_∞ du moteur et le courant consommé i_∞ ?