

3 Éléments de régulation automatique

La régulation automatique est une technique de l'ingénierie offrant les méthodes et les outils nécessaires à la prise de contrôle d'une ou plusieurs grandeurs physiques d'un système en vue d'en imposer le comportement. Avec le qualificatif *automatique*, on admet qu'aucune intervention humaine n'est nécessaire pour atteindre cet objectif.

Ce chapitre a pour but de sensibiliser l'étudiant à ce qu'est la régulation automatique et lui donner une information suffisante pour aborder des problèmes simples.

3.1 Schémas fonctionnels

Lorsque l'on veut décrire avec précision un système réel, on découvre fréquemment que les choses ne sont pas simples, en particulier parce que des interactions existent entre les parties. La démarche la plus simple consiste alors à remplacer chaque partie par des blocs fonctionnels que l'on relie entre eux. La liaison des blocs entre eux forme un schéma fonctionnel.

Cette représentation est abondamment utilisée car elle permet d'analyser un système dans son ensemble sans s'encombrer des détails de réalisation. De plus, elle correspond aux représentations utilisées dans les logiciels où la programmation est faite sous forme graphique (Simulink, Spice, etc).

3.1.1 Schéma à contre-réaction

Un schéma de base important est celui des systèmes à rétroaction tel qu'il est illustré par la figure 3.1. Il est constitué d'une branche directe dans laquelle on trouve le bloc $G(s)$ et d'une branche de rétroaction $H(s)$ aboutissant au sommateur Σ . Celui-ci peut faire la somme ou la différence des deux signaux ; dans le premier cas, on parlera de réaction positive et, dans le deuxième, de réaction négative ou plus simplement de contre-réaction.

L'écriture des équations correspondantes et leur résolution nous permettent de remplacer l'ensemble du schéma fonctionnel par un seul bloc : la fonction de transfert en boucle fermée $G_f(s)$. Les équations correspondant au schéma sont :

$$E(s) = W(s) - F(s)$$

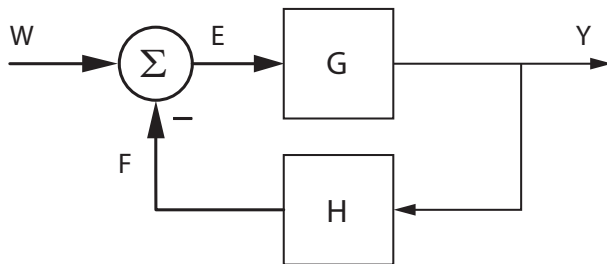


FIG. 3.1: Système à contre-réaction

$$F(s) = Y(s) H(s)$$

$$Y(s) = E(s) G(s)$$

En portant la première et la deuxième équations dans la troisième, il vient

$$\begin{aligned} Y(s) &= (W(s) - F(s)) G(s) \\ &= (W(s) - Y(s) H(s)) G(s) \\ &= W(s) G(s) - Y(s) H(s) G(s) \end{aligned}$$

En regroupant les termes en $Y(s)$, on obtient la relation fondamentale des systèmes à contre-réaction

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} W(s) \quad (3.1)$$

On peut ainsi définir la fonction de transfert en boucle fermée

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad (3.2)$$

Cette fonction de transfert est suffisamment importante pour qu'on lui donne le nom de "*formule de l'automaticien*". On notera que le produit $G(s) H(s)$ forme la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G_o(s) \equiv \frac{F(s)}{E(s)} = G(s) H(s) \quad (3.3)$$

Dans cas particulier fréquent où la branche de retour représentée par $H(s)$ est un simple fil (retour unitaire), on a bien évidemment

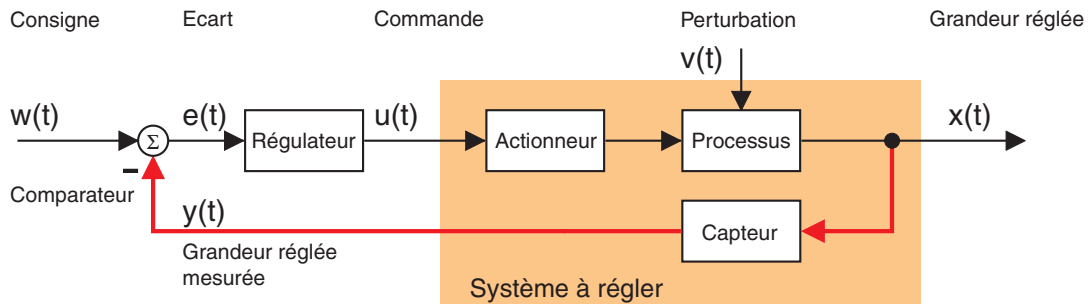
$$H(s) = 1, F(s) = Y(s)$$

d'où

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s), \quad G_f(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.4)$$

3.1.2 Schéma général d'un système asservi

Un système asservi est généralement décrit à l'aide d'un schéma fonctionnel (figure 3.2) constitué de blocs ayant chacun une signification précise (cf. tableau). Un



Élément	Fonction	Exemple
Comparateur	Il construit le signal d'erreur	Amplificateur différentiel
Régulateur	Il traite le signal d'erreur et construit le signal de commande	Régulateur PID
Organe de commande	Il agit directement sur le processus	Amplificateur de puissance
Processus	L'installation à asservir	Moteur
Capteur	Il forme une image $y(t)$ aussi fidèle que possible de la grandeur réglée $x(t)$	Dynamo tachymétrique

Signal	Remarques	Exemple
Consigne $w(t)$	Signal à poursuivre, généralement déterministe et défini pour une application donnée	Une rampe [V]
Grandeur réglée $x(t)$	Grandeur physique (avec ses unités propres [°C], [m], [m/s])	La vitesse de rotation [rad/sec]
Grandeur réglée mesurée $y(t)$	Image de la grandeur physique, généralement une tension électrique [V]	L'image de la vitesse [V]
Commande $u(t)$	Signal délivré par le régulateur à l'actuateur	Tension de commande [V]
Perturbation $v(t)$	Signal aléatoire représentant les perturbations intervenant sur le système à régler	Couple extérieur [Nm]
Écart $e(t)$	Différence entre la consigne et la grandeur réglée mesurée $y(t)$	Tension d'écart [V]

FIG. 3.2: Éléments constitutifs d'un système asservi

exemple de composants et signaux est donné dans le cas particulier d'un asservissement de la vitesse de rotation d'un moteur électrique. On notera qu'avec le schéma adopté, le **système à régler** comprend tous les éléments (actionneur, processus, capteur, etc) se trouvant entre la commande $u(t)$ délivrée par le régulateur et la grandeur mesurée $y(t)$.

3.1.3 Fonctions de transfert d'un système asservi

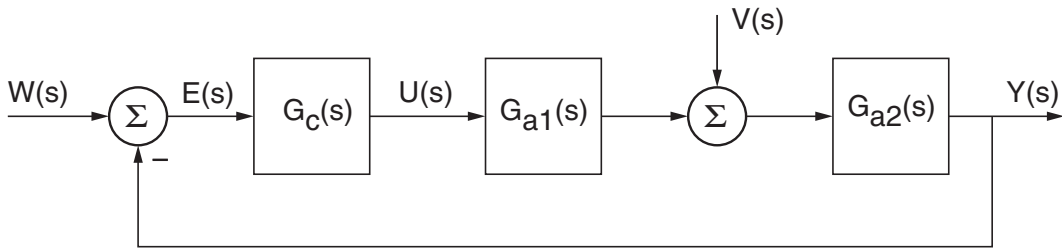


FIG. 3.3: Schéma fonctionnel universel

Les techniques de transformation et réduction des schémas fonctionnels permettent de présenter le schéma fonctionnel d'un système asservi quelconque sous la forme universelle de la figure 3.3. On notera que ce schéma universel est à retour unitaire et que les fonctions de transfert décrivant l'ensemble du système asservi sont

- le régulateur ou organe de commande $G_c(s)$;
- la partie $G_{a1}(s)$ du processus avant le signal de perturbation $v(t)$;
- la partie $G_{a2}(s)$ du processus après le signal de perturbation $v(t)$.

À partir de ces fonctions de transfert particulières, on peut calculer les fonctions de transfert générales décrivant :

1. Le *système à régler*

$$G_a(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{v(t)=0} = G_{a1}(s) G_{a2}(s) \quad (3.5)$$

2. Le *système en boucle ouverte*

$$G_o(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{E(s)} \right|_{\text{boucle ouverte}} = G_c(s) G_a(s) \quad (3.6)$$

Dans ce cas, la *branche de retour n'est pas reliée au comparateur*.

3. Le *système en régulation de correspondance*

$$G_w(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{W(s)} \right|_{v(t)=0} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.7)$$

dont le but est de suivre la consigne $w(t)$.

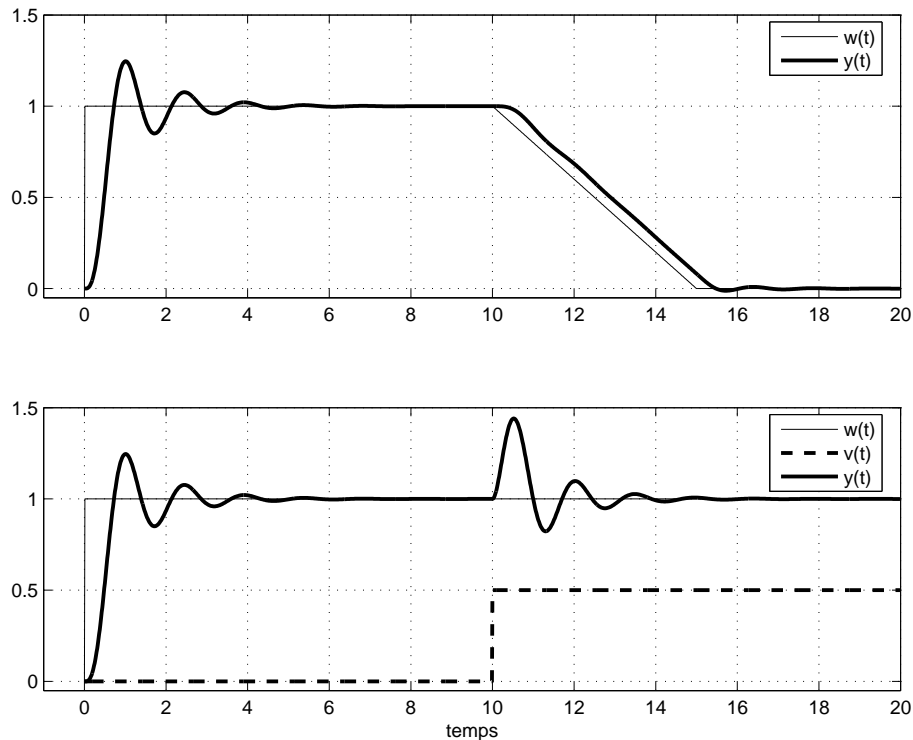


FIG. 3.4: Régulation de correspondance (en haut) et de maintien (en bas)

4. Le système en *régulation de maintien*

$$G_v(s) \equiv \left. \frac{Y(s)}{V(s)} \right|_{w(t)=0} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.8)$$

qui a pour tâche de maintenir la grandeur réglée $y(t)$ égale à la consigne $w(t)$ malgré la présence de perturbations $v(t)$.

La figure 3.4 illustre les réponses temporelles obtenues dans les deux modes de régulation automatique. Dans la réalité, les deux modes coexistent obligatoirement car le régulateur réagit à toute forme d'erreur quelle qu'en soit la cause (consigne variable $w(t)$ ou perturbation aléatoire $v(t)$). La réponse complète se calcule simplement par superposition des deux réponses indépendantes

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_v(s) = G_w(s)W(s) + G_v(s)V(s) \quad (3.9)$$

Par transformation inverse de Laplace, on obtient naturellement

$$y(t) = y_w(t) + y_v(t) \quad (3.10)$$

3.2 Analyse de systèmes simples

On considère ici un asservissement très simple constitué seulement d'un gain variable K_a positif et d'un système décrit par sa fonction de transfert $G_a(s)$ (figure 3.5).

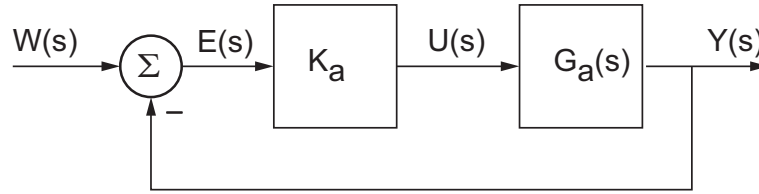


FIG. 3.5: Système asservi élémentaire

3.2.1 Systèmes d'ordre 1

Considérons un système d'ordre 1 décrit par

$$G_a(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte vaut alors

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{1 + s\tau}$$

Elle est caractérisée par son gain K_a et sa constante de temps τ .

Fonction de transfert en b.f. La fonction de transfert en boucle fermée se calcule simplement à partir de la formule de l'automaticien pour donner

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_a \frac{1}{1+s\tau}}{1 + K_a \frac{1}{1+s\tau}} = \frac{K_a}{1 + K_a + s\tau}$$

En écrivant $G_f(s)$ sous forme canonique

$$G_f(s) = \frac{K_a}{1 + K_a} \frac{1}{1 + s \frac{\tau}{1+K_a}}$$

on voit que le système asservi est caractérisé par un gain inférieur à K_a et une constante de temps plus rapide que τ

$$K_f = \frac{K_a}{1 + K_a} < 1, \quad \tau_f = \frac{\tau}{1 + K_a} < \tau$$

Comportement transitoire On rappelle que le comportement transitoire des systèmes est décrit par les pôles de la fonction de transfert. Dans ce cas, $G_f(s)$ étant d'ordre 1, il n'y a qu'un pôle qui vaut

$$p_1 = -\frac{1 + K_a}{\tau}$$

Le pôle étant à partie réelle négative, le système asservi sera toujours stable suivant la valeur du gain, on obtient les réponses indicielles illustrées par les graphes de la figure 3.6.

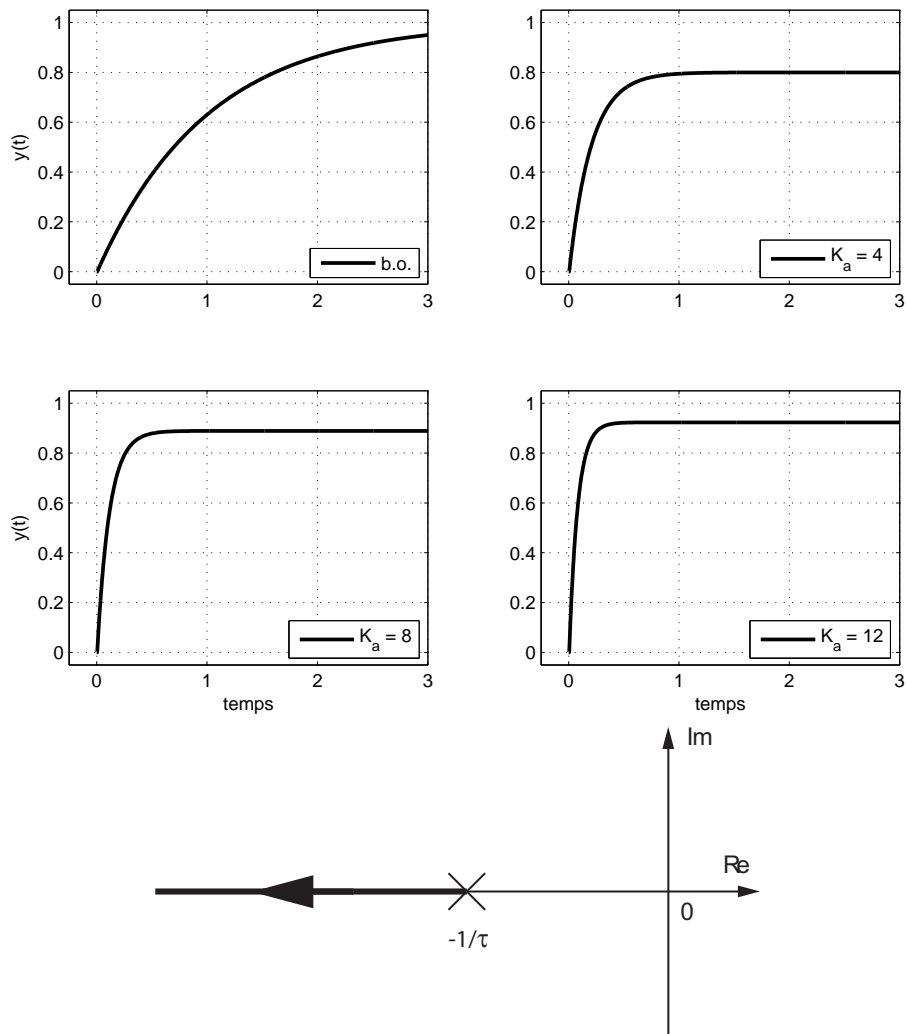


FIG. 3.6: Réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 1 et déplacement du pôle b.f. dans le plan complexe

Lieu du pôle en b.f. Il est intéressant de constater que, lorsque le gain K_a augmente, le pôle p_1 devient de plus en plus négatif. On voit ainsi que le système bouclé est d'autant plus rapide que le gain K_a est élevé. Une illustration du déplacement du pôle dans le plan complexe est présentée dans la figure 3.6.

3.2.2 Systèmes d'ordre 2

On reprend le système ci-dessus en lui ajoutant simplement une intégration

$$G_a(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(1+s\tau)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est alors d'ordre 2 et elle vaut

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}$$

On notera que sa réponse indicielle augmente linéairement avec le temps à cause de l'intégrateur. Ce qui correspond au fait que le gain DC d'un système intégrateur est infini.

Fonction de transfert en b.f. Le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée donne

$$G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}}{1 + K_a \frac{1}{s(1+s\tau)}} = \frac{K_a}{s^2\tau + s + K_a}$$

En écrivant $G_f(s)$ sous forme canonique

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + s \frac{1}{K_a} + s^2 \frac{\tau}{K_a}} = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$

on voit que le système d'ordre 2 conduit à une fonction de transfert $G_f(s)$ caractérisée par :

1. Un gain DC égal à 1 grâce au terme intégrateur $1/s$ de la fonction de transfert $G_o(s)$

$$K_f = 1$$

2. Une pulsation naturelle variable qui augmente avec le gain K_a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_a}{\tau}}$$

3. Un coefficient d'amortissement qui diminue avec le gain K_a

$$\zeta = \frac{\omega_n}{2K_a} = \frac{1}{2\sqrt{K_a\tau}}$$

3.2 Analyse de systèmes simples

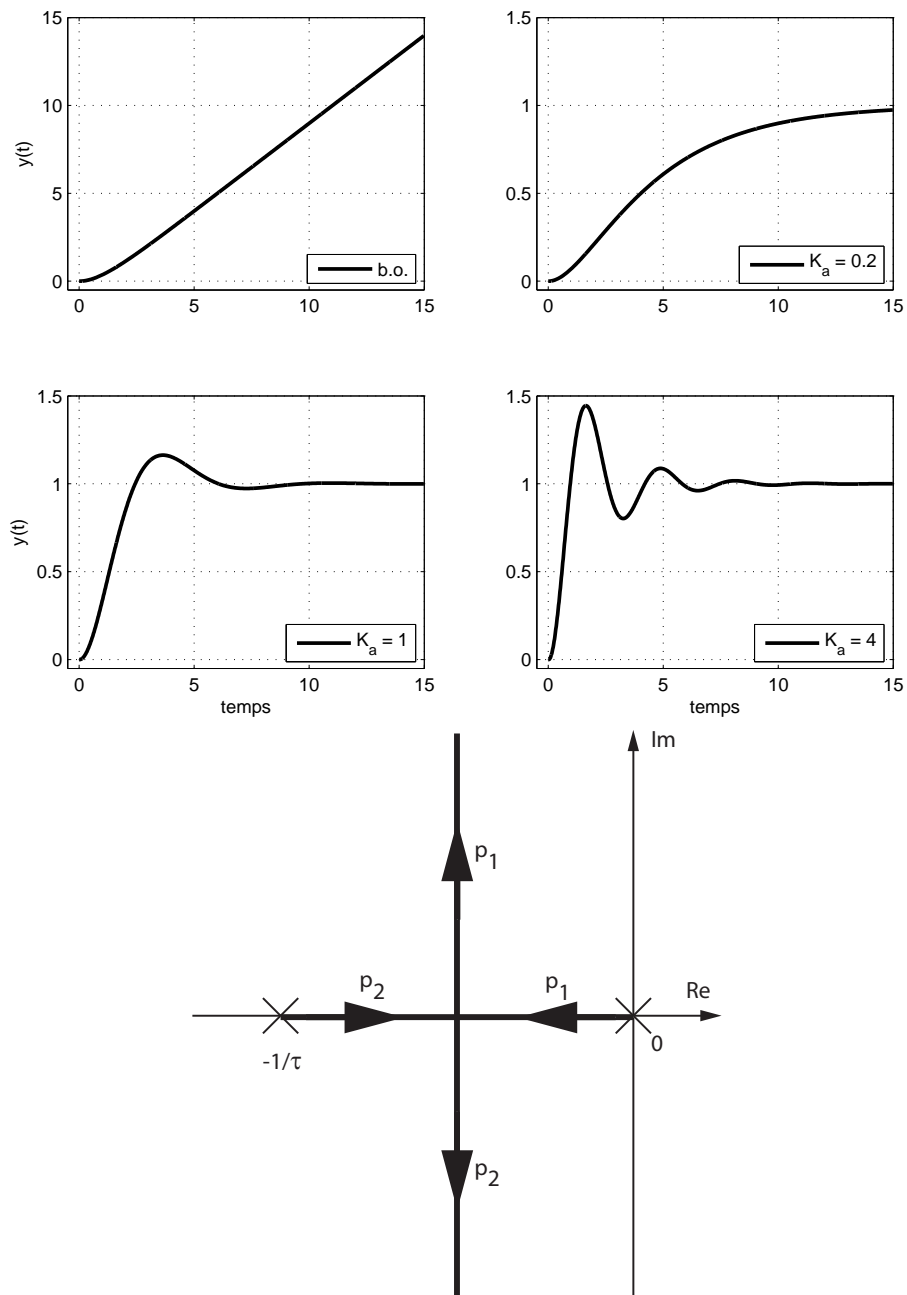


FIG. 3.7: Réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 2 et déplacement des pôles b.f. dans le plan complexe

Comportement transitoire On voit ainsi (figure 3.7) que, dans un premier temps, la rapidité de la réponse augmente avec K_a . Puis, ζ diminuant, la réponse devient de plus en plus oscillante ($\zeta < 1$) sans que la durée du régime transitoire ne change car le produit $\zeta\omega_n$ est constant

$$\zeta\omega_n = \frac{1}{2\sqrt{K_a\tau}} \sqrt{\frac{K_a}{\tau}} = \frac{1}{2\tau}$$

On peut décrire plus précisément le comportement transitoire du système en calculant ses pôles qui sont les racines du dénominateur

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Ces pôles sont au nombre de 2 et valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

On voit ainsi que pour de **faibles gains**, on a

$$\zeta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_a \leq \frac{1}{4\tau}$$

Ce qui conduit à deux racines réelles négatives :

$$\text{une lente : } p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$$

$$\text{une rapide : } p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} < p_1 < 0$$

Dans le cas de **forts gains**, on a

$$\zeta < 1 \quad \Leftrightarrow \quad K_a > \frac{1}{4\tau}$$

Ce qui donne deux racines conjuguées complexes

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

La partie réelle détermine la rapidité du système bouclé

$$\tau_{bf} = \frac{1}{|Re(p_{1,2})|} = \frac{1}{\zeta\omega_n} = 2\tau$$

alors que la partie imaginaire fixe la pulsation d'oscillation de la réponse transitoire

$$\omega_p = |Im(p_{1,2})| = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Les deux pôles étant à partie réelle négative, on en conclut que le système asservi sera toujours stable quelle que soit la valeur de K_a supérieure à 0.

Lieu des pôles en b.f. Une analyse plus détaillée de la valeur des pôles $p_{1,2}$ en fonction du gain K_a permet de voir les éléments suivants :

1. Pour $\zeta \geq 1$, c'est-à-dire $K_a \leq 1/(4\tau)$, les pôles sont situés entre l'origine du plan complexe et le pôle en boucle ouverte $-1/\tau$

$$-\frac{1}{\tau} < p_{1,2} < 0$$

Leur déplacement respectif conduit à une réponse indicielle qui tend de plus en plus rapidement vers la valeur asymptotique.

2. Pour $\zeta < 1$, c'est-à-dire $K_a > 1/(4\tau)$, les pôles ont une partie réelle constante et une partie imaginaire qui augmente avec K_a

$$Re(p_{1,2}) = -\zeta \omega_n = -\frac{1}{2\tau}$$

$$Im(p_{1,2}) = \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{\tau K_a - \frac{1}{4}}$$

Comme la partie réelle reste constante, la rapidité du système ne change plus. Par contre, comme la partie imaginaire augmente en valeur absolue, la période d'oscillation diminue et le dépassement augmente fortement. En choisissant $\zeta = 1/\sqrt{2}$, on obtient un bon compromis entre la rapidité du temps de montée et un faible dépassement.

Une illustration du déplacement des deux pôles dans le plan complexe lorsque K_a varie de 0 à ∞ est présentée dans la figure 3.7.

3.2.3 Systèmes d'ordre supérieur à 2

Comme exemple illustratif, considérons un système d'ordre 3 décrit par

$$G_a(s) = \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte vaut alors

$$G_o(s) \equiv \frac{Y(s)}{E(s)} = K_a \frac{1}{(1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)}$$

Elle est caractérisée par son gain K_a et ses trois constantes de temps $\tau_{1,2,3}$.

Fonction de transfert en b.f. Le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée donne

$$\begin{aligned} G_f(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} &= \frac{K_a \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}}{1 + K_a \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}} \\ &= \frac{K_a}{K_a + (1 + s \tau_1)(1 + s \tau_2)(1 + s \tau_3)} \\ &= \frac{K_a}{1 + K_a + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) s + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) s^2 + (\tau_1 \tau_2 \tau_3) s^3} \end{aligned}$$

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

On voit ainsi que le système d'ordre 3 bouclé sur lui-même conduit à une fonction de transfert $G_f(s)$ d'ordre 3 caractérisée par :

1. Un gain DC

$$K_f = \frac{K_a}{1 + K_a}$$

2. Un dénominateur d'ordre 3 dont les racines dépendent de K_a .

Lieu des pôles en b.f. Une analyse plus détaillée de la valeur des pôles $p_{1,2,3}$ en fonction du gain K_a permet de voir que les pôles partent des pôles en boucle ouverte pour tendre vers trois asymptotes formant des angles égaux à $\pi/3$. Une illustration en est présentée dans la figure 3.8. On constate ainsi, que dans le cas de systèmes d'ordre supérieur à 2, la contre-réaction peut conduire à des pôles à partie réelle positive. Le système devient alors instable. Une illustration des réponses indicielles est donnée à la figure 3.8.

3.2.4 Conclusions

Des trois exemples ci-dessus, on peut tirer les conclusions générales suivantes. Dans un système asservi :

1. L'ordre du système asservi reste le même que celui du système en boucle ouverte.
2. Le gain en boucle fermée K_f est inférieur au gain K_a ; il tend vers 1 si K_a devient infiniment grand.
3. Si le système contient une intégration, le gain en boucle fermée K_f vaut 1.
4. La rapidité du système bouclé augmente avec K_a .
5. L'augmentation du gain K_a peut rendre le système asservi instable.

3.2 Analyse de systèmes simples

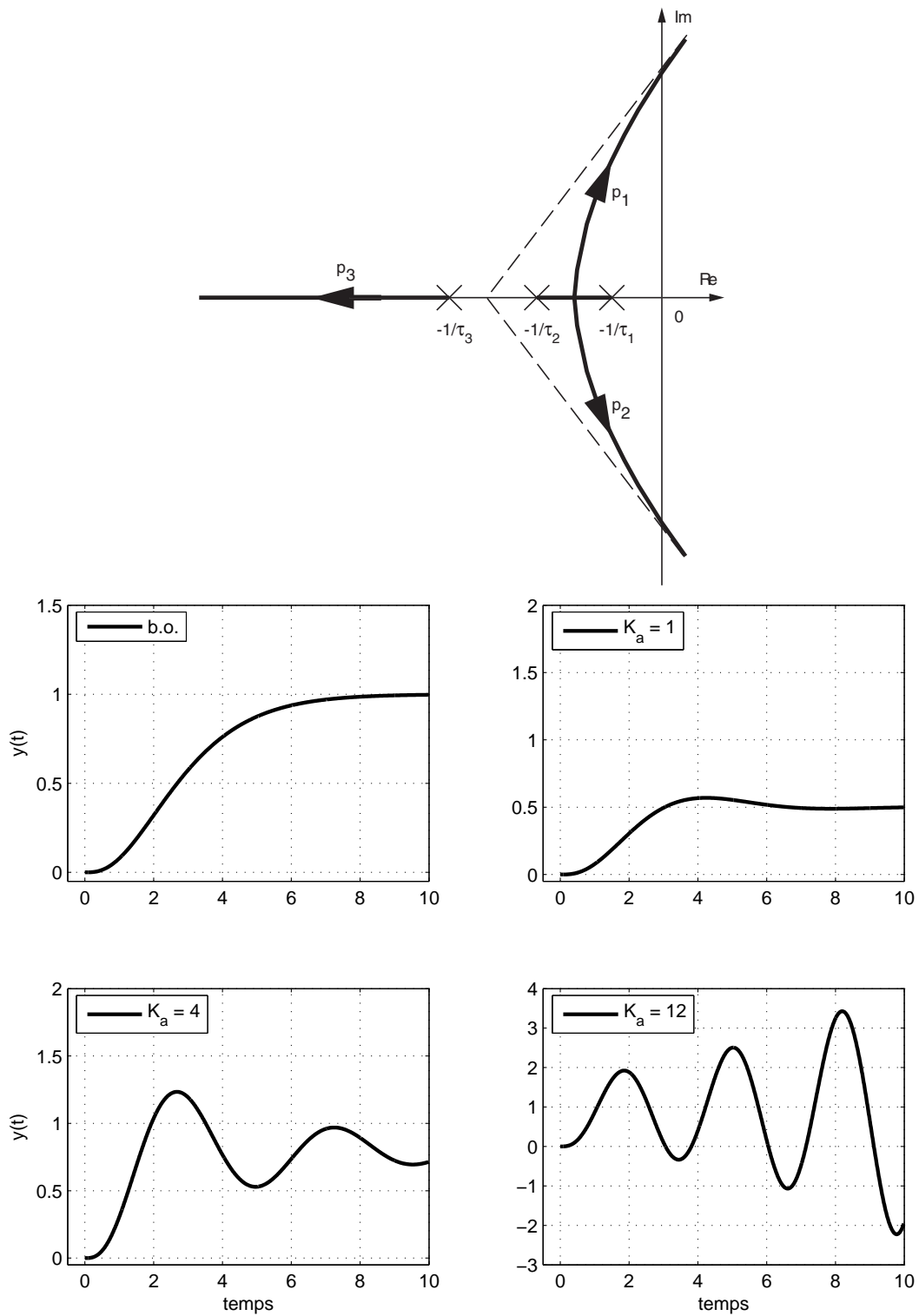


FIG. 3.8: Déplacement des trois pôles b.f. dans le plan complexe et réponses indicielles d'un système asservi d'ordre 3

3.3 Calcul d'un asservissement de position

On considère à nouveau le moteur DC RE75 suivi d'un réducteur GP81 pour entraîner un disque en acier tel qu'il a été étudié dans le chapitre précédent. Cependant, afin de pouvoir asservir la position du disque, on y ajoute un amplificateur de puissance et un capteur de position potentiométrique tournant sur 360° environ.

Sachant que le réducteur a un rapport $N = 14$ et un rendement $\eta = 75\%$ et que le potentiomètre est alimenté par ± 15 [V], on demande :

1. Dessinez les schémas technologique et fonctionnel du système asservi comprenant l'amplificateur, le moteur (modèle d'ordre 1), le réducteur et le capteur de position.
2. Calculez la valeur numériques des paramètres du moteur K_{mot} , τ_{mot} ainsi que le gain K_θ du capteur de position.
3. Calculez les fonctions de transfert en boucles ouverte et fermée.
4. Calculez le gain K_a de l'amplificateur de puissance pour avoir une réponse optimum.
5. Calculez le temps de réglage de la position du disque.

Solution

1) Schémas technologique et fonctionnel du système asservi

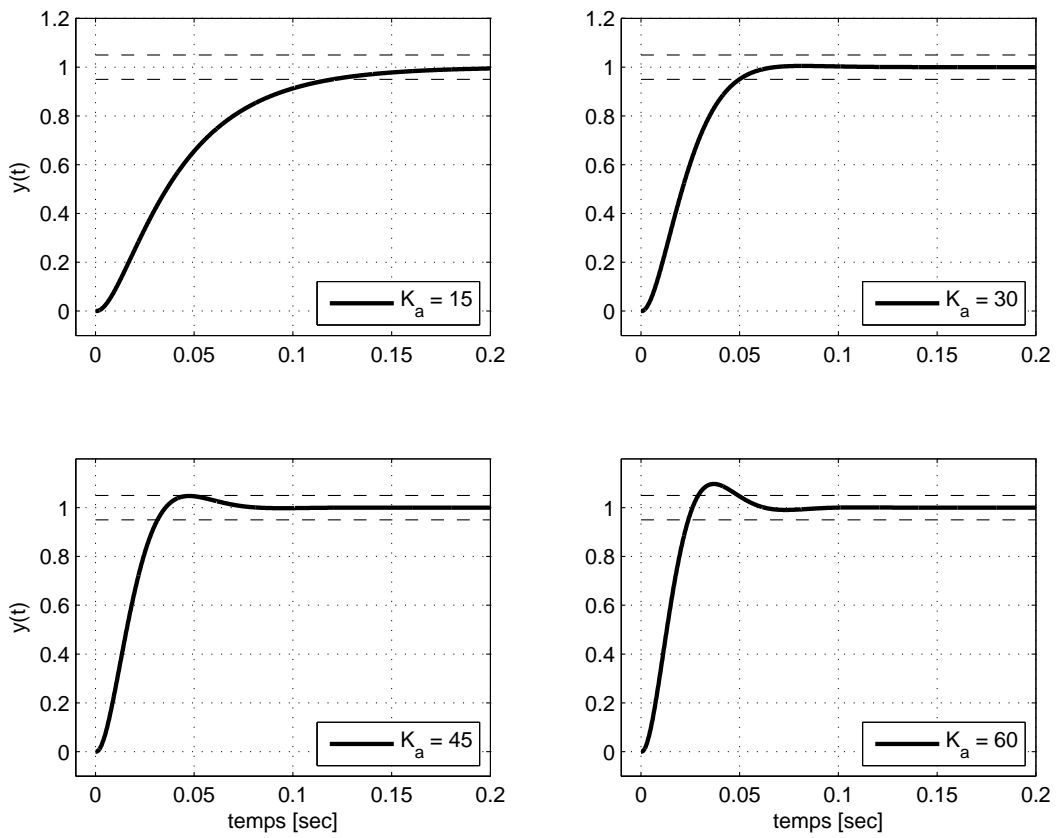
3.3 Calcul d'un asservissement de position

2) Valeurs des paramètres K_{mot} , τ_{mot} , K_θ

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3) Fonctions de transfert en boucles ouverte et fermée

4) Gain de l'amplificateur et temps de réglage de la position du disque



Réponses indicielles d'un asservissement de position

3.4 Étude d'un asservissement avec Matlab

Énoncé du problème On considère ici l'asservissement d'un système décrit par les fonctions de transfert du régulateur $G_c(s)$ et du processus $G_a(s)$

$$G_c(s) = \frac{2+s}{5s} \quad G_a(s) = \frac{1}{1+2s+3s^2}$$

Le but poursuivi est de trouver le gain K_a de l'amplificateur afin que la réponse indicielle ait un dépassement d'environ 10% (ceci est un bon compromis entre le temps de montée et la durée du régime transitoire).

Initialisation du fichier On commence par écrire l'entête d'un fichier que l'on enregistre sous un nom permettant de le retrouver facilement

```
% fichier : xple_asserv.m
% fmy - janvier 2006
% Analyse d'un asservissement
clear all; close all; clc;
format compact; format short g;
```

Donnée des fonctions de transfert Celles-ci sont décrites par le numérateur et dénominateur fournis sous forme de polynômes en s dans l'ordre décroissant

```
% fonctions de transfert
num = [1,2]; den = [5,0];
Gcs = tf(num,den);
num = 1; den = [3,2,1];
Gas = tf(num,den);
% fonction de transfert en b.o.
Ka = 1;
Gos = Ka *Gcs * Gas
```

Dans la fenêtre de commandes, Matlab affiche alors le résultat suivant :

```
Transfer function :
      s + 2
-----
15 s^3 + 10 s^2 + 5 s
```

Dynamique du système en b.o. Pour connaître le comportement transitoire, on extrait les numérateur et dénominateur de $G_o(s)$ afin de calculer les pôles du système :

```
[num_Go, den_Go] = tfdata(Gos, 'value');
zk = roots(den_Go)
```

```

pk = roots(den_Go)
tau_k = 1 ./ abs(real(pk))
T_k = 2*pi ./ abs(imag(pk))
t_trans = 5*tau_k
N_osc = t_trans ./ Tp_k

```

On obtient alors les résultats suivants :

```

zk =                pk =
   -2                -0.333 ± j0.471
tau_k =            T_k =
   Inf              Inf
    3                13.329
    3                13.329
t_trans =          N_osc =
   Inf              NaN
    15                1.1254
    15                1.1254

```

La constante de temps τ_k et la période T_k infiniment grandes proviennent du pôle nul dû à l'intégration. Pour le reste, on voit que le système en boucle ouverte a un comportement légèrement oscillant durant environ 15 secondes. Une illustration de la dérivée du signal de sortie en b.o. est donnée dans le premier graphe de la figure 3.9.

Fonction de transfert en boucle fermée Avec $K_a = 1$, le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

```
Gfs = Gos / (1+Gos)
```

fournit le résultat suivant

```

Transfer function :
          15 s^4 + 40 s^3 + 25 s^2 + 10 s
-----
225 s^6 + 300 s^5 + 265 s^4 + 140 s^3 + 50 s^2 + 10 s

```

Ce résultat est surprenant, car on sait que la boucle d'asservissement ne change pas l'ordre du système qui dans notre cas vaut 3. Le résultat ci-dessus vient du fait qu'une simplification est possible entre le numérateur et le dénominateur. On peut le voir en demandant l'affichage de $G_f(s)$ avec la fonction `zpk` (zéro, pôle, gain) :

```
zpk(Gfs)
```

qui affiche le résultat suivant

```

Zero/pole/gain :
    0.0667 s (s+2) (s^2 + 0.6667s + 0.3333)
-----
s (s+0.4431) (s^2 + 0.2236s + 0.3009) (s^2 + 0.6667s + 0.3333)

```

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

On voit alors qu'une simplification par s ($s^2 + 0.6667s + 0.3333$) est possible. Celle-ci s'obtient avec la commande `minreal` (réalisation minimum) :

$$Gfs = \text{minreal}(Gfs)$$

On obtient alors le résultat attendu :

$$\begin{array}{r} \text{Transfer function :} \\ 0.06667 s + 0.1333 \\ \hline s^3 + 0.6667 s^2 + 0.4 s + 0.1333 \end{array}$$

Analyse du système asservi Le système décrit par la fonction de transfert ci-dessus est d'ordre 3. Il possède un zéro et trois pôles

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 [1/\text{sec}] \\ p_1 &= -0.443 [1/\text{sec}] \\ p_{2,3} &= -0.1118 \pm j 0.537 [1/\text{sec}] \end{aligned}$$

On en déduit les temps caractéristiques suivants

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1/0.443 = 2.26 [\text{sec}] \\ \tau_{2,3} &= 1/0.1118 = 8.94 [\text{sec}] \\ t_{trans} &= 5 \tau_{2,3} \simeq 44 [\text{sec}] \\ T_{p,2,3} &= 2\pi/0.637 = 11.7 [\text{sec}] \\ N_{osc} &= 5\tau_{2,3}/T_{p,2,3} = 3.8 [\text{périodes}] \end{aligned}$$

Du théorème des valeurs limites, on tire les valeurs initiale et finale de sa réponse indicielle

$$y(t \rightarrow 0) = s Y(s)|_{s \rightarrow \infty} = s \frac{1}{s} G_f(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{0.1333}{s^3} \Big|_{s \rightarrow \infty} = 0$$

$$y(t \rightarrow \infty) = s Y(s)|_{s \rightarrow 0} = s \frac{1}{s} G_f(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{0.1333}{0.1333} = 1$$

On peut ainsi relever que grâce au terme d'intégration présent dans $G_c(s)$, la valeur finale $y(\infty)$ est égale à la consigne. Par contre, cette réponse indicielle est loin d'être optimale puisque l'on peut compter presque quatre périodes d'oscillation pendant la durée transitoire ; ce qui est confirmé par le deuxième graphe de la figure 3.9. On est donc amené à devoir réduire le gain K_a du système asservi pour diminuer cette oscillation et, éventuellement, réduire la durée de réglage ou, ce qui est équivalent, son temps d'établissement.

Réponse indicielle en b.f. Pour le calcul et traçage de celle-ci, il faut définir auparavant le domaine temporel et la consigne $w(t)$:

```

% reponse temporelle
npts = 1000; tmax = 30;
dt = tmax/npts;
tt = 0 :dt :tmax-dt;
% saut de consigne d'amplitude A
A = 2;
wt = A*ones(size(tt));
wt(1) = 0;

```

On calcule ensuite la réponse temporelle à un signal quelconque avec la fonction `lsim` (simulation de systèmes linéaires). Dans le cas de réponse indicielle, on peut se contenter d'utiliser la fonction `step`. Le calcul et traçage des réponses indiciaires pour différentes valeurs de gain K_a sont illustrés dans la figure 3.9.

```

figure;
Ka = [0.2,0.3,0.5,0.65];
for k1 = 1 :length(Ka)
    Gfs = Ka(k1)*Gos / (1+Ka(k1)*Gos);
    Gfs = minreal(Gfs);
    yt = lsim(Gfs,wt,tt);
    subplot(2,2,k1);
    plot(tt,yt,'LineWidth',2);
    axis([-0.5,tmax,-0.05,2.5]); grid on;
    texte = ['K_a = ', num2str(Ka(k1),2)];
    if (k1 == 1) | (k1 == 3), ylabel('y(t)'), end;
    if (k1 == 3) | (k1 == 4), xlabel('temps'), end;
    legend(texte,4);
end;

```

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

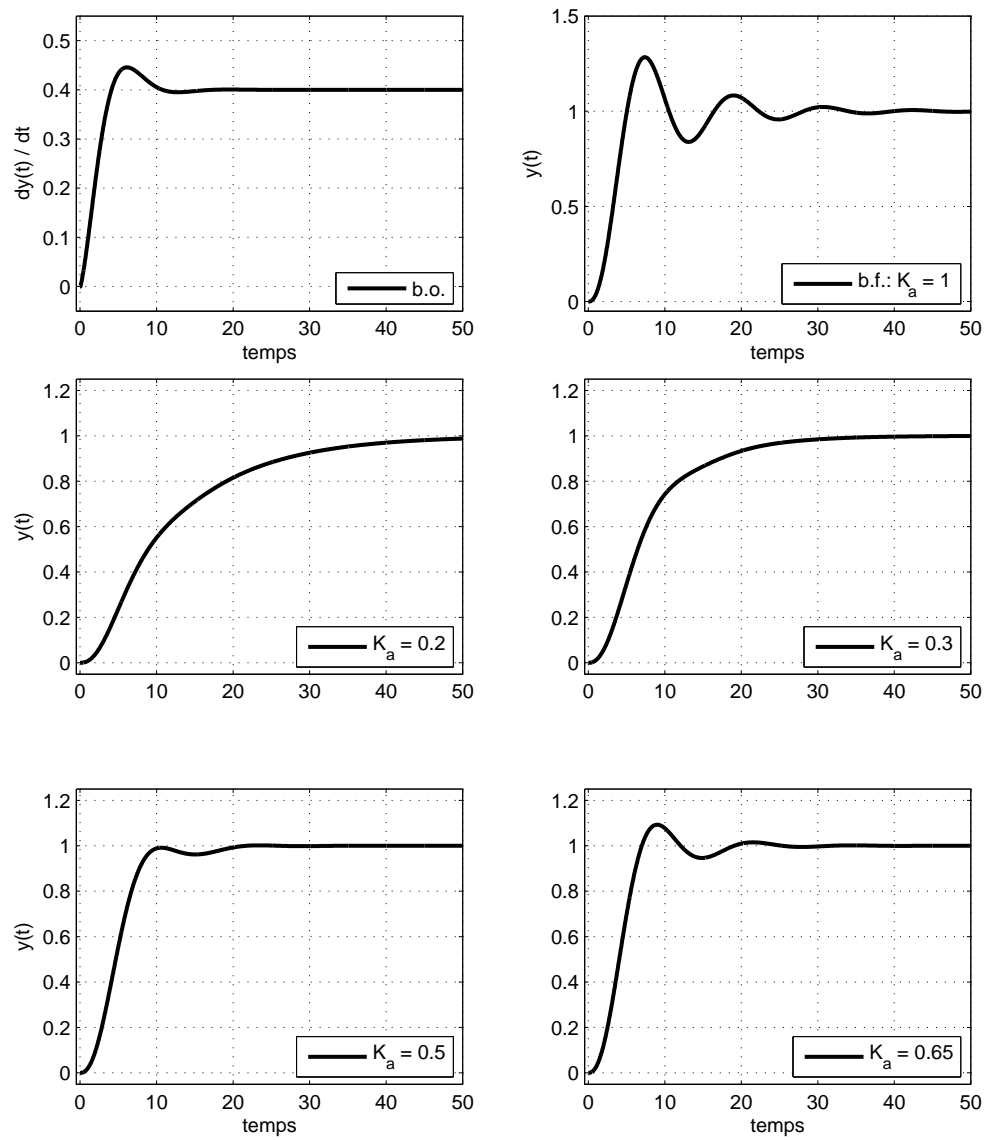


FIG. 3.9: Réponses indicielles d'un système asservi avec son optimisation

3.5 Une application : le circuit PLL

Les circuits à verrouillage de phase, communément désigné sous le nom de PLL (Phase Locked Loop) sont employés dans de très nombreuses applications telles que la démodulation de fréquence, la démodulation d'amplitude, la multiplication de fréquence, la synchronisation de signaux, etc. Une description détaillée du fonctionnement des PLL et de nombreux exemples d'applications sont donnés dans l'ouvrage de Michel Girard [2].

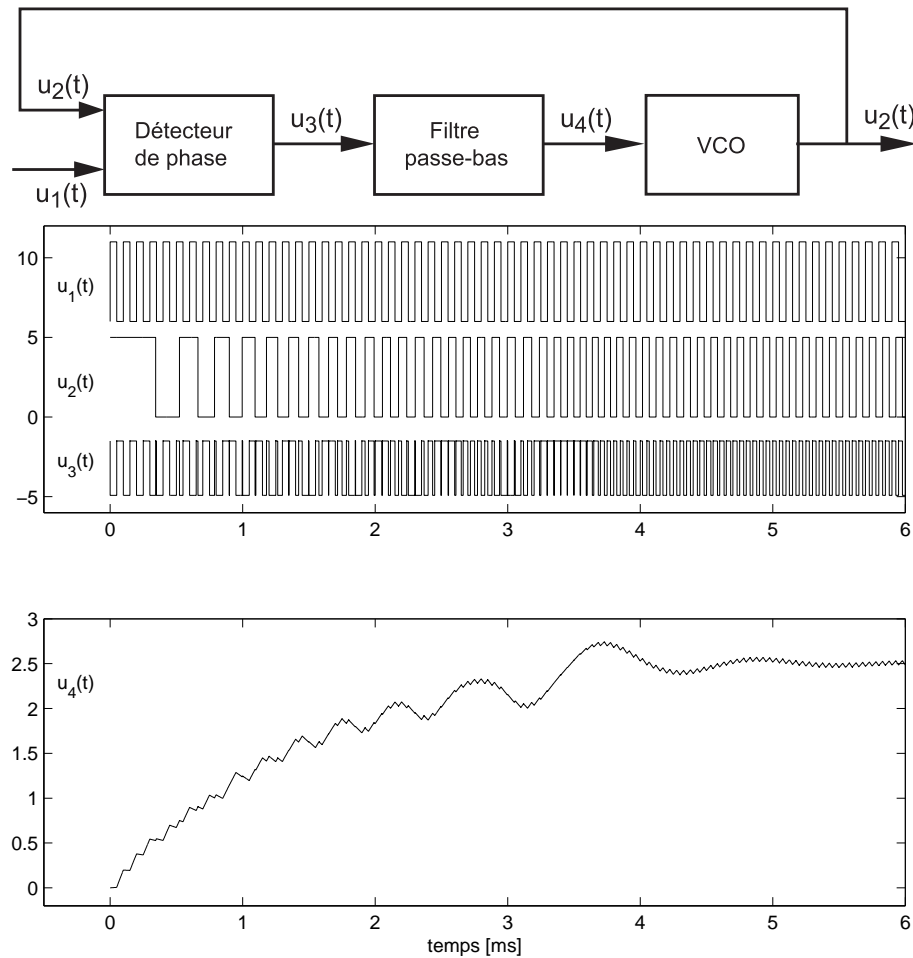


FIG. 3.10: Schéma de principe et signaux temporels d'un PLL

Les éléments nécessaires à la réalisation d'un tel système sont présentés avec les signaux dans la figure 3.10. On y trouve un détecteur de phase, un filtre passe-bas et un oscillateur commandé en tension (VCO). Avec le circuit PLL, on asservit la fréquence de l'oscillateur interne de manière à le synchroniser au signal de référence appliqué en entrée. Ce circuit est donc un système à contre-réaction dont le signal d'entrée est la pulsation $\omega_1(t)$ de la tension $u_1(t)$ alors que le signal de sortie est la pulsation $\omega_2(t)$ de la tension $u_2(t)$. L'illustration des signaux présents dans un circuit à verrouillage de phase montre très bien que, dans un premier temps (3ms environ), le PLL tente de "s'accrocher" au signal d'entrée. Dès lors qu'il y est parvenu, il se comporte comme un système linéaire.

3.5.1 Démodulation FM

Afin de rendre les choses plus concrètes, on peut encore décrire et observer les signaux rencontrés dans une opération de modulation–démodulation (figure 3.11). Ces signaux correspondent à l’émission et réception de signaux FM. On y trouve :

1. Le message à transmettre représenté ici par une sinusoïde de fréquence f_m de 1kHz.
2. Le signal envoyé par l’émetteur, de fréquence centrale $f_c= 15\text{kHz}$, qui transmet le message en variant légèrement celle-ci.
3. Le signal binaire lui correspondant.
4. Le signal de sortie du PLL.
5. Le signal fourni par le détecteur de phase.
6. Le signal démodulé comparé avec le message original.

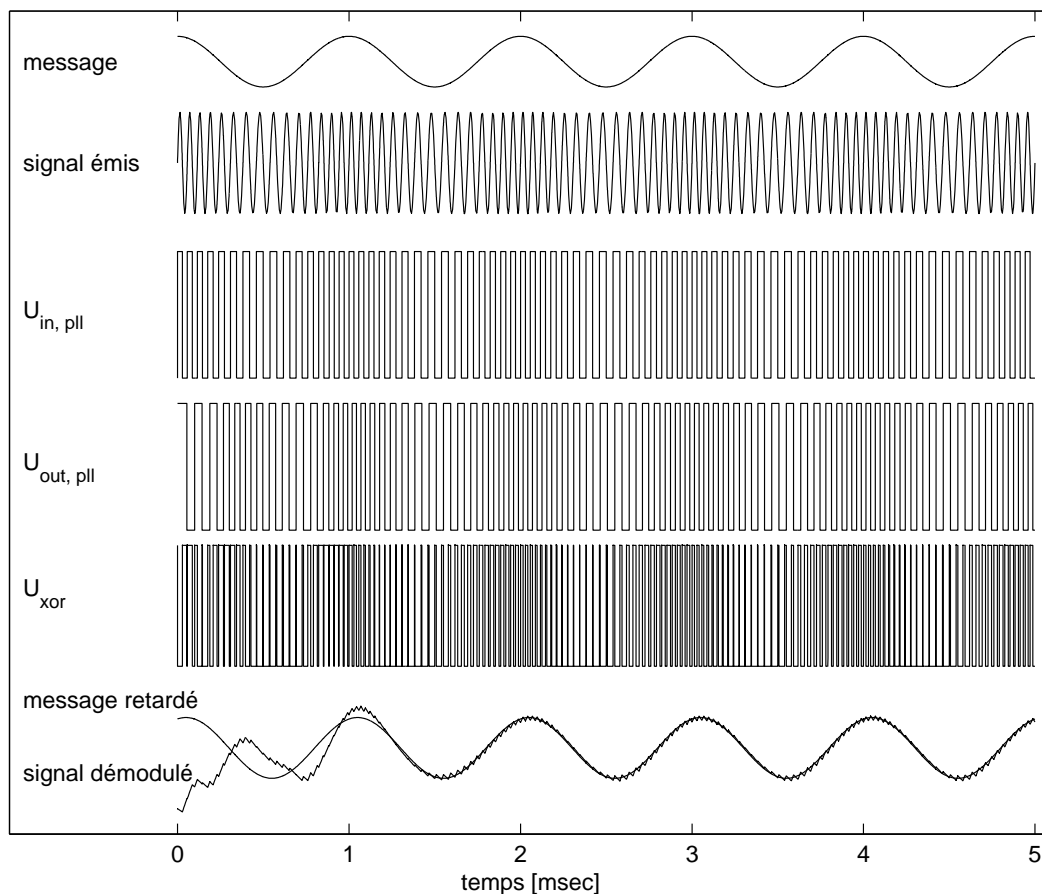
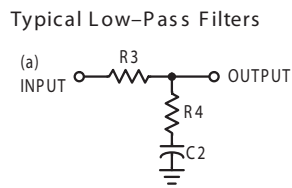
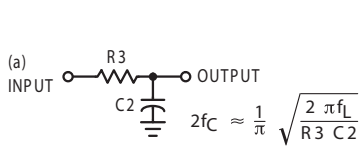
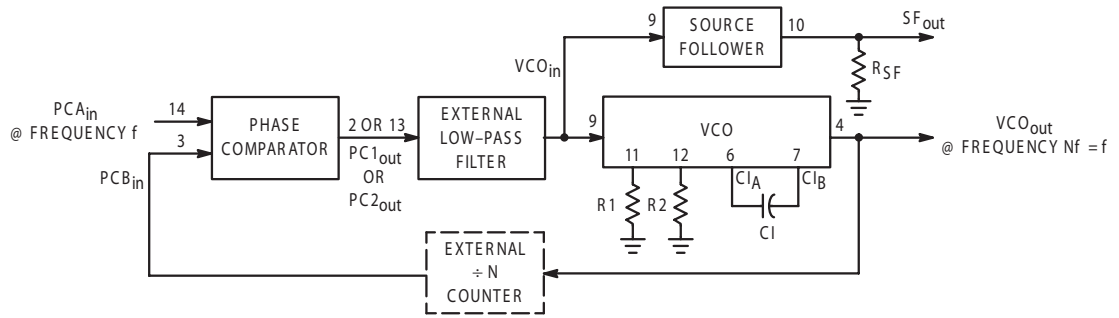


FIG. 3.11: Signaux d’un modulateur–démodulateur FM

Il est bien clair que les fréquences d’un système FM réel sont différentes puisque les émetteurs de radio FM transmettent les signaux audio (50Hz à 20kHz) avec une fréquence centrale d’environ 100MHz.

3.5 Une application : le circuit PLL



Typically:

$$R_4 C_2 = \frac{6N}{f_{\max}} - \frac{N}{2\pi \Delta f}$$

$$(R_3 + 3,000\Omega) C_2 = \frac{100N\Delta f}{f_{\max}^2} - R_4 C_2$$

$$\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$$

NOTE: Sometimes R3 is split into two series resistors each R3 ÷ 2. A capacitor C_C is then placed from the midpoint to ground. The value for C_C should be such that the corner frequency of this network does not significantly affect ω_n. In Figure B, the ratio of R3 to R4 sets the damping, R4 ≈ (0.1)(R3) for optimum results.

Definitions: N = Total division ratio in feedback loop

$$K_\phi = V_{DD}/\pi \text{ for Phase Comparator 1}$$

$$K_\phi = V_{DD}/4\pi \text{ for Phase Comparator 2}$$

$$KVCO = \frac{2\pi \Delta f VCO}{V_{DD} - 2V}$$

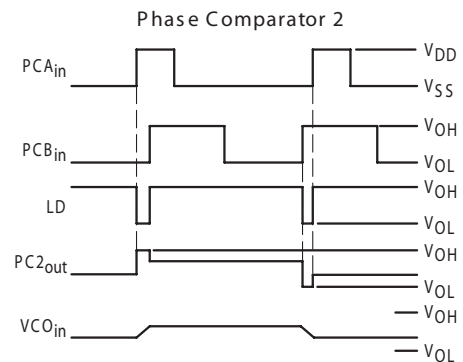
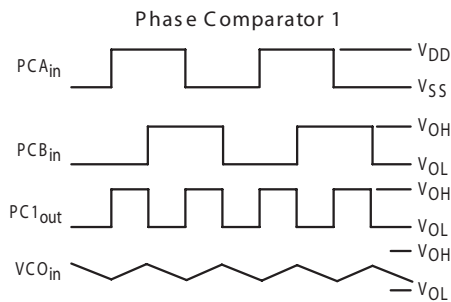
$$\text{for a typical design } \omega_n \approx \frac{2\pi f_r}{10} \text{ (at phase detector input)}$$

$$\zeta \approx 0.707$$

LOW-PASS FILTER

Filter A	Filter B
$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\phi KVCO}{NR_3 C_2}}$	$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\phi KVCO}{NC_2(R_3 + R_4)}}$
$\zeta = \frac{N\omega_n}{2K_\phi KVCO}$	$\zeta = 0.5 \omega_n (R_3 C_2 + \frac{N}{K_\phi KVCO})$
$F(s) = \frac{1}{R_3 C_2 S + 1}$	$F(s) = \frac{R_3 C_2 S + 1}{S(R_3 C_2 + R_4 C_2) + 1}$

Waveforms



$$f_{\min} = \frac{1}{R_2(C_1 + 32 \text{ pF})} \quad (VCO \text{ input} = V_{SS})$$

$$f_{\max} = \frac{1}{R_1(C_1 + 32 \text{ pF})} + f_{\min} \quad (VCO \text{ input} = V_{DD})$$

Where: $10K \leq R_1 \leq 1M$
 $10K \leq R_2 \leq 1M$
 $100\text{pF} \leq C_1 \leq .01 \mu\text{F}$

FIG. 3.12: Extraits de la fiche technique du circuit MC14046B

3.5.2 Description d'un circuit PLL

Le circuit analysé par la suite est un 4046B (figure 3.12) pouvant travailler jusqu'à des fréquences de quelques MHz. Il est constitué de deux détecteurs de phase (nommés I et II), d'un VCO et d'un amplificateur suiveur de tension. Pour mener à bien son étude, il faut commencer par décrire exactement ce que fait chaque partie du circuit PLL.

Détecteur de phase

Le détecteur de phase I, dont on s'occupera ici, est une simple porte XOR recevant deux signaux carrés (figure 3.13). Son signal de sortie est un signal rectangulaire dont le rapport cyclique dépend de la différence de phase entre les signaux d'entrée. La tension moyenne, obtenue par filtrage passe-bas, est donc une mesure directe de ce déphasage

$$U_{3,moy} = \frac{V_{DD}}{\pi} \Delta\varphi \quad (3.11)$$

Filtre passe-bas ou à retard de phase

Le filtre passe-bas, nécessaire pour transmettre au VCO la tension moyenne en provenance du détecteur de phase, est un circuit externe composé de une ou deux résistances (R_3 et R_4) et d'une capacité C_2 (figure 3.14).

Caractéristique du VCO

Le domaine de fréquence dans lequel travaillera le VCO est choisi à l'aide des composants externes R_1 , R_2 et C_1 . La caractéristique d'un VCO est présentée dans la figure 3.16a. On y voit que pour une tension d'entrée comprise entre V_{min} et V_{DD} , la fréquence varie entre f_{min} et f_{max} et que f_0 est la fréquence obtenue lorsque $U_4 = V_{DD}/2$. Ces trois fréquences dépendent essentiellement des composants externes R_1 , R_2 et C_1 et relativement peu de la tension d'alimentation V_{DD} .

A la lecture des données fournies par les fabricants, on constate que les relations permettant d'évaluer la caractéristique du VCO sont très variables. On peut cependant retenir les relations suivantes valables pour une alimentation unipolaire $V_{DD} = 5 [V]$:

$$f_{min} \simeq \frac{1}{R_2(C_1 + C_p)} \quad V_{min} \simeq 2V \quad (3.12)$$

$$f_{max} \simeq f_{min} + \frac{1}{R_1(C_1 + C_p)} \quad (3.13)$$

avec $10 \text{ k}\Omega \leq R_{1,2} \leq 1 \text{ M}\Omega$, $100 \text{ pF} \leq C_1 \leq 10 \text{ nF}$ et $C_p \simeq 35 \text{ pF}$. On admet généralement que l'oscillateur est au repos lorsque la tension d'entrée vaut $V_{DD}/2$. Il oscille alors à sa fréquence de repos f_0 .

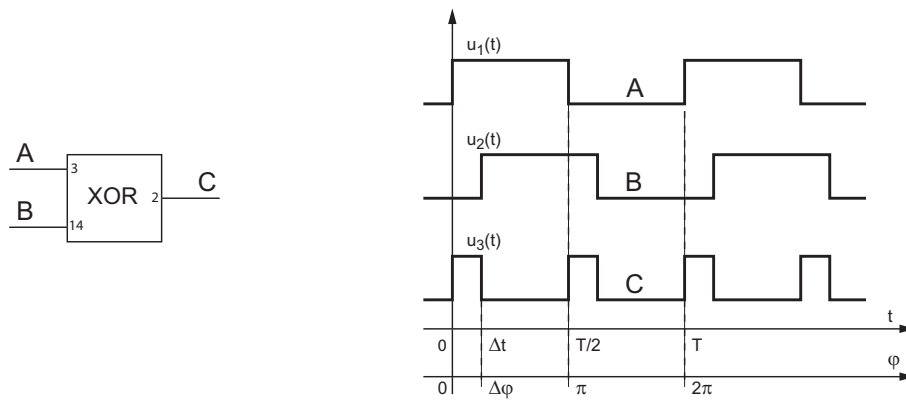


FIG. 3.13: Signaux d'un circuit XOR

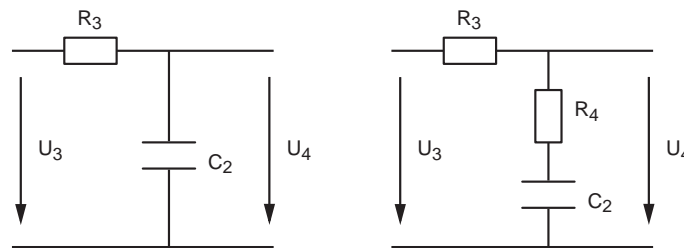


FIG. 3.14: Filtre passe-bas et filtre à retard de phase

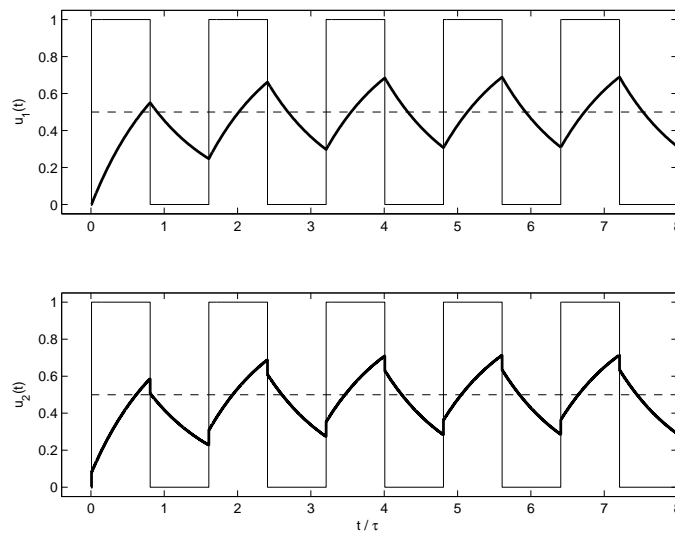


FIG. 3.15: Réponses temporelles d'un filtre passe-bas et d'un filtre à retard de phase

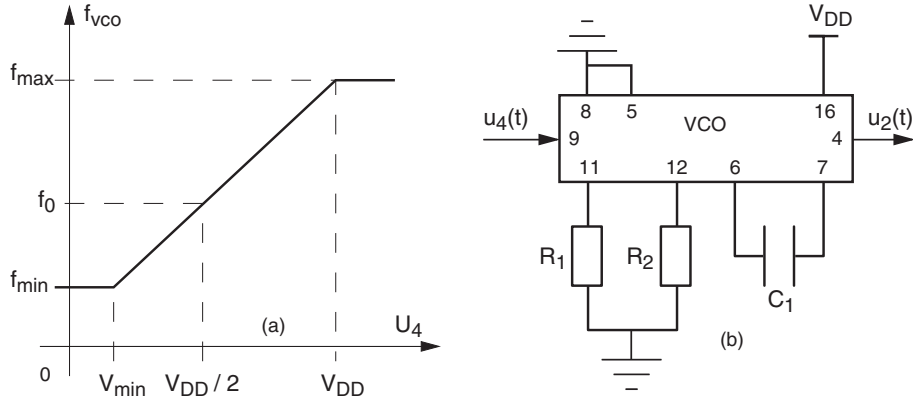


FIG. 3.16: Caractéristique d'un VCO (a) et son schéma de réalisation (b)

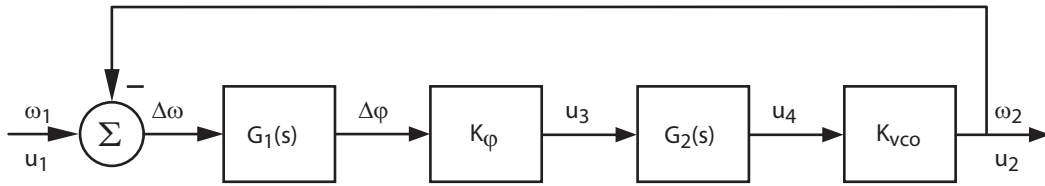


FIG. 3.17: Schéma fonctionnel d'un circuit à verrouillage de phase

3.6 Analyse du PLL en mode synchronisé

Nous considérons dans cette analyse la situation où le circuit PLL est déjà synchronisé sur la fréquence du signal extérieur. Le PLL est alors capable de suivre les variations de cette fréquence et son comportement peut être étudié à l'aide d'un modèle linéaire. Ce modèle linéaire est décrit par le schéma fonctionnel de la figure 3.17. On y trouve :

1. Le comparateur qui fait la différence des pulsations :

$$\Delta\omega(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t)$$

2. Le bloc qui fournit le déphasage instantané $\Delta\varphi(t)$ à partir de la différence des pulsations :

$$\Delta\varphi(t) = \int_0^t (\omega_1(t) - \omega_2(t)) dt = \int_0^t \Delta\omega(t) dt$$

En terme de fonction de transfert, ceci se traduit par

$$G_1(s) \equiv \frac{\Delta\Phi(s)}{\Delta\Omega(s)} = \frac{1}{s} \text{ [sec]} \quad (3.14)$$

3. Le détecteur de phase qui relie la tension $u_3(t)$ au déphasage est décrit par son gain :

$$K_\varphi \equiv \frac{\Delta u_3}{\Delta\varphi} \left[\frac{\text{V}}{\text{rad}} \right] \quad (3.15)$$

4. Le filtre qui sert à lisser les variations de la tension $u_3(t)$:

$$G_2(s) \equiv \frac{U_4(s)}{U_3(s)} \left[\frac{\text{V}}{\text{V}} \right] \quad (3.16)$$

5. L'oscillateur (VCO) décrit par son gain :

$$K_{vco} \equiv \frac{\Delta\omega_2}{\Delta u_4} \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad (3.17)$$

3.6.1 Remarques importantes

A ce stade, il ne faut pas oublier que les signaux physiques sont uniquement des tensions :

- la tension d'entrée $u_1(t)$,
- la tension de sortie du VCO $u_2(t)$,
- la tension de sortie du détecteur de phase $u_3(t)$,
- la tension de sortie du filtre passe-bas $u_4(t)$.

Mais, les grandeurs qui nous intéressent sont :

- les **pulsations** $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$
- les **phases** $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ ou, leur différence, le déphasage $\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.

Contrairement à l'habitude prise en analyse fréquentielle, il faut bien voir que ces pulsations et phases sont des **variables temporelles**. Afin d'insister sur ce point, les grandeurs indiquées au-dessus des lignes du schéma fonctionnel sont celles sur lesquelles nous portons notre attention alors que les tensions mentionnées au-dessous ne sont que leurs correspondants.

De plus, il est important de comprendre que le comparateur Σ , l'intégrateur $G_1(s)$ et le gain K_φ n'existent pas séparément : ils sont inhérents au détecteur de phase.

3.6.2 Choix du filtre

Le but du filtre passe-bas est de transmettre au VCO la composante moyenne du signal provenant du détecteur de phase. Un simple filtre passe-bas d'ordre 1 suffit en principe. Cependant, l'expérience montre que le remplacement de ce filtre passe-bas par un atténuateur HF (aussi appelé filtre à retard de phase) facilite l'accrochage au signal d'entrée. On l'utilise donc de préférence au filtre passe-bas (figure 3.14), même si la restitution de la composante moyenne contient des discontinuités. On montre aisément que sa fonction de transfert est

$$G_2(s) = \frac{1 + sC_2R_4}{1 + sC_2(R_3 + R_4)} = \frac{1 + s/\omega_4}{1 + s/\omega_3} \quad (3.18)$$

3.6.3 Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert du circuit PLL en boucle ouverte vaut

$$G_o(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Delta\Omega(s)} = G_1(s) \cdot K_\varphi \cdot K_{vco} \cdot G_2(s) \begin{bmatrix} \text{rad/sec} \\ \text{rad/sec} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Afin d'alléger l'écriture, on définit le gain statique en boucle ouverte K_{bo}

$$K_{bo} \equiv K_\varphi \cdot K_{vco} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{sec} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit alors :

$$G_o(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Delta\Omega(s)} = K_{bo} \frac{1}{s} \frac{1 + s/\omega_4}{1 + s/\omega_3} \begin{bmatrix} \text{rad/sec} \\ \text{rad/sec} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

3.6.4 Fonction de transfert en boucle fermée

La fonction de transfert en boucle fermée est décrite par :

$$G_f(s) \equiv \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \begin{bmatrix} \text{rad/sec} \\ \text{rad/sec} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Cette fonction de transfert $G_f(s)$ traduit, dans le domaine complexe, la relation existant entre la pulsation $\omega_1(t)$ de la tension d'entrée $u_1(t)$ et la pulsation $\omega_2(t)$ de la tension de sortie $u_2(t)$. Tenant compte de $G_o(s)$, il vient :

$$G_f(s) = \frac{\frac{K_{bo}}{s} \cdot \frac{1+s/\omega_4}{1+s/\omega_3}}{1 + \frac{K_{bo}}{s} \cdot \frac{1+s/\omega_4}{1+s/\omega_3}}$$

Multipliant numérateur et dénominateur par $s(1 + s/\omega_3)$, on obtient

$$\begin{aligned} G_f(s) &= \frac{K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)}{s \cdot (1 + s/\omega_3) + K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)} \\ &= \frac{K_{bo} \cdot (1 + s/\omega_4)}{K_{bo} + s \cdot \left(1 + \frac{K_{bo}}{\omega_4}\right) + \frac{s^2}{\omega_3}} \end{aligned}$$

Puis, divisant numérateur et dénominateur par K_{bo} , on obtient la forme canonique de la fonction de transfert décrivant le fonctionnement du circuit PLL :

$$G_f(s) = \frac{(1 + s/\omega_4)}{1 + s \cdot \left(\frac{1}{K_{bo}} + \frac{1}{\omega_4}\right) + \frac{s^2}{K_{bo}\omega_3}} \quad (3.23)$$

On voit donc que la fonction de transfert $G_f(s)$ est de la forme :

$$G_f(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_4}}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.24)$$

3.6 Analyse du PLL en mode synchronisé

On y trouve un numérateur d'ordre 1 avec sa pulsation caractéristique ω_4 , un dénominateur d'ordre 2 caractérisé par sa pulsation naturelle ω_n et son coefficient d'amortissement ζ :

$$\omega_n = \sqrt{K_{bo} \cdot \omega_3} \quad (3.25)$$

$$2\zeta = \frac{1}{Q_0} = \omega_n \cdot \left(\frac{1}{K_{bo}} + \frac{1}{\omega_4} \right) \quad (3.26)$$

La réponse indicielle d'un système décrit par cette fonction de transfert dépend fortement du coefficient d'amortissement ζ ; elle est représentée dans la figure 3.18 pour différentes valeurs de ζ .

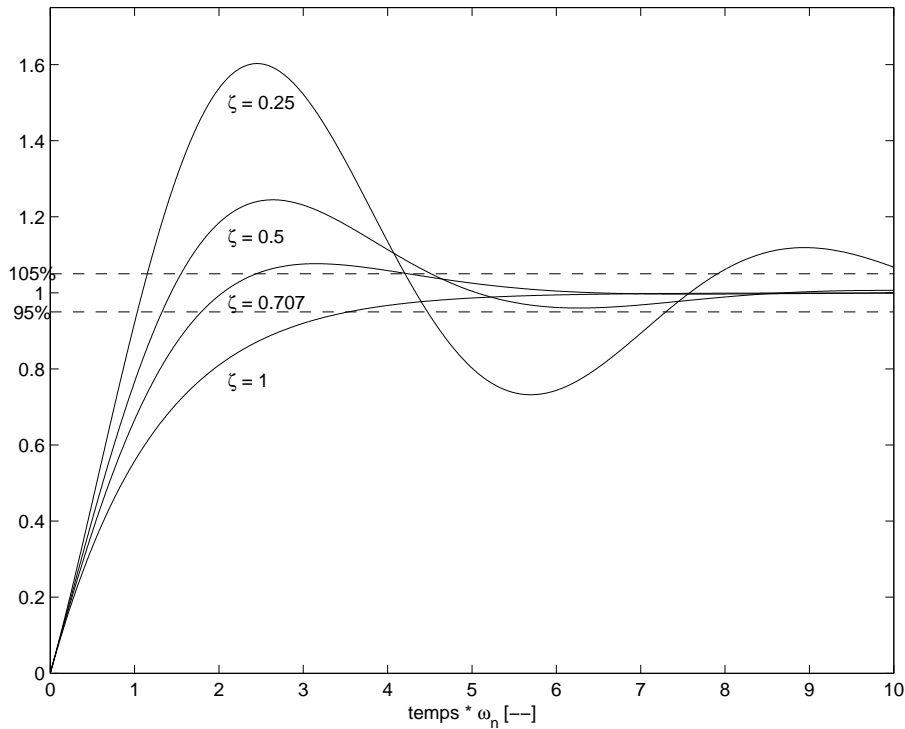


FIG. 3.18: Réponses indicielles d'un circuit PLL en boucle fermée

3.6.5 Calcul de ω_3 et ω_4

Dans l'étude générale des régimes transitoires, on a vu que l'on choisit généralement ζ compris entre 0.5 et 1 pour avoir un bon compromis entre un temps de montée rapide et un temps d'établissement court (figure 3.18). Le temps de réponse ou d'établissement du régime permanent à 5% près vaut alors

$$t_{5\%} \simeq 3 \tau_{bf} = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (3.27)$$

Se souvenant que le gain en boucle ouverte K_{bo} dépend uniquement du comparateur et du VCO,

$$K_{bo} \equiv K_{\varphi} \cdot K_{vco} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \quad (3.28)$$

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

les équations (3.25) et (3.26) montrent que le temps d'établissement $t_{5\%}$ dépend essentiellement de la synthèse du filtre passe-bas au travers de ses deux pulsations caractéristiques ω_3 et ω_4 . Il faut donc trouver ces deux pulsations à partir de $t_{5\%}$ et ζ . De l'équation (3.27), on tire

$$\omega_n \simeq \frac{3}{\zeta t_{5\%}} \quad (3.29)$$

Portant ω_n dans les équations (3.25) et (3.26), on obtient alors les deux pulsations recherchées

$$\omega_3 = \frac{\omega_n^2}{K_{bo}} \quad (3.30)$$

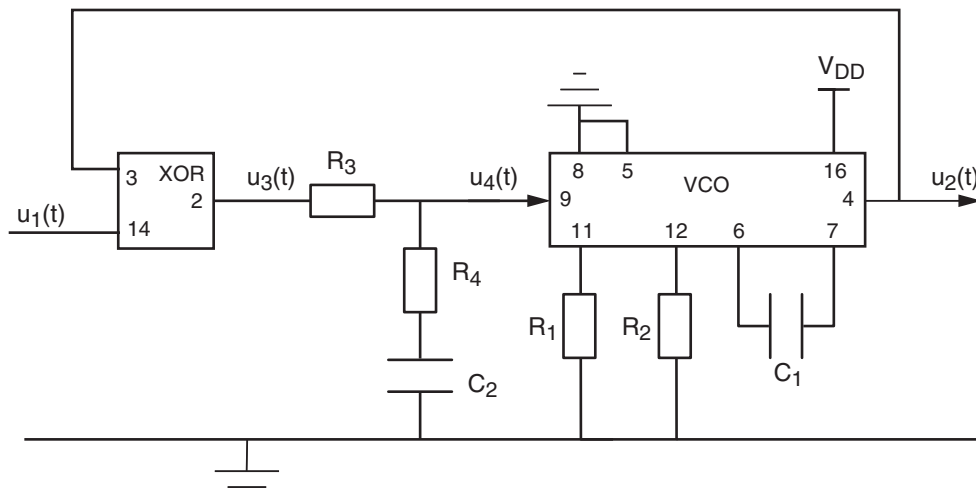
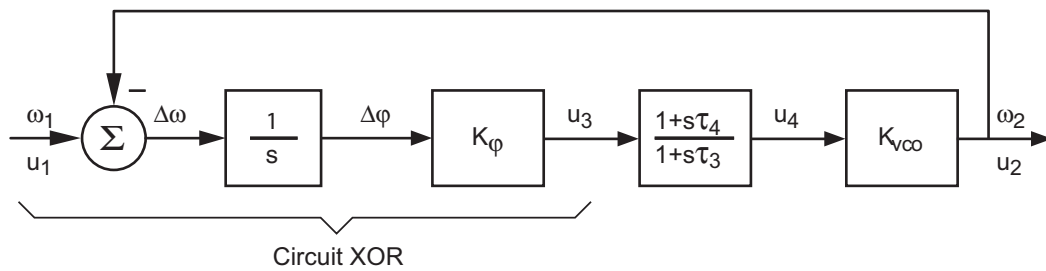
$$\omega_4 = \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{1}{K_{bo}} \right)^{-1} = \frac{\omega_n \cdot K_{bo}}{2\zeta \cdot K_{bo} - \omega_n} \quad (3.31)$$

3.7 Calcul d'un circuit PLL

Dans ce qui suit, on souhaite réaliser un circuit PLL caractérisé par :

- sa tension d'alimentation : $V_{DD} = 5 [V]$
- son domaine de fréquences : $0 < f < 25 [kHz]$
- un temps de réponse de $t_{5\%} \simeq 1 [msec]$
- un coefficient d'amortissement $\zeta \simeq 0.25$ ou $Q_0 = 1/(2\zeta) \simeq 2$.

3.7.1 Schémas fonctionnel et de réalisation



3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3.7.2 Détecteur de phase (XOR)

3.7.3 Filtre à retard de phase

3.7.4 Oscillateur

3.7.5 PLL en boucle ouverte

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

3.7.6 PLL en boucle fermée

3.7.7 Calcul du filtre

Les résultats de la simulation de ce circuit sont présentés dans la figure 3.19. On peut constater que le temps d'établissement souhaité $t_{5\%} \simeq 1$ ms est bien respecté.

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

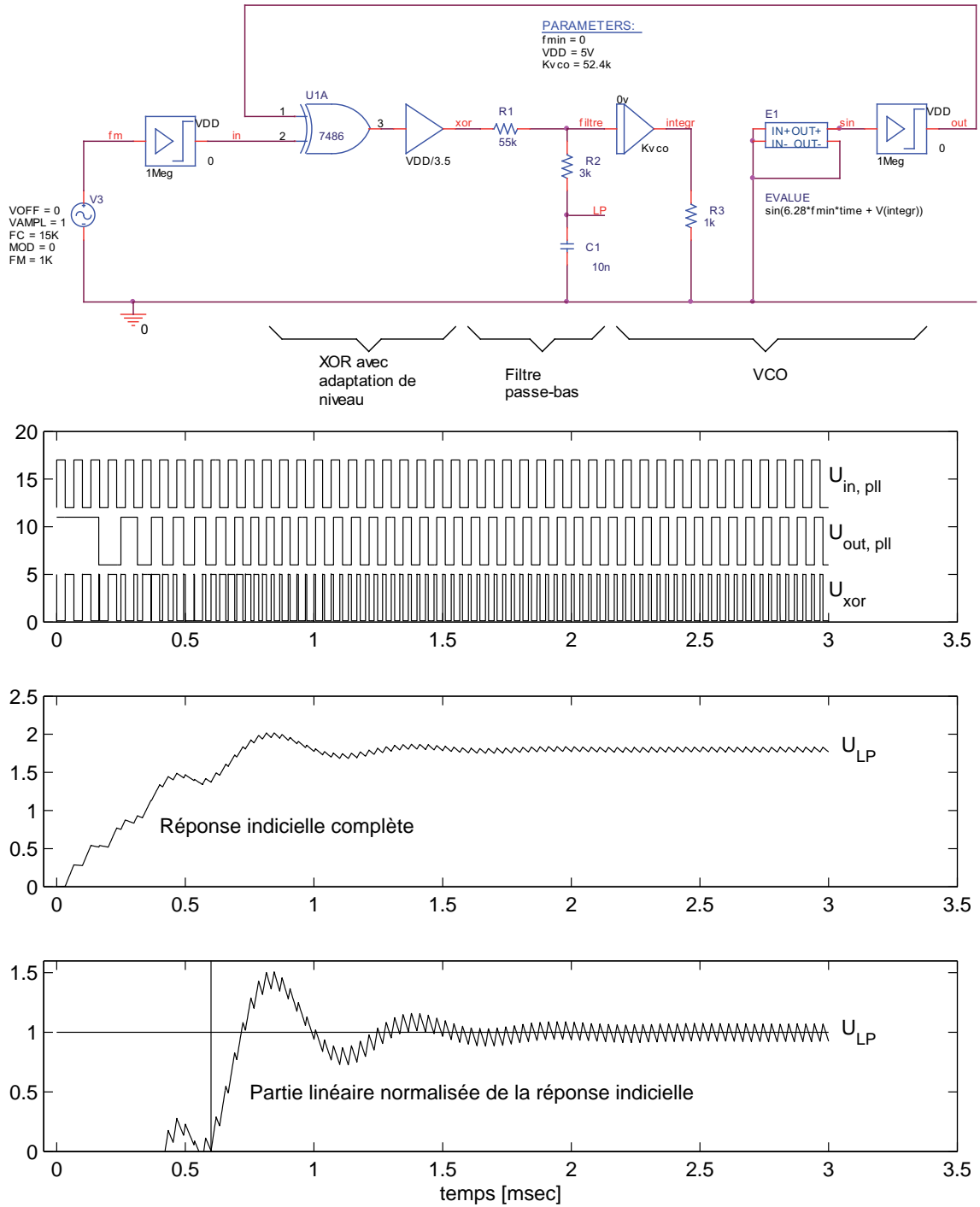


FIG. 3.19: Schéma de simulation et résultats avec $f_1 = 0.6 f_{max} = 15$ [kHz]

3.8 Simulation d'un circuit PLL

Le schéma de simulation proposé dans la figure 3.19 est tiré d'une note d'application de MicroSim [3]. C'est une très jolie illustration de la manière dont on peut résoudre avec Spice un problème décrit mathématiquement : ici, le fonctionnement du VCO. La description mathématique de celui-ci doit traduire le fait que la pulsation $\omega(t)$ du signal de sortie est commandée par la tension d'entrée $u_{in}(t)$.

Partant de la description fondamentale d'un signal sinusoïdal (avec l'argument $\theta(t)$ et non la pulsation $\omega(t)$), on a

$$u_{vco}(t) = A \sin(\theta(t)) \quad \text{avec} \quad \theta(t) \equiv \int_0^t \omega(t) dt$$

Comme la pulsation générée par le VCO vaut

$$\omega(t) = 2\pi f(t) = 2\pi (f_{min} + K'_{vco} u_{in}(t))$$

il vient

$$\begin{aligned} \theta(t) &\equiv \int_0^t \omega(t) dt = 2\pi \int_0^t (f_{min} + K'_{vco} u_{in}(t)) dt \\ \theta(t) &= 2\pi f_{min} t + K_{vco} \int_0^t u_{in}(t) dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

C'est cette dernière équation qui est introduite dans la partie VCO de la simulation du PLL où l'on a

```
V(integr)= Kvco * int(V(filtre))
Evalue = sin(6.28*fmin*time + V(integr))
```

Le circuit E1 est une source de tension commandée par l'expression **Evalue** dont l'amplitude est ensuite transformée en un signal carré compris entre 0 et V_{DD} .

La réponse indicielle illustrée par la figure 3.19 montre très bien les tentatives d'accrochage successives jusqu'en $t \simeq 0.6$ [ms]. À partir de là, l'accrochage étant établi, la synchronisation se fait avec un comportement linéaire comme le prévoit la théorie.

3.9 Circuit PLL en mode non - synchronisé

Lorsque la fréquence du signal d'entrée est trop différente du domaine de fonctionnement du PLL, celui-ci ne parvient plus à suivre la fréquence d'entrée f_1 . Pour que le PLL puisse se synchroniser, il faut que f_1 entre dans le domaine d'accrochage soit depuis le bas en f_{a1} , soit depuis le haut en f_{a2} (figure 3.20). Le domaine d'accrochage est alors défini par la relation suivante :

$$\Delta f_a = f_{a2} - f_{a1}$$

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Une fois le PLL synchronisé sur le signal d'entrée, la fréquence du signal de sortie f_2 pourra varier dans un domaine plus large tout en restant synchronisée avec f_1 . On se trouve alors dans le domaine de synchronisation défini par

$$\Delta f_s = f_{s1} - f_{s2}$$

où f_{s1} est la fréquence de sortie du domaine de synchronisation par le haut, alors que f_{s2} est celle de sortie par le bas.

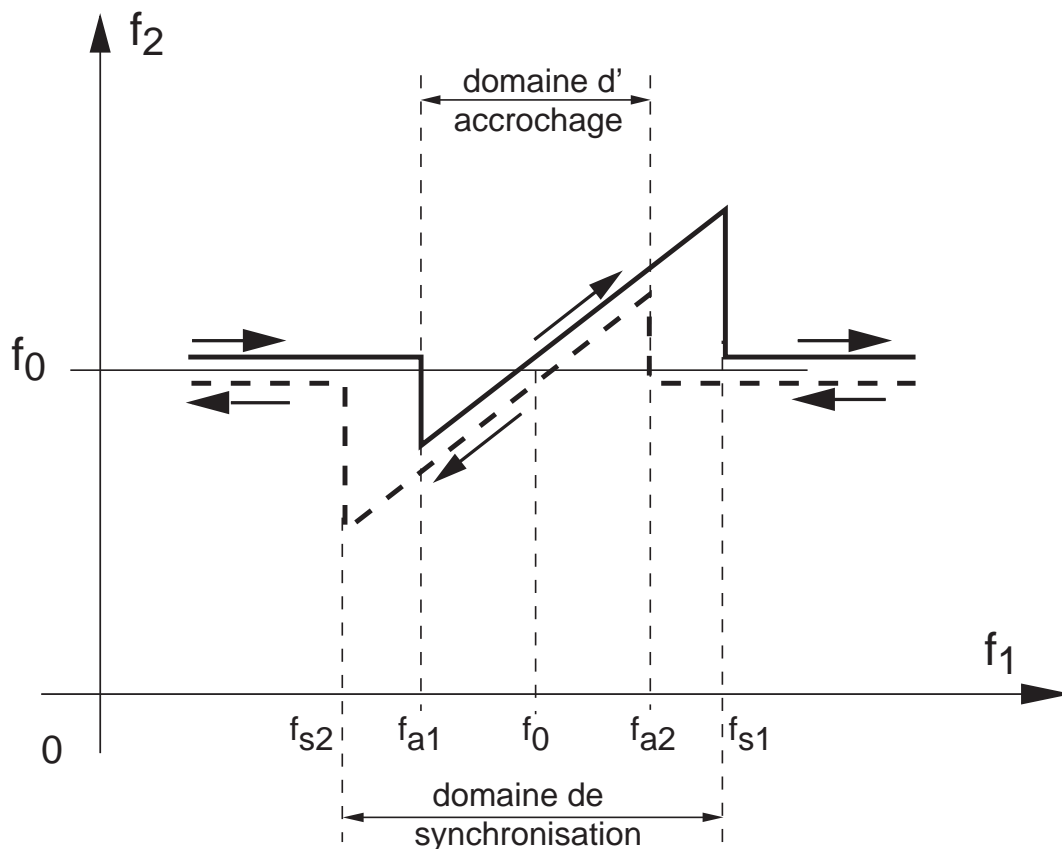


FIG. 3.20: Fonctionnement d'un PLL en mode non-synchronisé

3.10 Exercices

Reg 1 Considérant un système constitué d'un gain K_a et de deux constantes de temps τ_1 et τ_2 décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{(1 + s\tau_1)} \frac{1}{(1 + s\tau_2)}$$

1. Que valent ω_n , ζ et le gain K_{bo} du système en boucle ouverte ?
2. On boucle le système sur lui-même avec une réaction négative,
 - a) calculez la fonction de transfert en boucle fermée $G_w(s)$;
 - b) que valent ω_n , ζ et le gain K_{bf} du système bouclé ?
 - c) admettant $\tau_1 = \tau_2$, que doit valoir le gain K_a pour que $\zeta = 0.5$?
 - d) admettant $\tau_1 \gg \tau_2$, que doit valoir le gain K_a pour que $\zeta = 0.5$?

Rép. : $K_a = 3$; $K_a \simeq \tau_1/\tau_2$

Reg 2 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{s(s+10)}$$

bouclé sur lui-même avec une réaction négative,

1. Quelle valeur faut-il donner au gain K_a pour que le dépassement de la réponse indicielle soit de 10% ?
2. Que valent alors le temps de montée t_r , le temps d'établissement $t_{5\%}$ et le gain K_{bf} ?

Rép. : $\zeta = 0.59$; $K_a = 71.5$; $K_{bf} = 1$; $t_r \simeq 0.2$ [sec]; $t_{5\%} \simeq 0.6$ [sec]

Reg 3 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a \frac{1}{(s+a)} \frac{1}{(s+25)}$$

que l'on boucle sur lui-même avec une réaction négative, trouvez la valeur du gain K_a et la position du pôle $-a$ qui permettront d'avoir un dépassement inférieur à 10% et un temps d'établissement $t_{5\%}$ inférieur à 0.1 seconde.

Rép. : $\zeta > 0.59$; $\omega_n > 50.7$ [rad/sec]; $a \Rightarrow 35$ [1/sec]; $K_a > 1.7 \cdot 10^3$

Reg 4 Considérant un système décrit par

$$G_o(s) = K_a G_{a1}(s) G_{a2}(s) = K_a \frac{(s+z)}{(s+a)} \frac{1}{s(s+3)}$$

que l'on boucle sur lui-même avec une réaction négative, trouvez les valeurs de K_a , z et a pour que la réponse indicielle ait un dépassement de 10% et un temps d'établissement $t_{5\%}$ d'une seconde.

Reg 5 Considérant le schéma fonctionnel d'un asservissement de vitesse (figure 3.21) constitué d'un amplificateur de gain $K_a = 5$ [V/V], d'une génératrice tachymétrique de gain $K_g = 2$ V/1000 rpm et d'un moteur représenté par

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}} \text{ avec } \begin{cases} K_{mot} = 5 \text{ [(rad/sec)/V]} \\ \tau_{mot} = 10 \text{ [msec]} \end{cases}$$

1. Exprimez en unité SI la valeur du gain DC en boucle ouverte K_{bo} .
2. Recherchez ce que valent, **en boucle fermée**, la durée du régime transitoire et la vitesse permanente du moteur (en rpm) lorsque la consigne $w(t)$ vaut 10 [V].

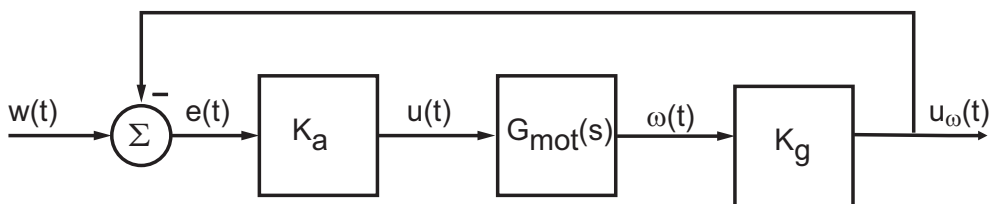


FIG. 3.21: Schéma fonctionnel d'un asservissement de vitesse

Reg 6 Considérant le schéma fonctionnel d'une régulation de position réalisée avec un moteur préalablement asservi en vitesse (figure 3.22) :

1. Calculez sa fonction de transfert en boucle fermée.
2. Recherchez la valeur du gain K_a pour que la réponse indicielle soit optimum lorsque

$$K_1 = 3 \frac{\text{rad/sec}}{\text{V}}, \quad K_g = 2 \frac{\text{mV}}{\text{rad/sec}}, \quad \tau_1 = 10 \text{ msec}$$

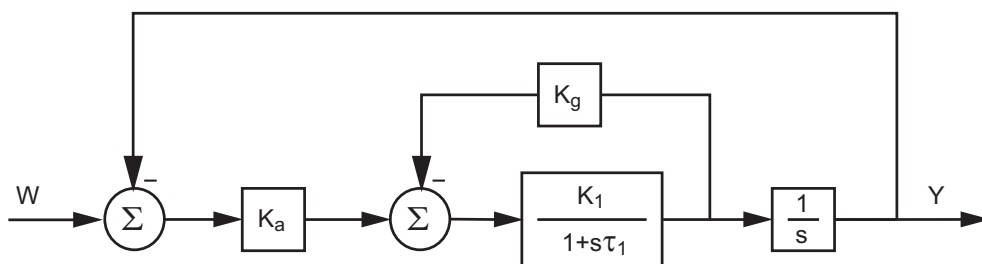


FIG. 3.22: Schéma fonctionnel d'un asservissement de position

Reg 7 On s'intéresse ici à un problème classique de la régulation automatique : la sustentation magnétique d'une sphère. La figure 3.23 en présente une photographie avec son schéma technologique. L'équation décrivant le mouvement de la sphère est très simple :

$$m\ddot{Y}(t) = -mg + F(Y(t), I(t))$$

La difficulté du problème réside dans le fait que la force $F(Y, I)$ dépend non linéairement de la position de la sphère et du courant circulant dans la bobine. On doit donc linéariser cette fonction autour d'un point de fonctionnement $\{Y_0, I_0\}$. En décrivant les variations de la position et du courant autour de ces valeurs, il vient

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 + y(t) & I(t) &= I_0 + i(t) \\ F(Y(t), I(t)) &= F(Y_0, I_0) + F(y(t), i(t)) \\ &\simeq F_0 + k_1 y(t) + k_2 i(t) \end{aligned}$$

En portant ce résultat dans l'équation de Newton, on obtient

$$m\ddot{Y}(t) = m\ddot{y}(t) = -mg + F_0 + k_1 y(t) + k_2 i(t)$$

Comme autour du point de fonctionnement la force F_0 équilibre le poids mg , on trouve que le mouvement de la sphère est décrit par

$$m\ddot{y}(t) = +k_1 y(t) + k_2 i(t)$$

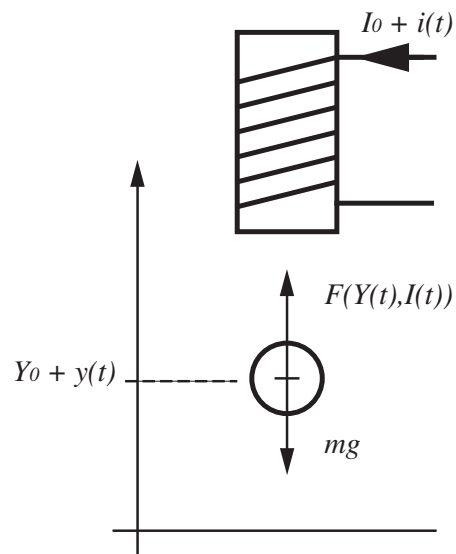
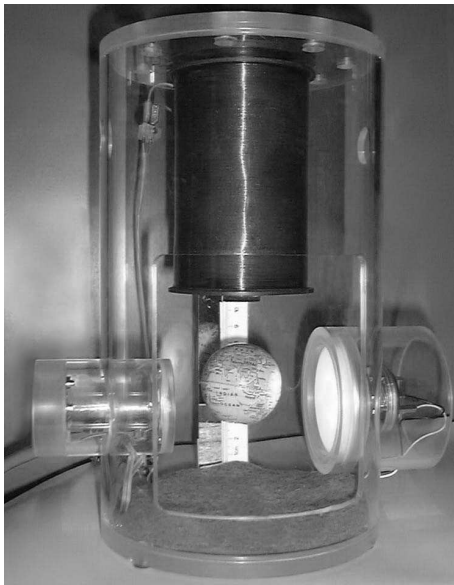


FIG. 3.23: Sustentation magnétique (réalisation heig-vd)

Pour maintenir la sphère à une hauteur donnée, il faut la placer dans une boucle de régulation contenant un correcteur qui génère le courant circulant dans la bobine. Ce correcteur, de type proportionnel-dérivé, est décrit par l'équation

$$i(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Étant donné ces préalables, on demande :

1. Calculez la fonction de transfert du système $G_a(s) = Y(s)/I(s)$ et montrez que le système seul est instable.

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

2. Calculez la fonction de transfert du correcteur $G_c(s) = I(s)/E(s)$.
3. Dessinez le schéma fonctionnel du système asservi ; indiquez la position des variables $w(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $y(t)$ et calculez sa fonction de transfert $G_f(s) = Y(s)/W(s)$.
4. Montrez que le système bouclé est stable si K_p est suffisamment grand. *Remarque* : un système d'ordre 2 est stable si tous les coefficients du dénominateur de $G(s)$ sont du même signe.
5. Le but de la régulation est de trouver les paramètres du correcteur de manière à satisfaire un cahier des charges. Dans notre cas, on peut trouver K_p et T_d de manière à ce que le système soit suffisamment rapide (ω_n) avec un amortissement satisfaisant (ζ). Pour le voir, écrivez $G_f(s)$ sous forme canonique et montrez que K_p et T_d dépendent des valeurs choisies pour ω_n et ζ de la manière suivante

$$K_p = \frac{m\omega_n^2 + k_1}{k_2}, \quad T_d = \frac{2\zeta\omega_n m}{K_p k_2}$$

6. Admettant que les paramètres de la sustentation magnétique valent

$$m = 0.012 \text{ kg}, \quad k_1 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad k_2 = 0.66 \frac{\text{N}}{\text{A}}$$

et que l'on souhaite avoir $\omega_n = 20 \text{ rad/sec}$ et $\zeta = 0.5$, calculez les valeurs de K_p et T_d ainsi que leurs unités. Que vaudra le temps d'établissement $t_{5\%}$?

7. Montrez que le correcteur peut être réalisé avec un amplificateur inverseur de gain $-Z_2/Z_1$ où $Z_2 = R_2$ et $Z_1 = R_1//C$. Dessinez son schéma.

PLL 0 Pour les exercices qui suivent, on considère un circuit PLL de type 4046B avec $V_{DD} = 5 \text{ [V]}$ et $V_{vco,min} = 2 \text{ [V]}$. De plus, on admettra que la capacité C_1 prend en compte la capacité interne du VCO.

PLL 1 On applique à un circuit XOR deux signaux carrés de même période $200 \text{ } [\mu\text{s}]$ décalés de $20 \text{ } [\mu\text{s}]$.

1. Dessinez le signal de sortie du XOR ; que valent le rapport cyclique et la période de ce signal ? Que vaut le gain du comparateur XOR ?
2. Le circuit XOR est relié à un filtre à retard de phase réalisé avec $R_3 = 45 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $R_4 = 5 \text{ [k}\Omega\text{]}$ et $C_2 = 5 \text{ [nF]}$. Que vaut la tension moyenne que l'on peut mesurer à la sortie du XOR, à la sortie du filtre et aux bornes de C_2 ? Que vaut la constante de temps du filtre ?
3. Dessinez le signal de sortie du filtre et la tension aux bornes de C_2 .

PLL 2 Un VCO est réalisé avec $R_1 = R_2 = 33 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $C_1 = 2.2 \text{ [nF]}$; calculez son domaine de fonctionnement. Dessinez sa caractéristique et calculez son gain.

PLL 3 On considère un PLL dont le gain en boucle ouverte K_{bo} vaut 10^5 [1/sec]. Dessinez son schéma fonctionnel puis calculez les trois composants pour que ce circuit ait un temps de réponse de 100 [μ sec] et un coefficient d'amortissement égal à 0.5.

PLL 4 Un PLL est réalisé avec $R_1 = 100$ [k Ω], $R_2 = 25$ [k Ω], $R_3 = 10$ [k Ω], $R_4 = 3.3$ [k Ω] et $C_1 = 1$ [nF], $C_2 = 10$ [nF].

1. Dessinez son schéma électronique et son schéma fonctionnel.
2. Calculez son domaine de fonctionnement.
3. Calculez le coefficient d'amortissement et le temps de réponse du PLL.
4. Considérant sa réponse $f_2(t)$ à un saut de fréquence $f_1(t)$, que valent t_{trans} et N_{osc} ? Esquissez l'évolution de la fréquence $f_2(t)$.

PLL 5 On veut réaliser un PLL dont le domaine de travail se situe entre 50 kHz et 150 kHz.

1. Dessinez la caractéristique du VCO puis calculez les trois composants nécessaires à son fonctionnement.
2. Le PLL reçoit en entrée un signal carré dont la fréquence varie entre 80 et 120 kHz; que vaut la tension d'entrée du VCO?

PLL 6 Calculez les composants d'un PLL fonctionnant entre 10 kHz et 50 kHz pour qu'il puisse suivre l'entrée avec un temps d'établissement $t_s \simeq 0.5$ [msec] et un coefficient d'amortissement $\zeta \simeq 0.5$.

Simulez votre circuit avec une fréquence d'entrée de 30 kHz. Combien de temps faut-il au PLL pour qu'il entre dans sa zone de fonctionnement linéaire? Son temps de réponse correspond-il à celui souhaité?

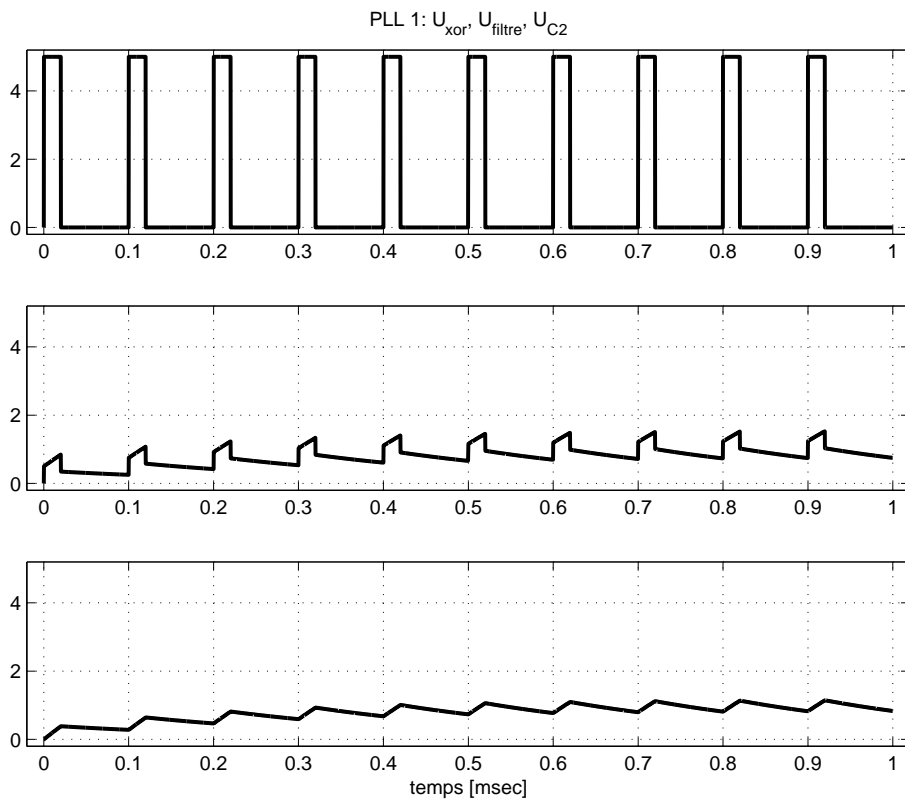
PLL 7 On veut réaliser un circuit PLL dont la fréquence de sortie est deux fois supérieure à la fréquence d'entrée alors que celle-ci varie entre 20 et 30 [kHz].

1. Dessinez le schéma de réalisation.
2. Calculez les composants du filtre à retard de phase permettant d'avoir un temps de réponse de 1 msec environ avec un coefficient d'amortissement $\zeta = 0.5$.

3 ÉLÉMENTS DE RÉGULATION AUTOMATIQUE

Quelques réponses :

PLL 1	1	$\eta = 0.2, T_{xor} = 0.1$ [msec]	$K_{\varphi} = V_{DD}/\pi$
	2	$U_{dc} = 1.0$ [V]	$\tau = 0.25$ msec
PLL 2		13.8 [kHz] $\leq f \leq 27.5$ [kHz]	$K'_{vco} = 4.59$ [kHz/V]
PLL 3		$C_2 = 1$ [nF]	$R_3 = 21$ [k Ω], $R_4 = 6.7$ [k Ω]
PLL 4	2	40 [kHz] $\leq f \leq 50$ [kHz]	$K'_{vco} = 20.9 \cdot 10^3$ [(rad/sec)/V]
	3	$\omega_n = 15'830, \zeta = 0.5$	$t_{5\%} = 0.18$ [msec]
	4	$t_{trans} = 0.3$ [msec]	$N_{osc} \simeq 1.4$
PLL 5	1	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 10$ [k Ω], $R_2 = 20$ [k Ω]
	2	$K'_{vco} = 33.3 \cdot 10^3$ [(rad/sec)/V]	2.9 [V] $\leq U_{vco} \leq 4.1$ [V]
PLL 6	VCO	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 25$ [k Ω], $R_2 = 100$ [k Ω]
	filtre	$C_2 = 10$ [nF]	$R_3 = 85$ [k Ω], $R_4 = 7.6$ [k Ω]
	Spice	$t_{lin} \simeq 0.58$ [ms]	$t_s \simeq 0.46$ [ms]
PLL 7	VCO	$C_1 = 1$ [nF]	$R_1 = 50$ [k Ω], $R_2 = 25$ [k Ω]
	filtre	$C_2 = 10$ [nF]	$R_3 = 170$ [k Ω], $R_4 = 15$ [k Ω]



Bibliographie

- [1] M. Etique : *Cours de régulation automatique*, eivd-iAi, 2004
- [2] Michel Girard, *Boucles à verrouillage de phase*, McGraw-Hill, 1988
- [3] MicroSim Application Notes, version 8.0, june 1997, pp. 303-305