

4 Analyse des signaux périodiques

4.1 Introduction

L'analyse harmonique ou fréquentielle est l'instrument majeur de la théorie des signaux. Le développement en séries de Fourier et, plus généralement, la transformation de Fourier permettent d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

Les calculs et mises en forme des résultats à venir sont grandement facilités si l'on maîtrise et sait utiliser les relations suivantes :

$$A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\varphi + \operatorname{atg}\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\sin(2\pi f t + \alpha))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\varphi) & = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \\ 2j \sin(\varphi) & = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2 Deux représentations pour un seul signal

Le temps et la fréquence sont deux bases servant à la description des signaux. Ce sont deux points de vue différents d'une même réalité ; ils sont complémentaires. Il est important de bien comprendre les relations qui existent entre ces deux bases ; c'est le but de ce chapitre.

Une grandeur sinusoïdale est décrite par l'équation

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \quad (4.4)$$

Son évolution temporelle est contenue dans le mot *cos* ; dès lors, on sait que le signal $x(t)$ ondule avec une forme précise fixée par la fonction cosinus. Cependant, des informations supplémentaires sont données : l'amplitude A , la phase α et la fréquence f_0 . Ce sont ces informations qui sont fournies par la représentation fréquentielle ou spectrale.

Comme le temps et la fréquence sont les deux composantes de la description d'un même signal, une sinusoïde devrait être représentée dans un espace à trois dimensions (fig. 4.1). Une telle représentation étant mal pratique, on la remplace par ses projections sur les plans temporel et fréquentiel.

Dans la projection sur l'axe du temps, on retrouve le dessin bien connu d'une sinusoïde, alors que la projection sur l'axe des fréquences conduit à une raie située en $f = f_0$ et de hauteur A . Comme cette projection ne fournit que l'amplitude A , il est nécessaire, pour la fréquence considérée, de donner également la phase α . Ces deux diagrammes portent le nom de *spectres d'amplitudes et de phases*.

Considérons un signal composé de deux sinusoïdes

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}A \cos(4\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}) \quad (4.5)$$

La figure 4.2a illustre le comportement temporel de ce signal et de ses deux composantes. La figure 4.2b montre ce qui se passe alors dans l'espace des fréquences. On notera que la somme des deux sinusoïdes dans l'espace temps conduit également à la somme des spectres d'amplitudes et de phases.

4.3 Séries de Fourier

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales. Une illustration de la construction d'un signal périodique non-sinusoïdal est donnée à la figure 4.3 : le signal résultant est la somme de trois sinusoïdes dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0 .

4.3.1 Définition de la série de Fourier

Considérons un signal périodique $x(t)$ de période $T = 1/f_0$. Son développement en série de Fourier est alors le suivant

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (4.6)$$

où $f_0 = 1/T$ est la fréquence fondamentale du signal, $a_0/2$ est la valeur moyenne ou composante continue et a_k, b_k sont les coefficients de Fourier du développement en cosinus et sinus.

Les coefficients de Fourier a_k et b_k se calculent comme suit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 0 \quad (4.7)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 1 \quad (4.8)$$

N.B. : Cette représentation qui sert de point de départ au développement en séries de Fourier n'a aucun intérêt en traitement du signal ; elle est remplacée par la série en cosinus et la série complexe.

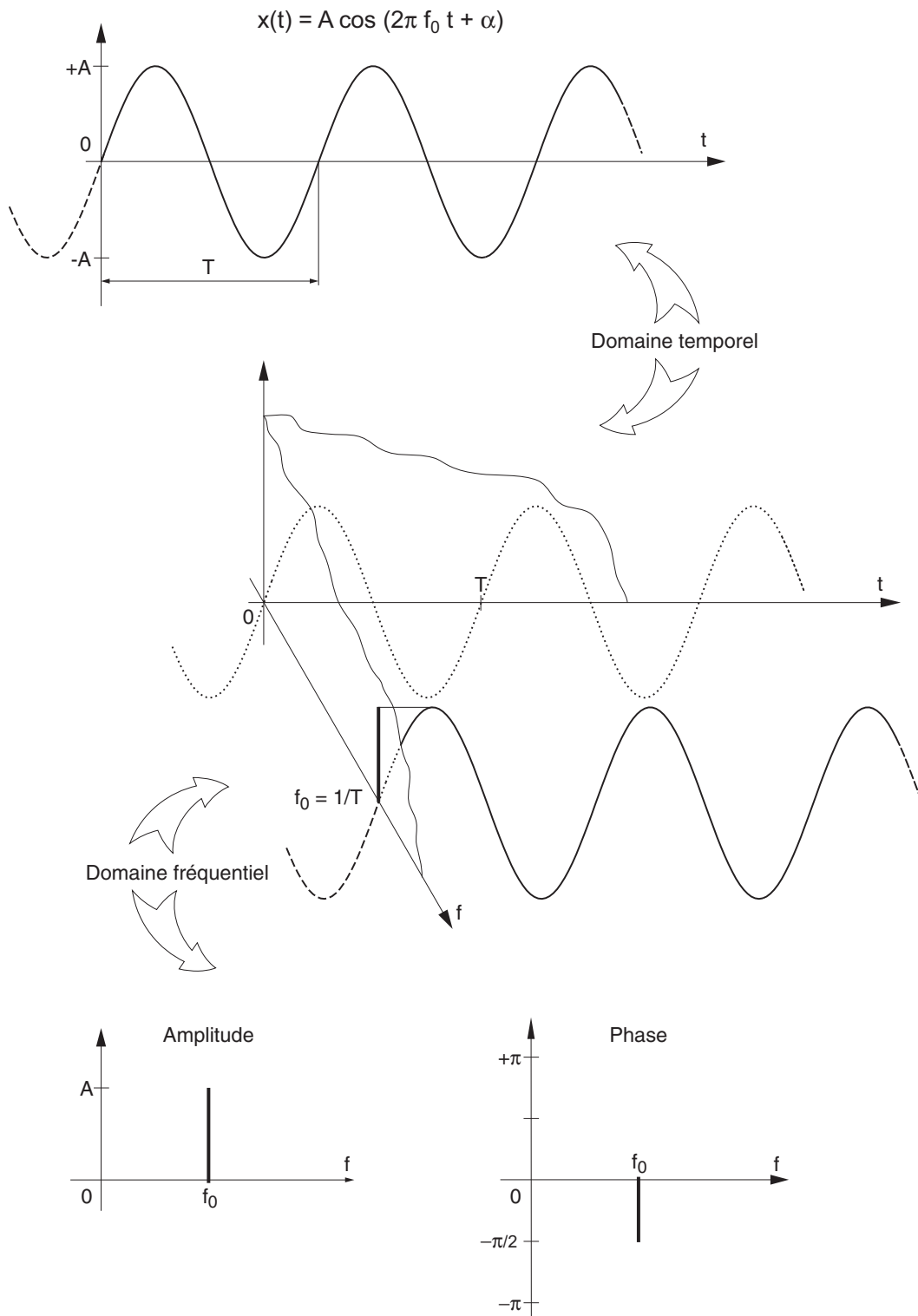


FIG. 4.1: Descriptions temporelle et fréquentielle d'une sinusoïde

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

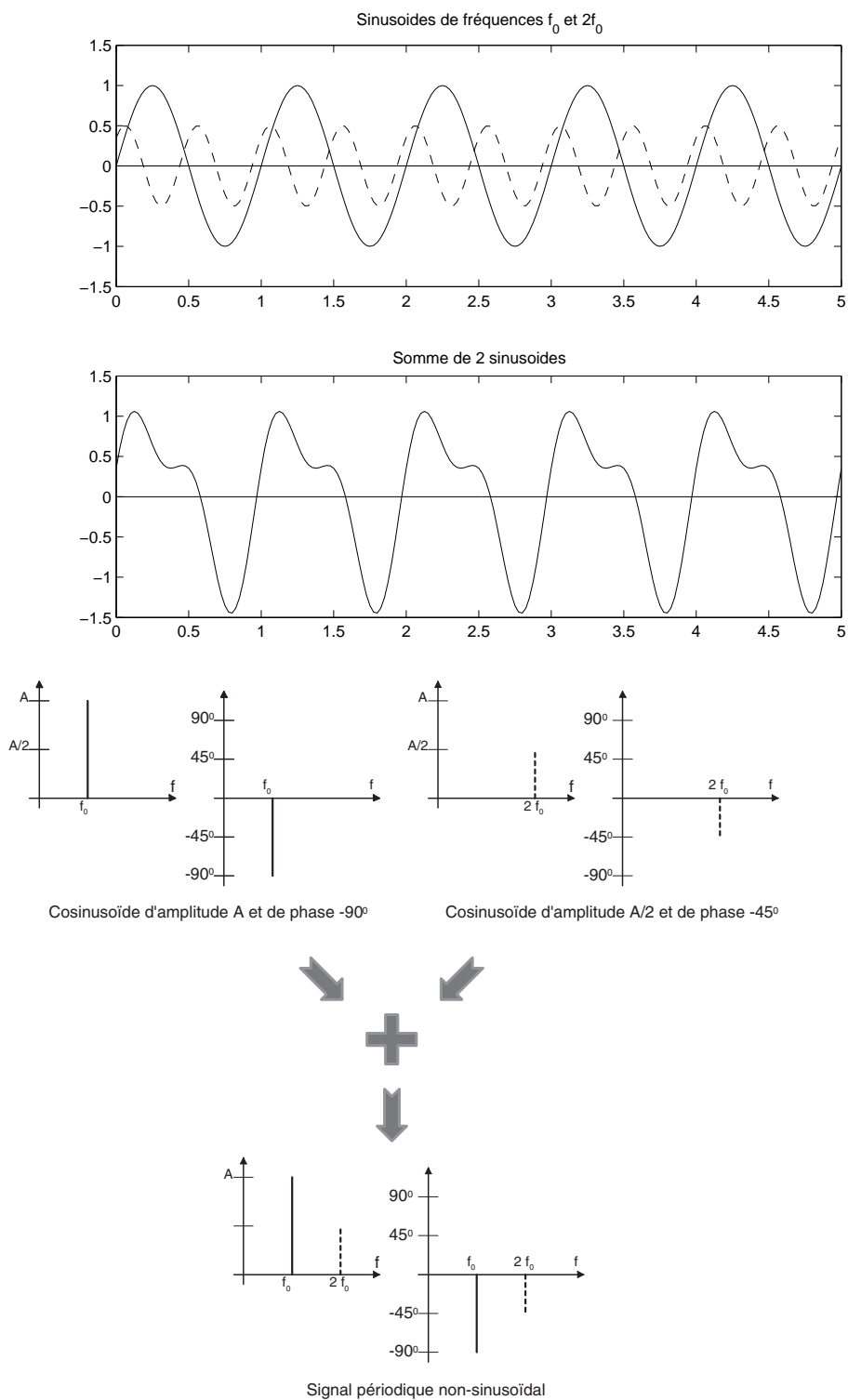


FIG. 4.2: Représentation de la somme de deux sinusoïdes de fréquences différentes dans les domaines temporel et fréquentiel

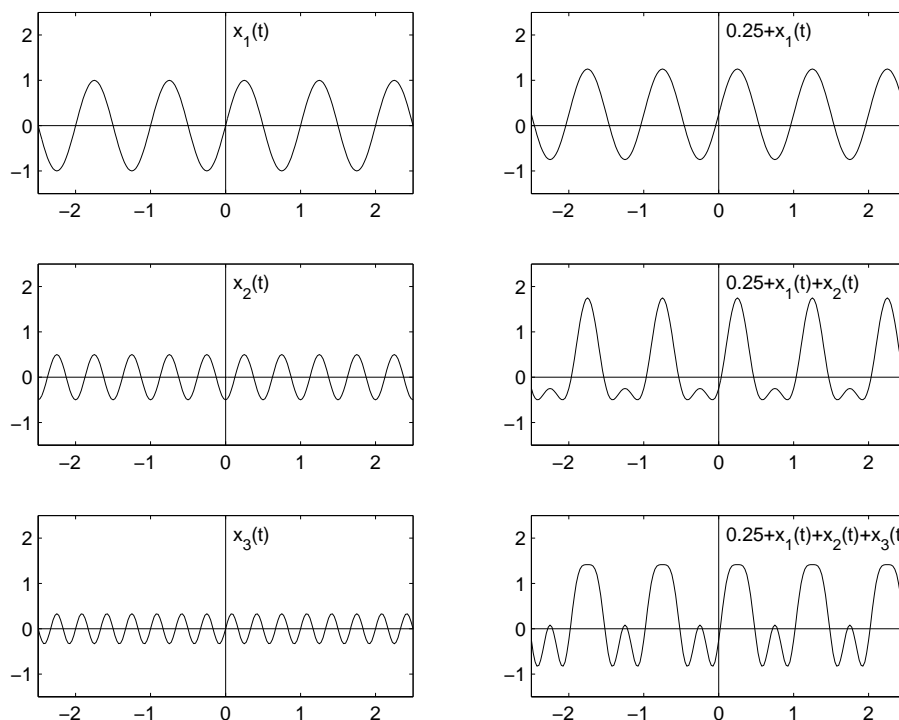


FIG. 4.3: Construction d'un signal périodique non-sinusoidal

4.3.2 Série de Fourier en cosinus

Prenant en compte la relation trigonométrique suivante

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (4.9)$$

on voit que le développement en série de Fourier peut également s'écrire

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (4.10)$$

avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \quad (4.11)$$

Cette série en cosinus est extrêmement importante car elle correspond à la description bien connue des signaux en régime sinusoïdal permanent où l'on représente un courant ou une tension par leur amplitude et leur phase. D'un point de vue pratique, cela revient à considérer que le signal $x(t)$ est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux. La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de *spectre unilatéral*.

Une illustration en est donnée à la figure 4.4. On y voit une onde périodique en dents de scie qui peut être reconstruite par une superposition d'ondes sinusoïdales. Cette superposition peut être présentée dans l'espace temps ou, de manière équivalente et plus explicite, dans l'espace des fréquences.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

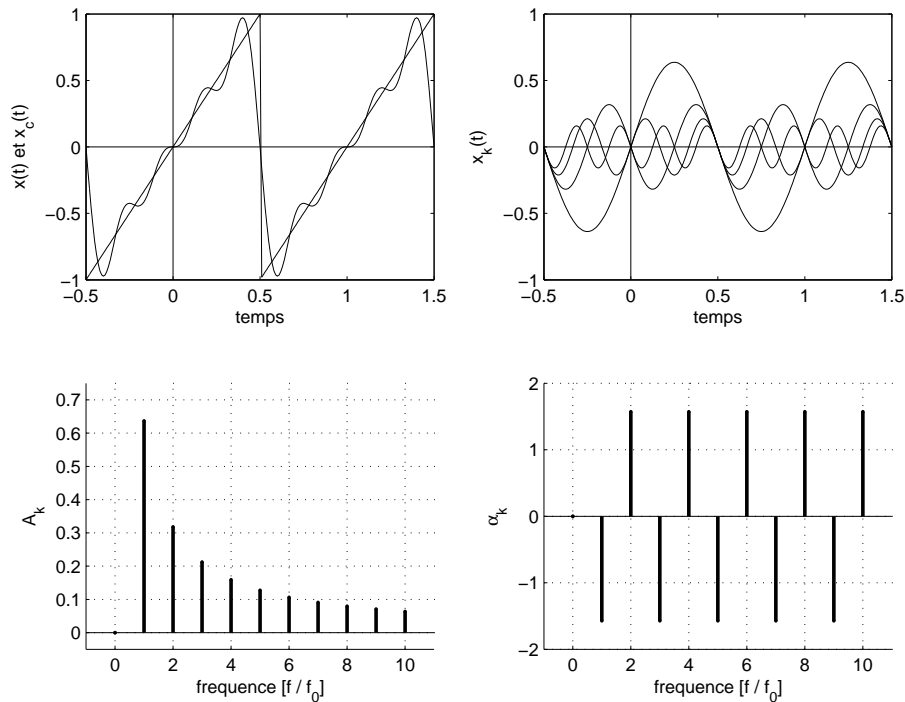


FIG. 4.4: Onde en dents de scie, composantes et spectres d'amplitudes et de phases

4.3.3 Série de Fourier complexe

Se souvenant des relations d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(+jx) + \exp(-jx)) \quad (4.12)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (\exp(+jx) - \exp(-jx)) \quad (4.13)$$

on montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad (4.14)$$

Les coefficients $X(jk)$ sont alors complexes et valent

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad -\infty < k < +\infty \quad (4.15)$$

La représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de *spectre bilatéral*. Pour la suite du cours, on retiendra essentiellement cette description car elle est analytiquement plus intéressante que la forme en cosinus.

On remarquera au passage que la formule d'Euler remplace les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles à exposant imaginaire appelées *phaseurs*. Ces phaseurs ne sont rien d'autres que des fonctions complexes oscillant cosinusoidalement sur l'axe réel et sinusoidalement sur l'axe imaginaire.

4.3.4 Relations entre les trois représentations de Fourier

Les relations existant entre les trois représentations de Fourier sont présentées et illustrées par le tableau et le graphe vectoriel de la figure 4.5. Ce graphe est important car il permet de voir en un coup d'oeil les relations simples liant les trois représentations spectrales. On retiendra également la relation existant entre les coefficients spectraux et la valeur efficace d'une composante spectrale

$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)| \quad (4.16)$$

Remarque À ce stade, il est important de souligner que, partant d'un signal connu $x_0(t)$, on commence par faire *l'analyse de ce signal en calculant ses coefficients de Fourier* $A(k)$, $\alpha(k)$ ou $X(\pm jk)$. Puis, une fois ceux-ci connus, *en calculant la somme de Fourier, on fait la synthèse du signal $x(t)$* . Et, comme le verra plus loin, dans certains cas (phénomène de Gibbs), le signal synthétique $x(t)$ ne sera pas exactement égal à $x_0(t)$.

4.4 Théorème de la puissance ou de Parseval

Dans l'espace temps, la définition de la puissance moyenne normalisée est la suivante

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = X_{eff}^2 \quad (4.17)$$

On notera que cette définition coïncide avec celle du carré de la valeur efficace du signal $x(t)$. La puissance normalisée ne s'exprime donc pas en [W], mais en [V²] ou [A²] selon que le signal est une tension ou un courant électrique.

Le théorème de Parseval montre que la puissance normalisée d'un signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. En effet, comme dans l'espace des fréquences, le signal $x(t)$ est représenté par des générateurs d'amplitude A_k , il s'ensuit que la puissance totale est égale à la somme des puissances fournies par chaque générateur. On en déduit alors :

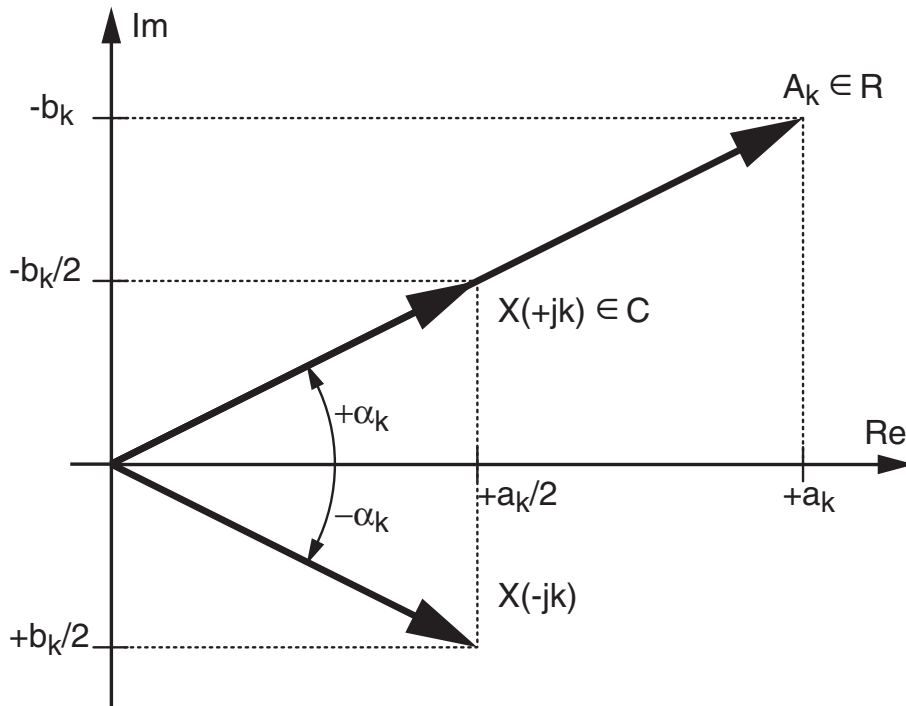
$$\begin{aligned} P = X_{eff}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k &= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = P_{dc} + P_{ac} \\ &= X(0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2 \cdot |X(jk)|)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \end{aligned}$$

De ces résultats, on conclut que la puissance peut se calculer avec l'une ou l'autre des équations (4.18) à (4.21) et que

le carré de la valeur efficace d'un signal est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune de ses composantes.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

$k = 0$	$a_0/2$	A_0	$X(0)$
$k > 0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm jk)$
a_k	a_k	$+A_k \cos(\alpha_k)$	$+2 \operatorname{Re}\{X(jk)\}$
b_k	b_k	$-A_k \sin(\alpha_k)$	$-2 \operatorname{Im}\{X(jk)\}$
A_k	$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	A_k	$2 X(jk) $
α_k	$\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	α_k	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{X(+jk)\}}{\operatorname{Re}\{X(+jk)\}}\right)$
$X(+jk)$	$\frac{1}{2}(a_k - jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(+j\alpha_k)$	$X(+jk)$
$X(-jk)$	$\frac{1}{2}(a_k + jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(-j\alpha_k)$	$X(-jk)$



$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)|$$

FIG. 4.5: Relations entre les trois représentations spectrales

4.5 Spectres d'amplitudes et de phases

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \equiv X_{eff}^2 \quad (4.18)$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = X(0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad (4.19)$$

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (4.20)$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2 \quad (4.21)$$

À ce stade, il est intéressant de rappeler ce que valent les puissances des trois signaux usuels que sont le carré, le sinus et le triangle à valeur moyenne nulle ($P_{dc} = 0$) et d'amplitude A :

$$x(t) = A \text{ sqr}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{1} \quad (4.22)$$

$$x(t) = A \sin(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{2} \quad (4.23)$$

$$x(t) = A \text{ tri}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{3} \quad (4.24)$$

4.5 Spectres d'amplitudes et de phases

4.5.1 Spectres unilatéraux et bilatéraux

La description de $x(t)$ avec les fonctions cosinusoidales conduit aux *spectres unilatéraux* d'amplitudes et de phases (A_k et α_k) du signal $x(t)$. Ici, les fréquences sont positives ou nulles car le compteur k des harmoniques varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.6). La description de $x(t)$ avec les fonctions complexes conduit aux *spectres bilatéraux* d'amplitudes et de phases ($|X(jk)|$ et $\angle X(jk)$). Ici, les fréquences sont négatives et positives car le compteur k varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours des *fonctions paires* car on a

$$|X(+jk)| = |X(-jk)| = \frac{A_k}{2}, \quad k \neq 0 \quad (4.25)$$

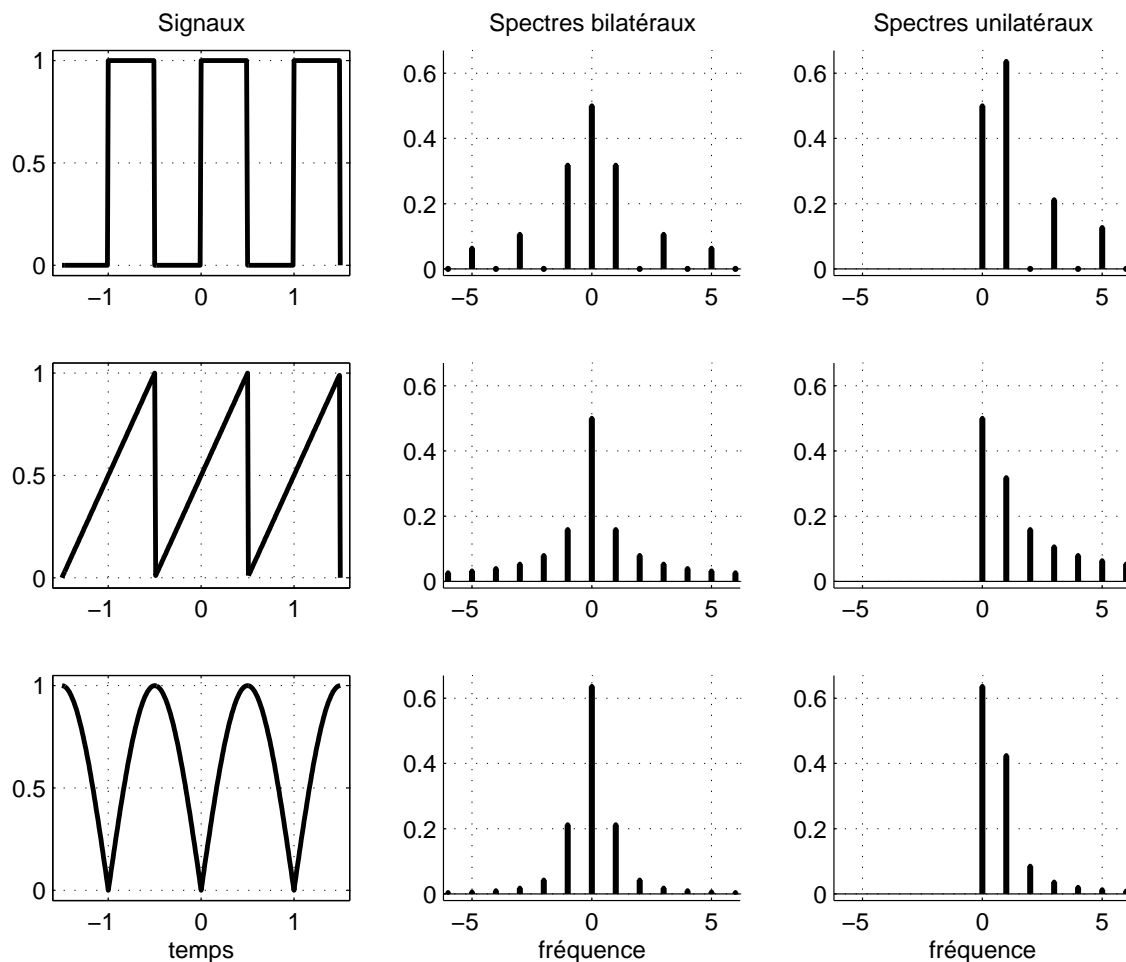
alors que les spectres de phases sont toujours des *fonctions impaires*. On a en effet

$$\angle X(+jk) = -\angle X(-jk) = \alpha_k, \quad k \neq 0 \quad (4.26)$$

Pour le cas particulier de la composante continue du signal, on a

$$|X(0)| = A_0, \quad \angle X(0) = 0, \pi$$

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES



Signaux	P	$X(0)$	$X(jk)$
carré :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j \frac{1}{k\pi}$ si k est impair, 0 sinon
dents-de-scie :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+j \frac{(-1)^k}{2k\pi}$ $-\infty < k < +\infty$
sinus redressé :	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}$ $-\infty < k < +\infty$

FIG. 4.6: Quelques signaux avec leurs puissance et spectres d'amplitudes uni- et bilatéraux

4.5.2 Coefficients spectraux et symétries des signaux

Si l'on tient compte des symétries du signal, le calcul des séries de Fourier est simplifié. On démontre en effet aisément les propriétés suivantes :

– une *fonction paire* est représentée par des cosinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = 0, \pm\pi \quad \text{Im}\{X(jk)\} = 0 \quad (4.27)$$

– une *fonction impaire* est représentée par des sinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \text{Re}\{X(jk)\} = 0 \quad (4.28)$$

– une *fonction à symétrie demi-onde* ne possède pas d'harmoniques pairs :

$$X(jk) = 0, \quad \text{si } k \text{ est pair} \quad (4.29)$$

Les fonctions à symétrie demi-onde sont telles qu'une rotation autour de l'abscisse de l'alternance positive ou négative permet de reproduire l'autre alternance (figure 4.7).

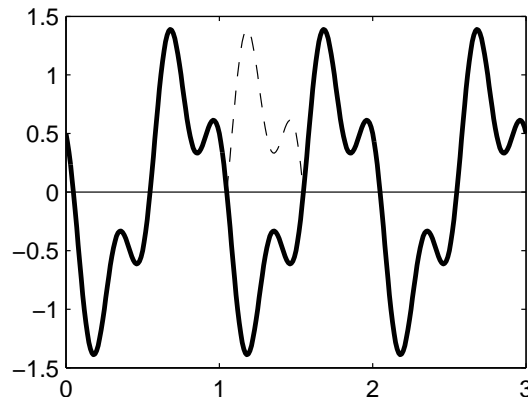


FIG. 4.7: Exemple d'une fonction à symétrie demi-onde

4.5.3 Exemple de représentations spectrales d'un signal

Considérant le signal

$$x(t) = 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin(6\pi f_0 t + \pi/4)$$

on souhaite le décrire dans les représentations spectrales uni- et bi-latérales.

La simple observation de l'expression de $x(t)$ montre que ce signal est constitué d'une composante DC et de deux composantes AC d'ordre 1 et 3. Utilisant les règles de trigonométrie, on obtient la forme en cosinus :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 + \sqrt{2^2 + 3.464^2} \cos\left(2\pi f_0 t + \arctan\left(\frac{-(-3.464)}{2}\right)\right) + 2 \cos\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3 + 4 \cos(2\pi \cdot 1 \cdot f_0 t + \pi/3) + 2 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot f_0 t - \pi/4) \\ &= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \alpha_1) + A_3 \cos(6\pi f_0 t + \alpha_3) \end{aligned}$$

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale unilatérale* de laquelle on déduit immédiatement les composantes spectrales unilatérales

$$\begin{aligned}A_0 \angle \alpha_0 &= 3 \angle 0 \\A_1 \angle \alpha_1 &= 4 \angle + \pi/3 \\A_2 \angle \alpha_2 &= 0 \angle 0 \\A_3 \angle \alpha_3 &= 2 \angle - \pi/4\end{aligned}$$

Appliquant les règles d'Euler à l'expression en cosinus, on obtient la forme complexe :

$$\begin{aligned}x(t) &= 3 + 2 \exp(+j(2\pi f_0 t + \pi/3)) + 2 \exp(-j(2\pi f_0 t + \pi/3)) \\&\quad + 1 \exp(+j(6\pi f_0 t - \pi/4)) + 1 \exp(-j(6\pi f_0 t - \pi/4)) \\&= 3 + 2 \exp(+j\pi/3) \exp(+j2\pi f_0 t) + 2 \exp(-j\pi/3) \exp(-j2\pi f_0 t) \\&\quad + 1 \exp(-j\pi/4) \exp(+j6\pi f_0 t) + 1 \exp(+j\pi/4) \exp(-j6\pi f_0 t) \\&= X(0) + X(+j1) \exp(+j2\pi f_0 t) + X(-j1) \exp(-j2\pi f_0 t) \\&\quad + X(+j3) \exp(+j6\pi f_0 t) + X(-j3) \exp(-j6\pi f_0 t)\end{aligned}$$

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale bilatérale* de laquelle on tire immédiatement les composantes spectrales bilatérales

$$\begin{aligned}X(0) &= 3 = 3 \angle 0 \\X(\pm j1) &= 2 \exp(\pm j\pi/3) = 2 \angle \pm \pi/3 \\X(\pm j2) &= 0 \angle 0 \\X(\pm j3) &= 1 \exp(\mp j\pi/4) = 1 \angle \mp \pi/4\end{aligned}$$

De la lecture de ces descriptions découle immédiatement le tracé des spectres d'amplitudes et de phases dans les deux représentations spectrales (figure 4.8). On notera que, pour $k \neq 0$, les amplitudes du spectre bilatéral sont 2 fois plus petites que celles du spectre unilatéral.

Les puissances et valeurs efficaces associées à ce signal se calculent aisément à partir du spectre unilatéral. Afin de pouvoir préciser les unités, on admet que le signal $x(t)$ est une tension électrique ; on a alors :

$$\begin{aligned}P_{dc} = A_0^2 = 3^2 = 9 \text{ V}_{dc}^2 &\quad P_{ac} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} A_k^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 0 + 2^2) = 10 \text{ V}_{ac}^2 \\P = P_{dc} + P_{ac} = 19 \text{ V}_{eff}^2 &\quad X_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{19} = 4.36 \text{ V}_{eff} \\X_{dc} = A_0 = 3 \text{ V}_{dc} &\quad X_{ac} = \sqrt{P_{ac}} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ V}_{ac}\end{aligned}$$

4.6 Suite d'impulsions

4.6.1 Suite d'impulsions rectangulaires

La suite d'impulsions rectangulaires (SIR) est un signal particulièrement important car elle apparaît dans de nombreuses applications telles que l'échantillonnage, la

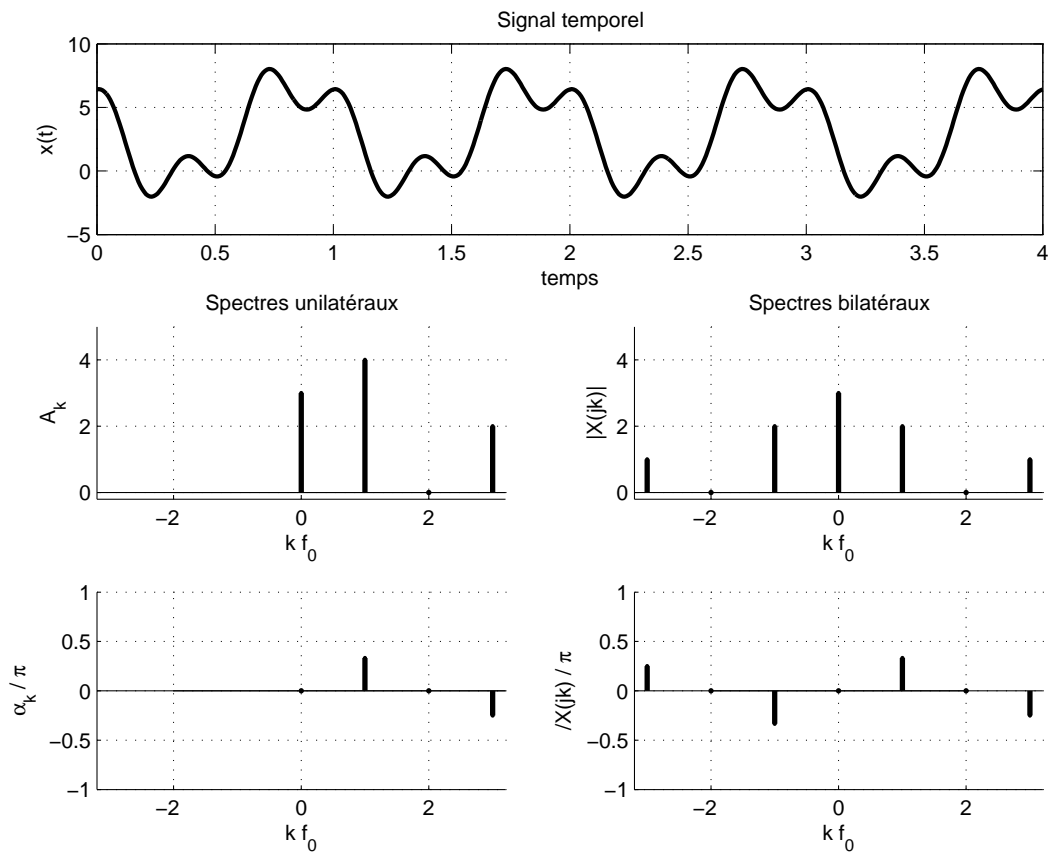


FIG. 4.8: Représentations spectrales d'un signal périodique

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

modulation d'impulsions, etc. Évaluons donc la série de Fourier complexe de la SIR $x(t)$ représentée à la figure 4.9.

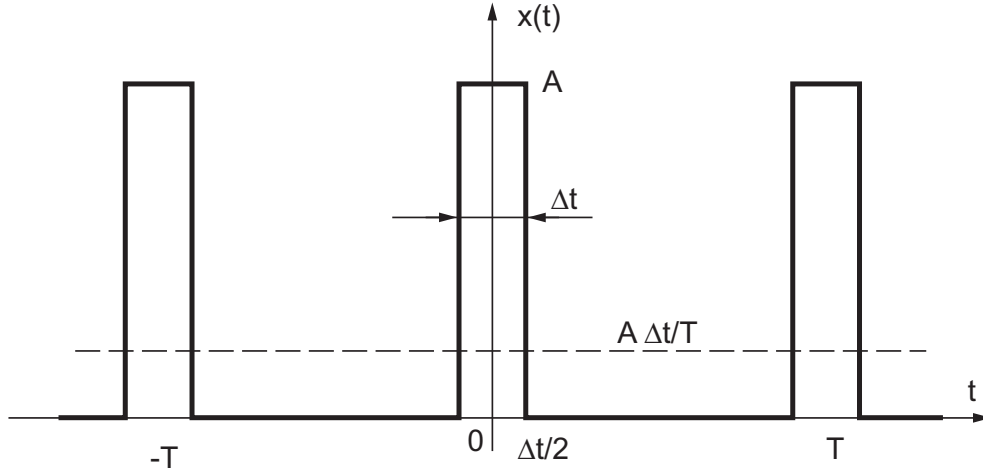


FIG. 4.9: Suite d'impulsions rectangulaires

Par définition des coefficients complexes $X(jk)$, on a

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad \text{avec } f_0 = \frac{1}{T}$$

En tenant compte de la définition de la SIR

$$x_T(t) = \begin{cases} A & \text{si } -\Delta t/2 < t < +\Delta t/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

il vient

$$\begin{aligned} X(jk) &= \frac{A}{T} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{-1}{j2\pi k f_0} \left(\exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \right) \end{aligned}$$

Les relations d'Euler permettent de passer de la différence des exponentielles à un sinus et d'écrire ces coefficients sous la forme

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \quad (4.31)$$

On notera que l'amplitude du spectre $X(jk)$ est fixée par la valeur moyenne ou composante DC ($k = 0$) de la SIR car la fonction $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. De plus, et comme on pouvait s'y attendre, les coefficients de Fourier sont purement réels puisque le signal est pair. Leur enveloppe (figure 4.10a) est une fonction en $\sin(x)/x$ qui porte le nom de *sinus cardinal* défini comme suit

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (4.32)$$

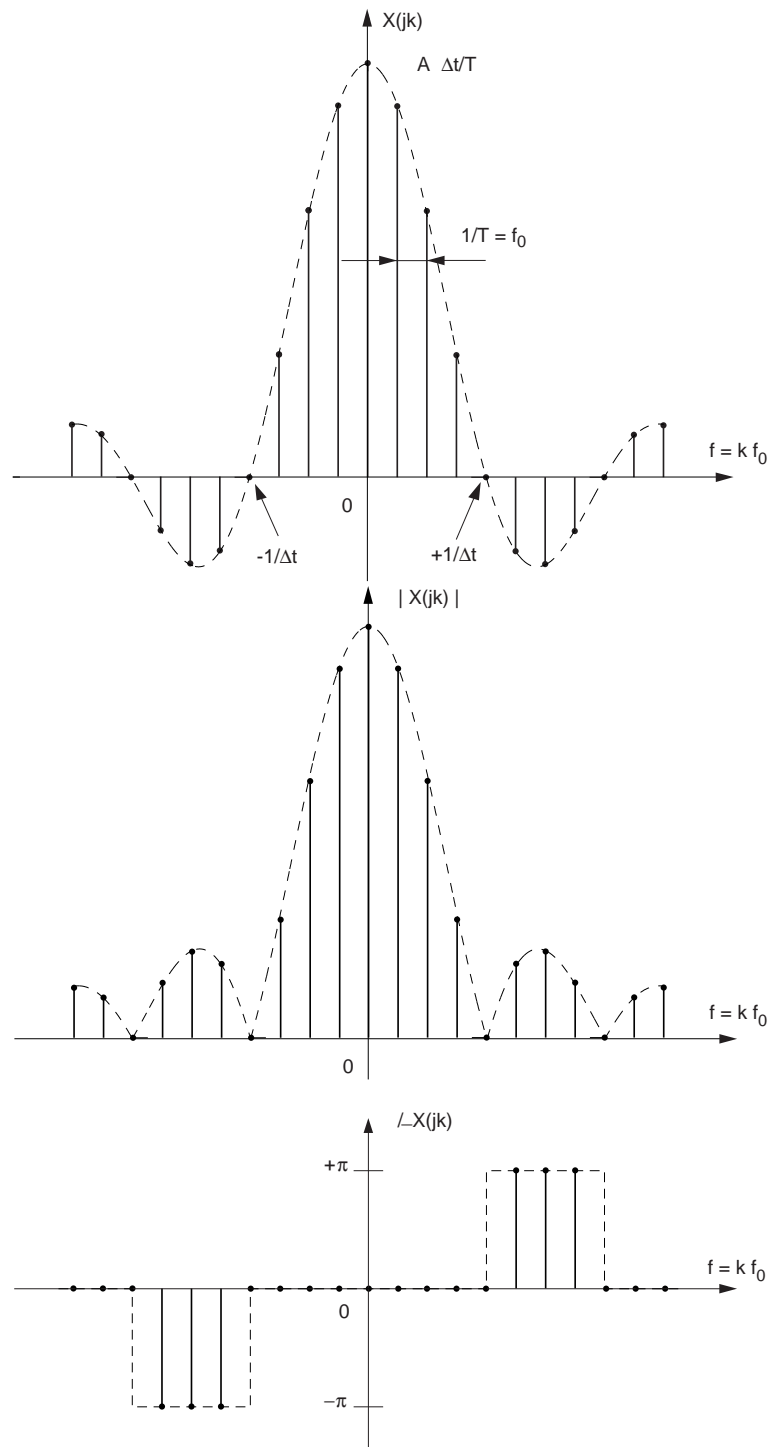


FIG. 4.10: Descriptions spectrales d'une suite d'impulsions rectangulaires :
 a) spectre complexe (ici purement réel car la SIR est paire)
 b) spectres d'amplitudes et de phases

Le spectre d'une SIR s'écrit donc sous une des deux formes suivantes

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \operatorname{sinc}(kf_0 \Delta t) \quad (4.33)$$

On remarquera que plus les impulsions sont étroites par rapport à la période T , plus le spectre s'étale. En effet, le premier passage par zéro se fait à la fréquence $1/\Delta t$. Par contre, la distance entre raies spectrales ne change pas puisqu'elle est égale à l'inverse de la période de la SIR $f_0 = 1/T$.

Il est fréquent que le spectre d'un signal soit complexe. Dans ce cas, sa représentation dans un plan ne peut se faire qu'au travers du traçage distinct des spectres d'amplitudes et de phases (figure 4.10b).

On peut relever au passage que la puissance totale d'une SIR vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (4.34)$$

et que le premier lobe du spectre d'une SIR en contient environ le 90%.

4.6.2 Suite d'impulsions triangulaires

Il existe une autre suite d'impulsions qui est également très importante en télécommunications ; il s'agit de la suite d'impulsions triangulaires (SIT). Le signal $x(t)$ et son spectre $X(jk)$ sont représentés à la figure 4.11. Afin que les surfaces de la SIR et de la SIT soient égales, la largeur à la base du triangle est égale à $2\Delta t$. L'expression de $X(jk)$ est alors la suivante

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \quad (4.35)$$

La puissance totale d'une SIT vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} 2 \int_0^{\Delta t} \left(\frac{A}{\Delta t} t \right)^2 dt = \frac{2}{3} A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (4.36)$$

4.6.3 Suite d'exponentielles décroissantes

Considérons une exponentielle qui se répète périodiquement aux instants kT (figure 4.12)

$$x(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

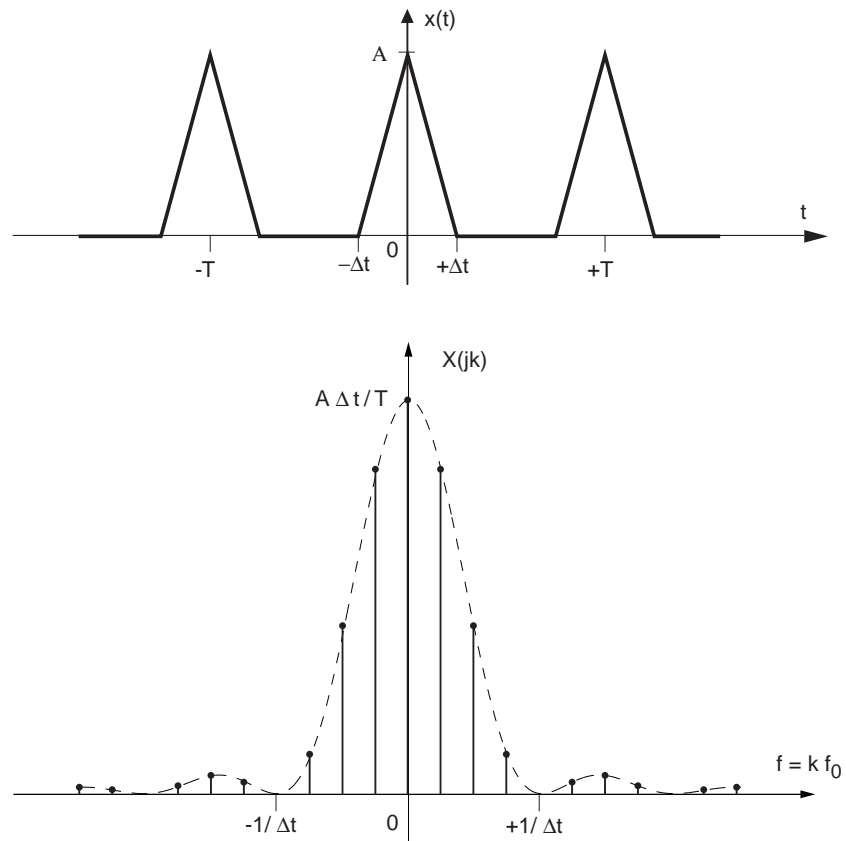


FIG. 4.11: Suite d'impulsions triangulaires avec son spectre

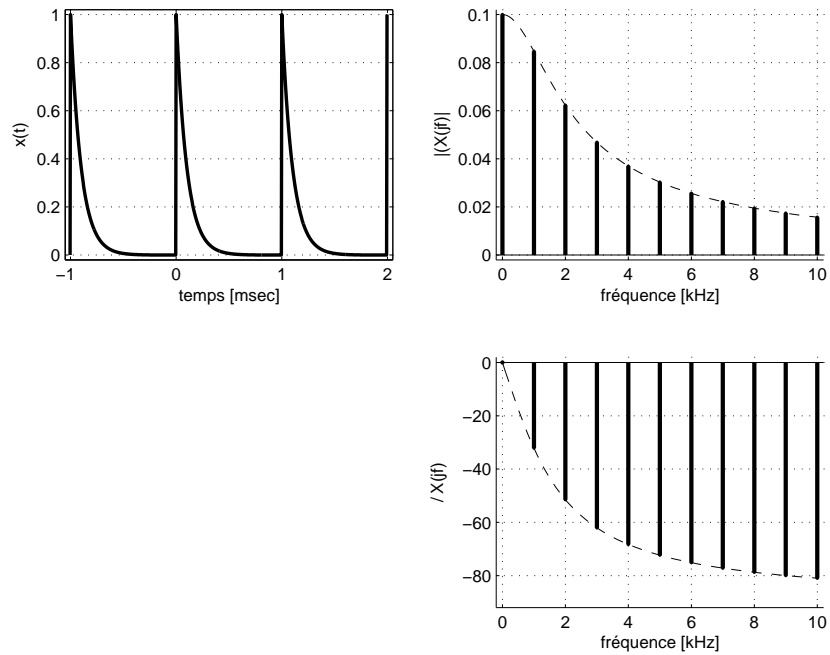


FIG. 4.12: Suite d'exponentielles décroissantes ($\tau \ll T$) et sa représentation spectrale

Le calcul de son spectre se fait en appliquant la définition de $X(jk)$

$$\begin{aligned}
 X(jk) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp(-t/\tau) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\
 &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right) dt \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right)}{-\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)} \Bigg|_0^T \\
 &= \frac{A}{T} \cdot \frac{-\tau}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \left[\exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right) - 1 \right]
 \end{aligned}$$

En admettant que la constante de temps τ est beaucoup plus petite que la période T , on permet à l'exponentielle de revenir à zéro à la fin de chaque période. Dans ce cas, le premier terme entre crochets est beaucoup plus petit que 1 et peut être négligé. On obtient alors le résultat intéressant suivant

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T \quad (4.37)$$

On peut relever que dans ce résultat on trouve la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pondérée par le rapport $A\frac{\tau}{T}$. La représentation des raies spectrales d'amplitudes (figure 4.12) coïncidera donc, à un coefficient près, avec le module de la réponse fréquentielle de ce filtre alors que celle des phases seront les mêmes.

Dans le cas où $\tau \ll T$, la puissance totale d'une SIE vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (A \exp(-t/\tau))^2 dt = \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{T} \quad (4.38)$$

4.7 Reconstruction des signaux

4.7.1 Synthèse d'un signal

On se souvient que, connaissant le spectre $X(jk)$, on peut toujours reconstruire une approximation d'ordre N du signal temporel. Dans le cas d'une **suite d'impulsions rectangulaires** cela donne

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(+j2\pi k f_0 t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
&\simeq x(t)
\end{aligned}$$

Pour la **suite d'impulsions triangulaires**, on a de même

$$\begin{aligned}
x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
&= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
&= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
&\simeq x(t)
\end{aligned}$$

Signal carré symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIR vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
&= 2 \left(\frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
&\simeq x(t)
\end{aligned}$$

Signal triangulaire symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIT vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
&= 2 \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \cos(2\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \cos(6\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
&\simeq x(t)
\end{aligned}$$

Une illustration de la synthèse de ces deux signaux est donnée à la figure 4.13. On constate que, contrairement au signal triangulaire, la convergence est très lente pour le signal carré.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

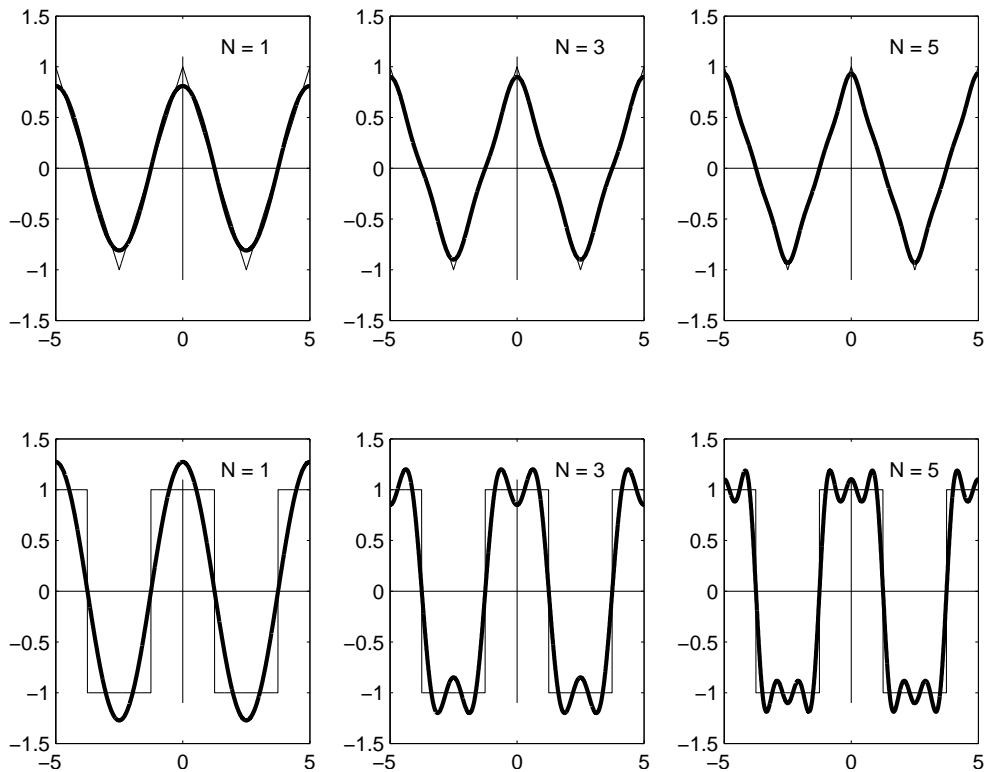


FIG. 4.13: Synthèse de signaux triangulaire et carré par l'addition successive des harmoniques

4.7.2 Phénomène de Gibbs

En général, lorsqu'on reconstruit un signal $x(t)$ à partir de ses coefficients de Fourier :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N X(jk) \exp(j2\pi k f_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (4.39)$$

on remarque une convergence rapide vers le signal original au fur et à mesure que N augmente. Cependant, cela n'est plus vrai lorsque le signal possède des discontinuités d'ordre 0. Il apparaît alors, à l'endroit de la discontinuité, des oscillations que l'on désigne sous le nom de phénomène de Gibbs. L'amplitude du dépassement dû à ces oscillations est égale au 9% de l'amplitude de la discontinuité (figure 4.14).

4.7.3 Importance de la phase

Il est fréquent en traitement du signal de ne parler que des spectres d'amplitudes et de délaisser quelque peu les spectres de phases. Cette attitude est due au fait que lors du filtrage de signaux audio, on se contente de modifier le spectre d'amplitudes car l'oreille est peu sensible aux distorsions de phase. Cependant, lorsque l'on désire conserver la forme d'un signal, en particulier dans le cas du filtrage d'images, il est très important de ne pas négliger le spectre de phases.

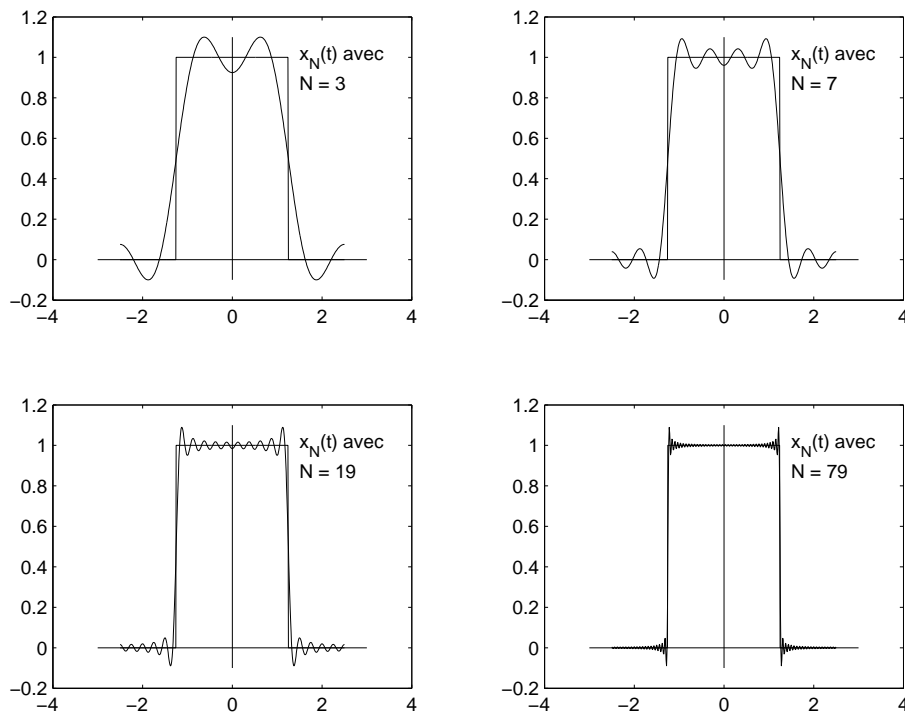


FIG. 4.14: Illustration du phénomène de Gibbs

Un exemple en est donné à la figure 4.15 où une série de photos basées sur le portrait de Joseph Fourier illustre l'importance de la phase dans la reconstitution des signaux.

1. L'image du haut de la figure est le portrait de Joseph Fourier.
2. Au centre, on y voit les spectres d'amplitudes et de phases de l'image de Fourier ; les niveaux de gris correspondent à la valeur de ces fonctions.
3. Les deux images du bas sont des images reconstruites par transformation inverse. Pour construire celle de gauche, on a utilisé le spectre d'amplitudes et remplacé le spectre de phases par un spectre de phases nulles. Pour celle de droite, on a fait l'inverse : le spectre de phases a été conservé alors que le spectre d'amplitudes a été remplacé par des amplitudes constantes.

De ces illustrations, on en déduit que la phase contient une part importante de l'information concernant la *forme d'un signal*. Les deux dernières images illustrent particulièrement bien ce fait puisque le portrait initial ne peut pas être reconstruit avec un seul des deux spectres.

4.8 Quelques théorèmes utiles

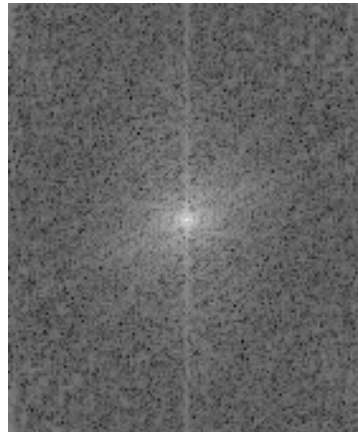
4.8.1 Décalage temporel

Il est fréquent en analyse des signaux de devoir décaler temporellement un signal $x(t)$; on obtient alors un nouveau signal $y(t) = x(t + t_d)$. Ce décalage t_d peut être

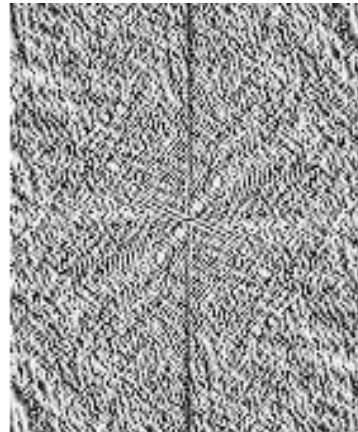
original



module



phase



TF inverse du module



TF inverse de la phase



FIG. 4.15: Transformations de Fourier directes et inverses d'une image

positif (signal avancé) ou négatif (signal retardé) (fig. 4.16). On montre alors qu'entre les espaces temps et fréquences, il existe la relation suivante :

$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk) \quad (4.40)$$

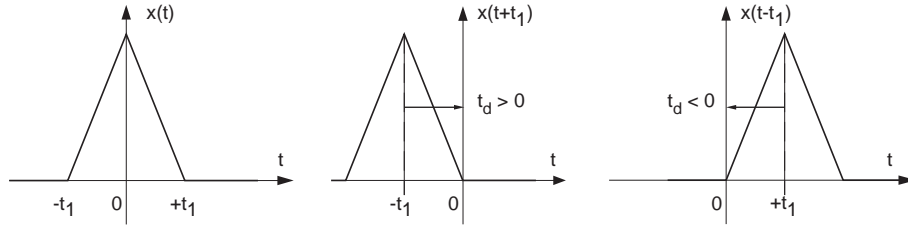


FIG. 4.16: Décalage temporel : signal original, signal avancé, signal retardé

Comme le module du phaseur $\exp(+j2\pi k f_0 t_d)$ vaut toujours un, il s'ensuit que seul le spectre de phases est modifié par un décalage temporel. On a donc :

$$|Y(jk)| = |X(jk)|, \quad \beta_k = \alpha_k + 2\pi k f_0 t_d \quad (4.41)$$

À un décalage temporel correspond une phase variant linéairement avec la fréquence.

4.8.2 Modulation d'amplitude

Il est fréquent en télécommunications de devoir émettre des signaux dont le spectre a été préalablement déplacé dans un domaine de fréquences permettant la transmission des messages par ondes électromagnétiques. Une des possibilités consiste à moduler l'amplitude de la porteuse $p(t)$ à l'aide du message $m(t)$.

La modulation d'amplitude est généralement obtenue par la multiplication des deux signaux entre eux (figure 4.17)

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) \quad (4.42)$$

Dans le cas particulier où la porteuse $p(t)$ est une fonction sinusoïdale, on peut la remplacer par deux phaseurs de fréquence $\pm f_p$ grâce aux formules d'Euler

$$\cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} (\exp(+j2\pi f_p t) + \exp(-j2\pi f_p t))$$

On a donc affaire, de manière plus fondamentale, à une multiplication du message $m(t)$ par un phaseur :

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) = m(t) \cdot \exp(\pm j2\pi f_p t) \quad (4.43)$$

On montre alors aisément la propriété suivante :

$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(j(k f_0 \mp f_p)) \quad (4.44)$$

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

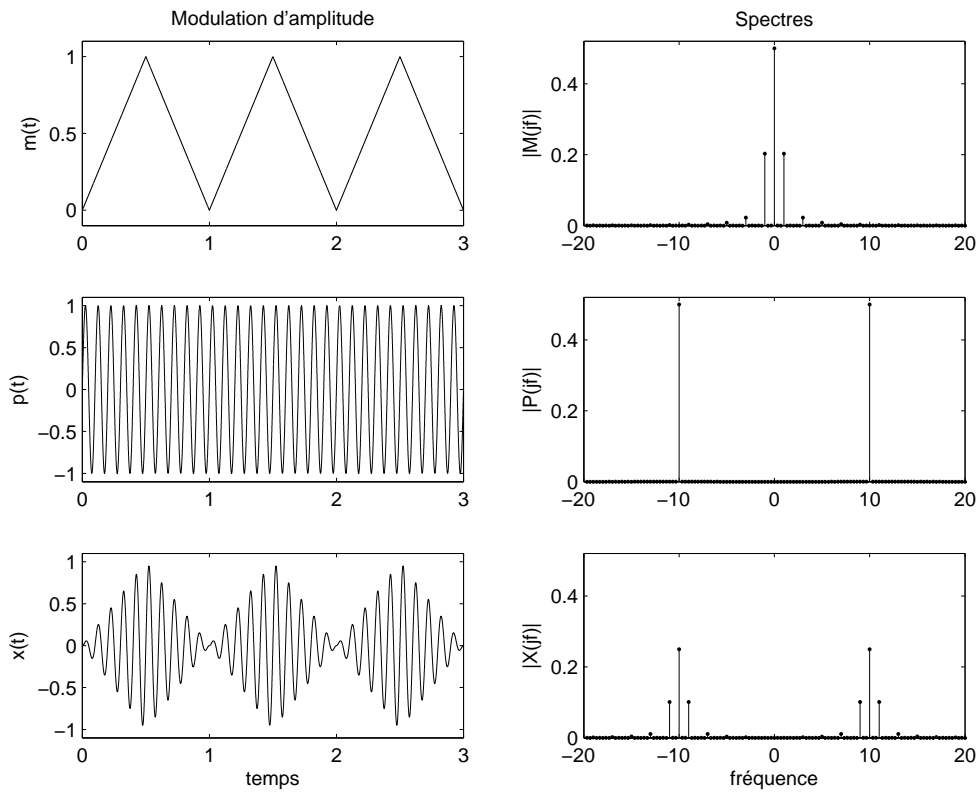


FIG. 4.17: Modulation d'amplitude : signaux et spectres

À une multiplication par un phaseur dans le domaine temporel correspond un décalage dans l'espace des fréquences.

La figure 4.17 illustre la modulation d'amplitude d'une porteuse de fréquence 10kHz par un signal triangulaire de fréquence 1kHz. Au niveau fréquentiel, on voit très bien que le spectre original situé autour de la fréquence nulle est déplacé autour des fréquences de la porteuse ± 10 kHz avec une amplitude réduite de moitié. On notera que le signal modulé $x(t)$ n'est périodique que si le rapport des fréquences f_p/f_0 est rationnel.

4.8.3 Rotation autour de l'ordonnée

La rotation d'un signal autour de son ordonnée est décrite par $y(t) = x(-t)$. Dans ce cas, on montre que

$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X(-jk) = X^*(jk) \quad (4.45)$$

À une rotation du signal temporel autour de l'ordonnée correspond le conjugué complexe dans le domaine fréquentiel.

Par exemple, si l'on s'intéresse à une suite périodique d'exponentielles croissantes décrite par

$$x(t)|_T = A \cdot \exp(+t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

son spectre se calcule aisément à partir de celui de la suite d'exponentielles décroissantes

$$x_o(t)|_T = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

$$X_o(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

On voit en effet que l'on a

$$x(t) = x_o(-t)$$

donc

$$X(jk) = X_o(-jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 - j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

4.9 Calcul de quelques spectres

Le but de ce paragraphe est de montrer, au travers de quelques exemples simples, comment on calcule, trace et interprète les spectres d'un signal.

4.9.1 Suite d'impulsions composites

Considérant le signal de la figure 4.18a, on aimerait calculer ses composantes spectrales et obtenir son approximation d'ordre 3.

La résolution de ce problème est immédiate dès l'instant où l'on remarque que le signal $x(t)$ est composé d'une somme de deux SIR $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les caractéristiques sont, respectivement, leur largeur : $\Delta t_1 = 0.25[msec]$, $\Delta t_2 = 0.5[msec]$, et leur amplitude : $A_1 = 1 [V]$, $A_2 = 2 [V]$.

Utilisant la propriété de linéarité des séries de Fourier, on a :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) \quad (4.46)$$

Comme le signal $x(t)$ et ses deux SIR constitutives sont paires, leurs spectres sont réels

$$X_1(jk) = A_1 \frac{\Delta t_1}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_1)}{k\pi f_0 \Delta t_1} = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}$$

$$X_2(jk) = A_2 \frac{\Delta t_2}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_2)}{k\pi f_0 \Delta t_2} = 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

$$X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4} + 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

Le calcul de quelques composantes spectrales fournit les valeurs numériques suivantes :

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

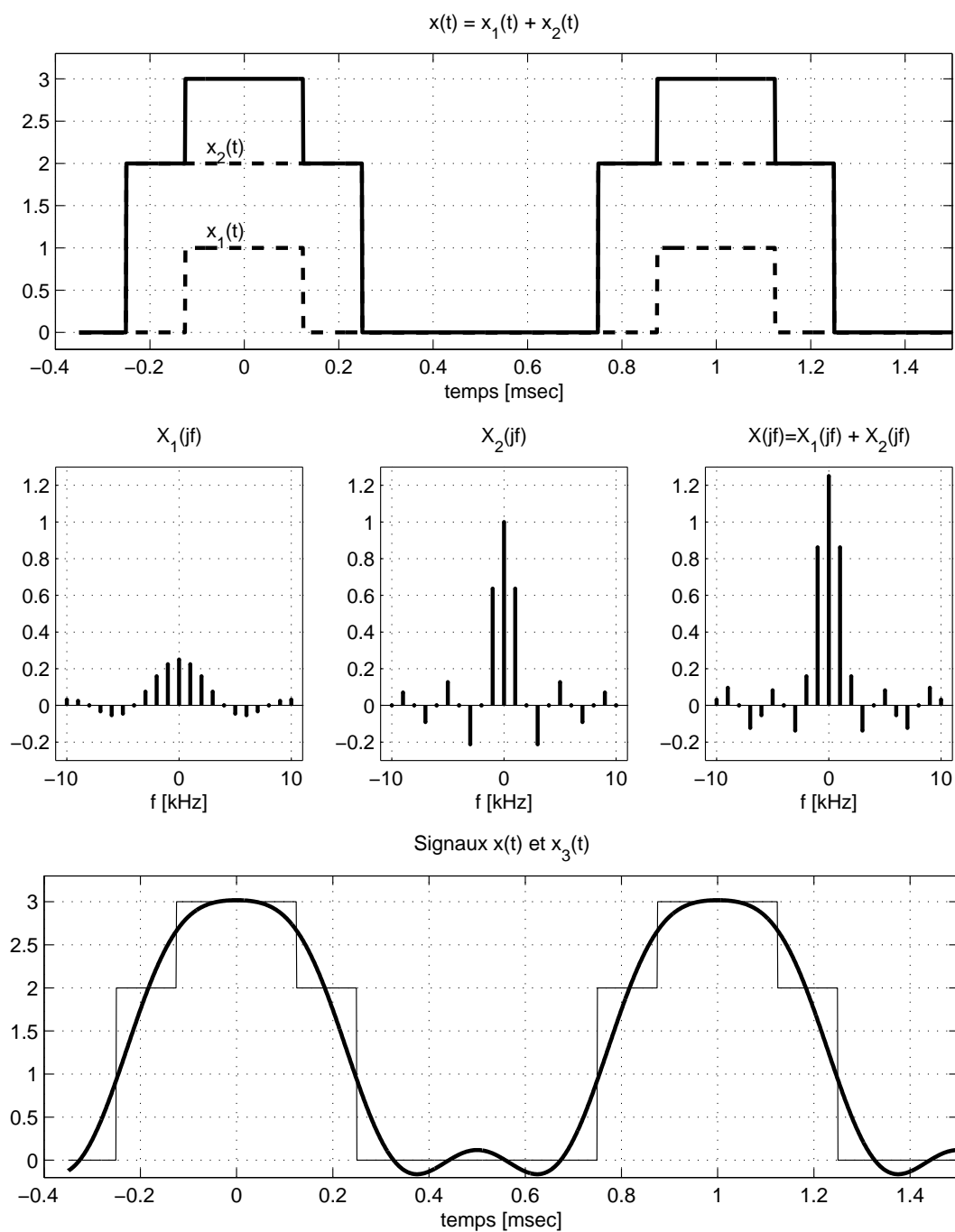


FIG. 4.18: Suite d'impulsions composites :

- a) les signaux temporels
- b) les spectres respectifs
- c) la reconstruction d'ordre 3

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
$X_1(jk)$	-0.045	0	+0.075	+0.159	+0.225	+0.25	+0.225	+0.159	+0.075	0	-0.045
$X_2(jk)$	0.127	0	-0.212	0.00	+0.637	1.00	0.637	0.00	-0.212	0	0.127
$X(jk)$	+0.082	0	-0.137	+0.159	+0.862	1.25	+0.862	+0.159	-0.137	0	+0.082
A_k						1.25	1.724	0.318	0.274	0	0.164
α_k							0.00	0.00	π	0	0.00

La figure 4.18c représente l'approximation d'ordre 3 du signal décrite par :

$$x_{(3)}(t) = 1.25 + 1.724 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + 0.318 \cdot \cos(4\pi f_0 t) + 0.274 \cdot \cos(6\pi f_0 t + \pi)$$

À titre d'exercice, on peut montrer que les puissances des signaux $x(t)$ et $x_{(3)}(t)$ valent respectivement $P_x = 3.25 V_{eff}^2$, $P_{x(3)} = 3.14 V_{eff}^2$.

4.9.2 SIR décalée

Considérons le cas d'une SIR non centrée démarrant à l'instant $t = 0$, de largeur Δt et de période T (figure 4.19a). Dans ce cas, la SIR est retardée d'une demi-largeur d'impulsion et le temps de décalage vaut donc $t_d = -\Delta t/2$. Partant d'une SIR centrée et utilisant le théorème du retard, on obtient :

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \quad (4.47)$$

Si l'on désigne $X(jk)$ par le produit de 3 facteurs $X(jk) = X_0 \cdot X_1(jk) \cdot X_2(jk)$, le spectre d'amplitudes s'obtient en effectuant le produit des modules

$$\begin{aligned} |X(jk)| &= |X_0| \cdot |X_1| \cdot |X_2| \\ &= A \frac{\Delta t}{T} \cdot \left| \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right| \cdot 1 \end{aligned}$$

alors que le spectre de phases est obtenu en sommant les phases :

$$\begin{aligned} \angle X(jk) &= \angle X_0 + \angle X_1 + \angle X_2 \\ &= 0 + (0; \pm\pi) + (-\pi k f_0 \Delta t) \end{aligned}$$

Considérant que l'on a $\Delta t = 0.1 [msec]$, $T = 1 [msec]$, la combinaison de ces termes spectraux est illustrée par la figure 4.19. Comme attendu, on constate que le décalage temporel du signal ne modifie pas le spectre d'amplitudes, mais introduit une phase variant linéairement avec la fréquence.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

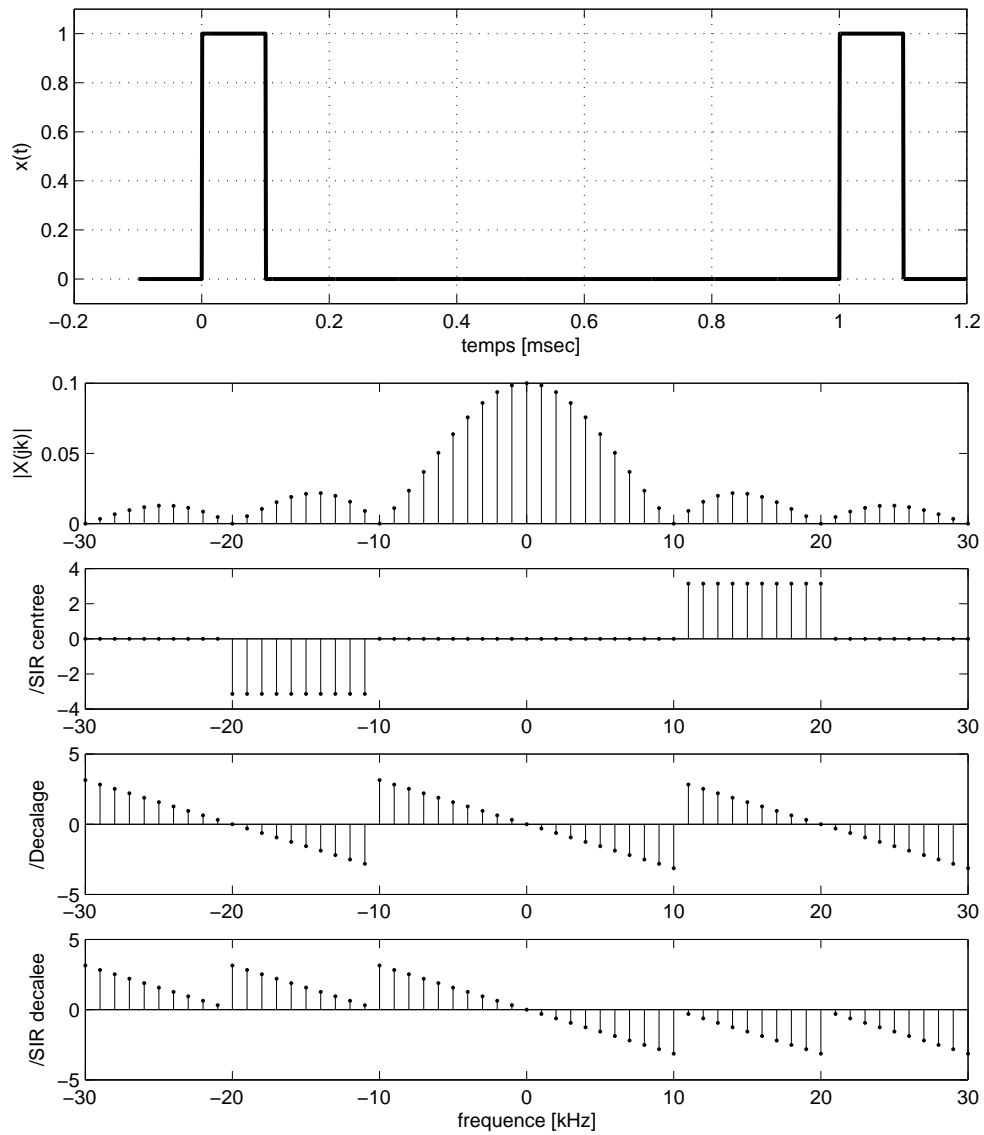


FIG. 4.19: SIR démarrant à l'instant $t = 0$ et son spectre

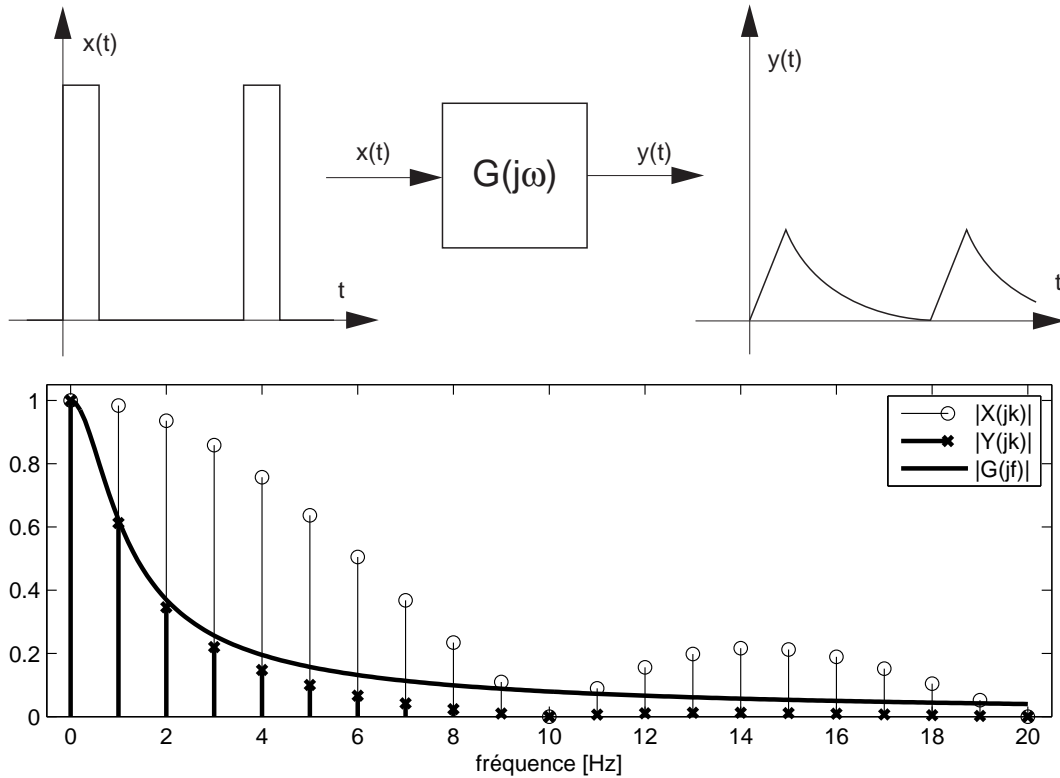


FIG. 4.20: Réponses temporelle et fréquentielle d'un filtre à une SIR

4.10 Réponse d'un système linéaire

Considérons, comme exemple, un filtre attaqué par une SIR (figure 4.20a). Comme ce signal est périodique, on retrouvera à la sortie du circuit un signal périodique $y(t)$ de même période T_0 . La décomposition de ces 2 signaux en série de Fourier donnera les spectres $X(jk)$ et $Y(jk)$ qui seront liés l'un à l'autre par la réponse fréquentielle $G(j\omega)$ du filtre.

Comme les signaux périodiques sont représentés par des ondes sinusoïdales de fréquences kf_0 et que les systèmes linéaires conservent la fréquence des signaux appliqués, on retrouve pour $Y(jk)$ des raies spectrales situées aux mêmes fréquences que celles de $X(jk)$ (figure 4.20b). De plus, l'amplitude et la phase de ces raies spectrales sont liées au signal d'entrée par la relation bien connue $Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot X(j\omega)$. Dans le cas de signaux périodiques, la pulsation ω est un multiple de la fondamentale $2\pi f_0$. On a donc

$$Y(jk) = X(jk) \cdot G(j\omega)|_{\omega=2\pi kf_0} \quad (4.48)$$

4.10.1 Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Considérant le circuit L-R de la figure 4.21 et la SIR qui lui est appliquée, on aimerait :

1. connaître la fonction de transfert de ce filtre et sa constante de temps τ ;

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

- calculer la composante continue $U_{2,dc}$;
- esquisser le signal de sortie $u_2(t)$ en tenant compte des valeurs numériques $L = 100 [mH]$, $R = 100 [\Omega]$;
- calculer le spectre $U_2(jk)$;
- calculer les valeurs efficaces $U_{1,eff}$, $U_{2,eff}$, $U_{2,ac,eff}$;
- estimer la valeur de crête de l'ondulation $u_{2,ac}(t)$.

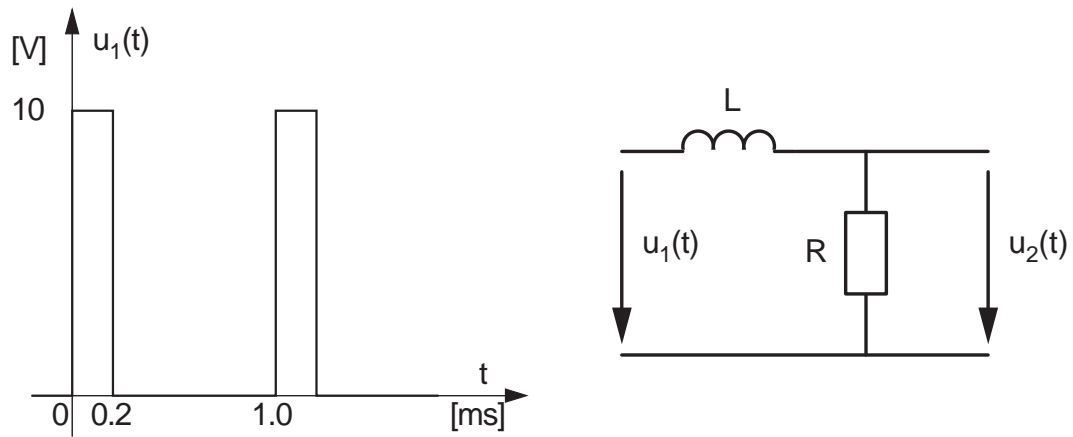


FIG. 4.21: Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Solution :

4.10 Réponse d'un système linéaire

4.11 Réponse d'un système non-linéaire

La caractéristique essentielle des systèmes non-linéaires est de déformer les signaux sinusoïdaux. Le signal de sortie est donc périodique non-sinusoïdal. Il s'en suit que son spectre est constitué d'un grand nombre de raies spectrales, alors qu'à l'entrée il n'y avait qu'une seule raie.

Dans la pratique, il est important de pouvoir chiffrer cette déformation puisque les amplificateurs réels, quelle que soit leur qualité, possèdent des non-linéarités. On mesure cette déformation à l'aide du *taux de distorsion harmonique* (TDH). Celui-ci est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques d'ordre supérieur à 1 avec la valeur efficace du premier harmonique

$$TDH = \frac{X_{eff}(k > 1)}{X_{eff}(k = 1)} = \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \quad (4.49)$$

4.11.1 Distorsion due à une diode

Considérons comme exemple de système non linéaire, une diode à laquelle on applique une tension sinusoïdale superposée à une tension continue (figure 4.22)

$$u(t) = U_0 + \Delta U(t) = U_0 + A \sin(2\pi f_0 t)$$

Cette diode est caractérisée par la loi exponentielle bien connue

$$I_D = I_S (e^{U_D/nV_T} - 1) \quad (4.50)$$

Admettant les valeurs numériques suivantes

$$U_0 = 0.5 [V], \quad A = 0.05 [V], \quad f_0 = 100 [Hz]$$

$$I_S = 10 [pA], \quad n = 1, \quad V_T = 26 [mV]$$

on désire :

1. calculer I_0 , I_{max} et I_{min}
2. esquisser $u(t)$ et $i(t)$
3. calculer $U(jk)$ et $I(jk)$
4. calculer le TDH du courant.

Solution :

1. Le calcul de I_0 , I_{max} et I_{min} se fait par simple application numérique de l'équation de la diode ; on obtient alors :
 - a) le courant au point de fonctionnement $I_0 = 2.54 mA$;
 - b) sa valeur maximum $I_{max} = 17.2 mA$;
 - c) sa valeur minimum $I_{min} = 0.36 mA$.

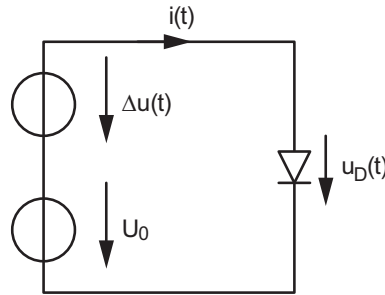


FIG. 4.22: Circuit à diode

2. La simulation temporelle avec Spice a donné les résultats de la figure 4.23. On y voit que la variation sinusoïdale de la tension de la diode (50 mV) autour du point de fonctionnement (500 mV) entraîne une variation non sinusoïdale du courant caractérisé par les valeurs calculées ci-dessus.
3. L'analyse spectrale obtenue par FFT (Fast Fourier Transform) donne les résultats suivants.
 - a) La tension de la diode ne contient que 2 raies spectrales (figure 4.24a) :
 - i. la composante DC : $U_{dc} = 0.5 V$;
 - ii. la composante AC : $U_1 = 50 mV$.
 - b) Le courant non sinusoïdal est composé d'un grand nombre de raies spectrales dont les 10 premières sont les plus significatives (figure 4.24b). On y trouve en particulier
 - i. la composante DC : $I_{dc} = 5.41 mA$;
 - ii. la composante fondamentale : $I_1 = 7.43 mA$.
4. Le calcul du taux de distorsion se fait en appliquant la définition du TDH :

$$\begin{aligned}
 TDH &= \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{3.14^2 + 0.94^2 + 0.22^2 + 0.041^2 + 0.0065^2 + \dots}{7.43^2}} \\
 &= 44\%
 \end{aligned}$$

Cette valeur élevée est le signe de la forte déformation de la sinusoïde causée par la variation exponentielle du courant.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

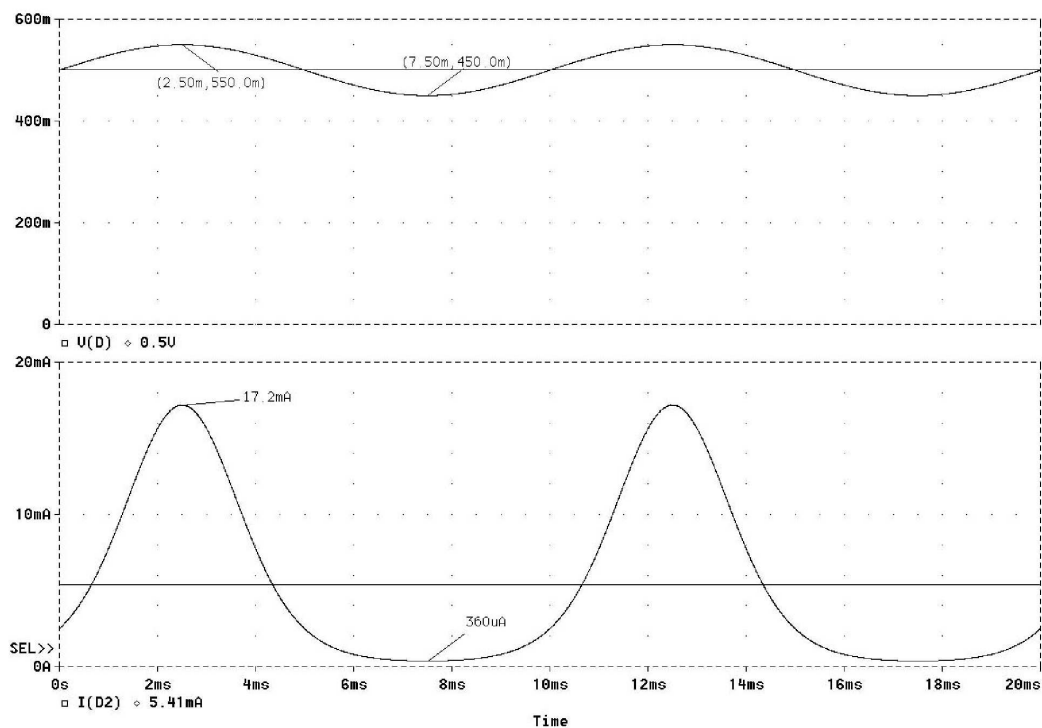


FIG. 4.23: Tension et courant de la diode

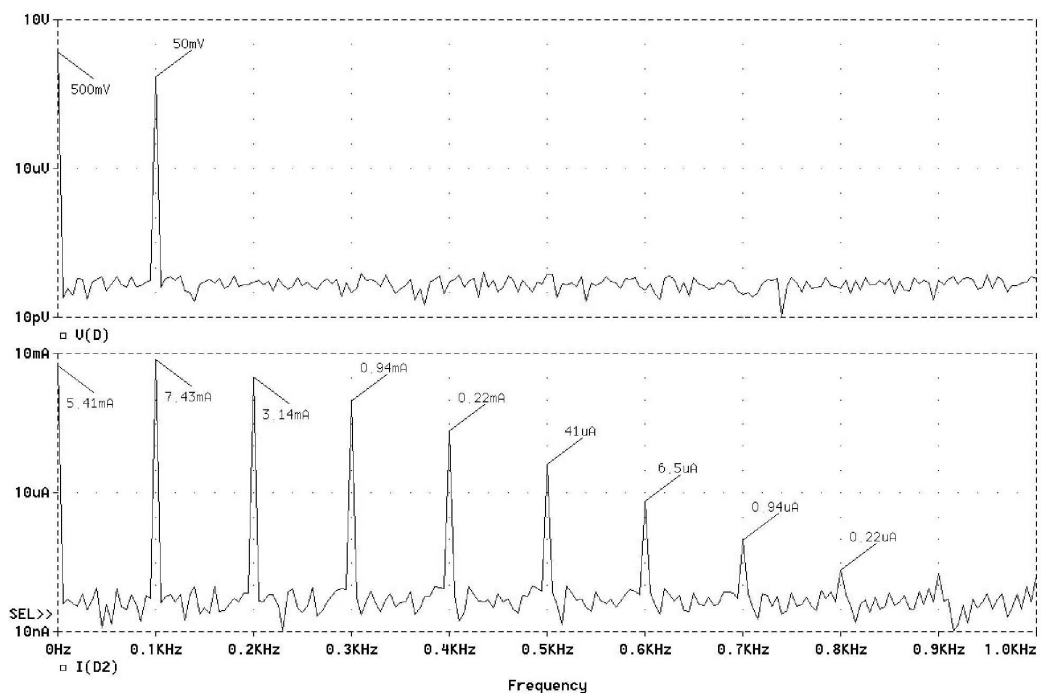


FIG. 4.24: Spectres unilatéraux de la tension et du courant de la diode

4.12 Exercices

SF 1 Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1 [kHz]$:

$$x_1(t) = 6 - 2 \cos(2\pi f_0 t) + 3 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_2(t) = 4 + 1.8 \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + 0.8 \sin(6\pi f_0 t)$$

1. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. écrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

SF 2 Utilisez les formules d'Euler pour montrer que la série de Fourier du signal suivant

$$x(t) = \left(1 + \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \cos(10\pi f_0 t)$$

est décrite par les harmoniques 4, 5 et 6. Pour ce faire :

1. remplacez chaque fonction cosinus par deux phaseurs ; effectuez le produit ;
2. écrivez $x(t)$ sous la forme d'une somme de phaseurs ;
3. que valent les coefficients $X(jk)$ non-nuls ?
4. dessinez les spectres bilatéraux et unilatéraux d'amplitude et de phase ;
5. calculez sa puissance.

SF 3 Considérant un signal périodique de période $T = 20 [ms]$ décrit par son spectre bilatéral $X(jk)$:

k	0	± 1	± 2
$X(jk)$	2	$-3 \pm j2$	$+1 \pm j3$
$ X $			
$\angle X$			

retrouvez sa description temporelle en cosinus après avoir rempli les cases libres du tableau. Calculez les valeurs de X_{dc} , X_{ac} et P .

SF 4 À partir des spectres d'amplitude et de phase d'une SIR vus au cours,

1. calculez les spectres complexes des deux signaux Ex SF4 ;
2. esquissez leurs spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

SF 5 Considérant les spectres unilatéraux Ex SF5 d'un signal $x(t)$:

1. donnez l'expression de $x(t)$;
2. dessinez son spectre bilatéral ;
3. calculez ses valeurs efficaces AC et totale.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

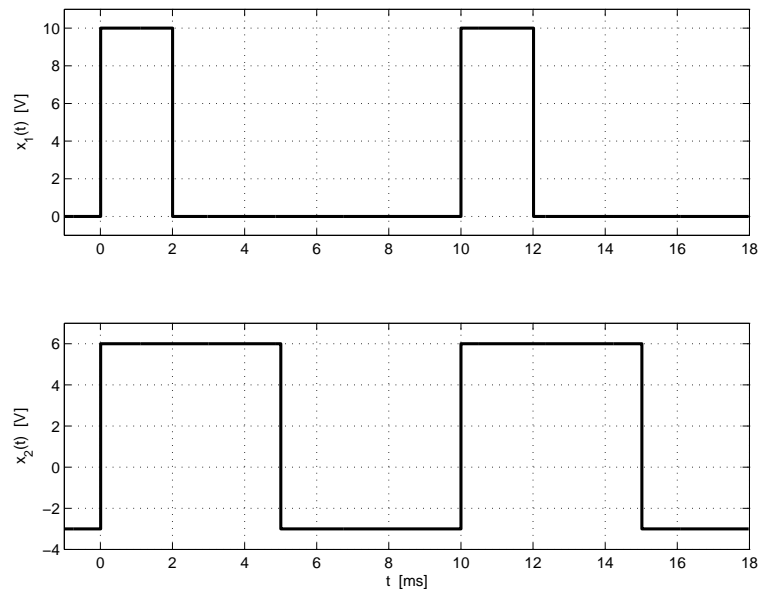


FIG. 4.25: Ex SF 4

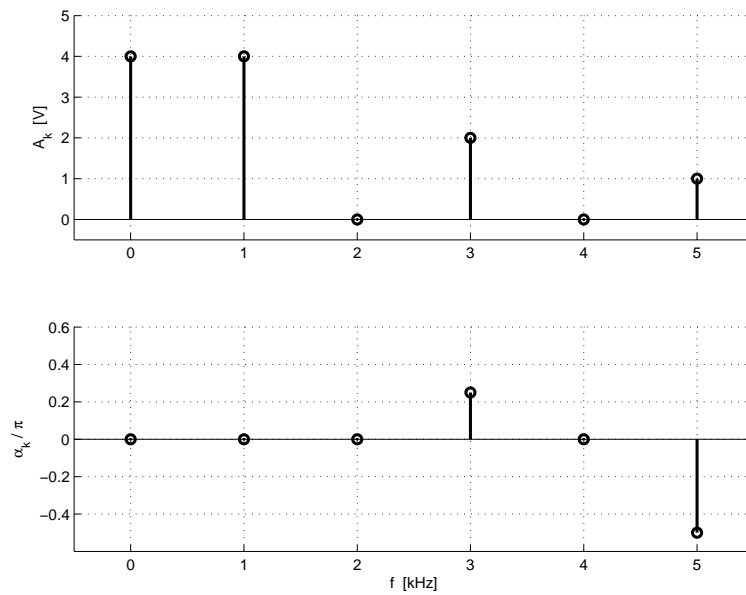


FIG. 4.26: Ex SF 5

SF 6 Considérant les trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de période $T = 1 \text{ ms}$ décrits par leurs spectres respectifs (tableau Ex SF6) :

1. donnez l'expression temporelle correspondant à leur représentation ;
2. écrivez ces expressions à l'aide de cosinus seulement ;
3. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase uni- et bilatéraux ;
4. calculez la puissance de chacun des trois signaux.

	k	0	1	2	3	4
$x_1(t)$	a_k	+2	+5	-2	+1	0
	b_k		+4	+3	-1	0
	k	0	1	2	3	4
$x_2(t)$	A_k	1	3	0	2	0
	α_k	0	$-\pi/3$	0	$+\pi/2$	0
	k	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$x_3(t)$	$X(jk)$	5	$4 \pm j3$	0	$-2 \mp j$	0

TAB. 4.1: Ex SF 6

SF 7 Étant donné un signal caractérisé par les propriétés suivantes :

1. $x(t)$ est réel et impair ;
2. $x(t)$ est périodique avec $T = 2 \text{ [msec]}$;
3. $X(jk) = 0$ pour $|k| > 1$;
4. $P = 1$;

trouvez deux signaux satisfaisant à ces propriétés.

SF 8 Considérant le signal $x(t) = 2 + \sin(2\pi f_0 t) + 0.25 \cos(6\pi f_0 t)$

1. écrivez $x(t)$ dans les formes cosinus et complexe ;
2. donnez les composantes spectrales dans les trois représentations :

$$\{a_k, b_k\}, \quad \{A_k, \alpha_k\}, \quad \{X(jk)\}$$

3. vérifiez que la puissance de ce signal calculée à l'aide des trois représentations donne le même résultat ;
4. comment calculeriez-vous la puissance dans l'espace temps ? voyez-vous des moyens de simplifier ce calcul ? si oui, le résultat est immédiat.

SF 9 On considère une SIR d'amplitude $A = 2 \text{ [V]}$, de période $T = 1 \text{ [ms]}$ de largeur $\Delta t = 0.2 \text{ [ms]}$; cette SIR est avancée de $T/4$ par rapport à une SIR centrée :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez son spectre $X(jk)$;
3. esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase ;
4. calculez la puissance de cette SIR.

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

SF 10 Considérant la suite d'impulsions impaires de la figure Ex SF10 :

1. le spectre sera-t-il réel, imaginaire ou complexe ;
2. calculez ses coefficients de Fourier complexes ;
3. quelle est la puissance de ce signal ?
4. dans le cas où $A = 10 [V]$, $T = 10 [ms]$ et $\Delta t = 1 [ms]$, esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

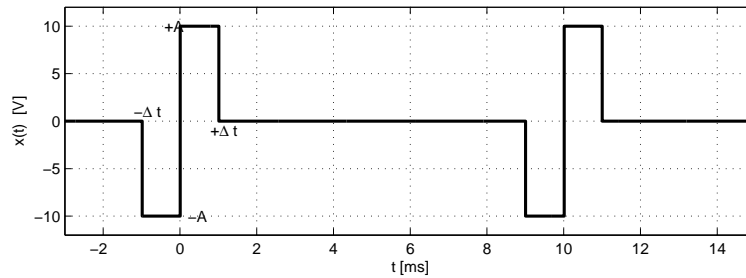


FIG. 4.27: Ex SF 10

SF 11 On considère un signal périodique $x(t)$ retardé d'une valeur t_r par rapport au signal original $x_0(t)$. Montrez que :

1. son spectre complexe vaut $X(jk) = X_0(jk) e^{-j2\pi k f_0 t_r}$;
2. son spectre d'amplitude n'est pas modifié ;
3. son spectre de phase vaut $\angle X = \angle X_0 - 2\pi k f_0 t_r$.

SF 12 Esquissez avec soin les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase des signaux Ex SF12a et Ex SF12b. Expliquez les différences apparaissant entre les spectres.

SF 13 Partant d'une SIR, calculez le spectre d'un signal carré d'amplitude $A = \pm 5 V$ et de période $T = 1 ms$. Faites de même pour un signal triangulaire à partir de la SIT.

SF 14 Considérant les quatre signaux de la figure Ex SF14 d'amplitude A , de période T , de largeur et constante de temps $\Delta t = \tau = 0.2 T$:

1. calculez leur valeur efficace ;
2. à partir du spectre d'une suite d'exponentielles décroissantes, utilisez deux théorèmes proposés dans le cours pour trouver les spectres des signaux $x_2(t)$ et $x_4(t)$.

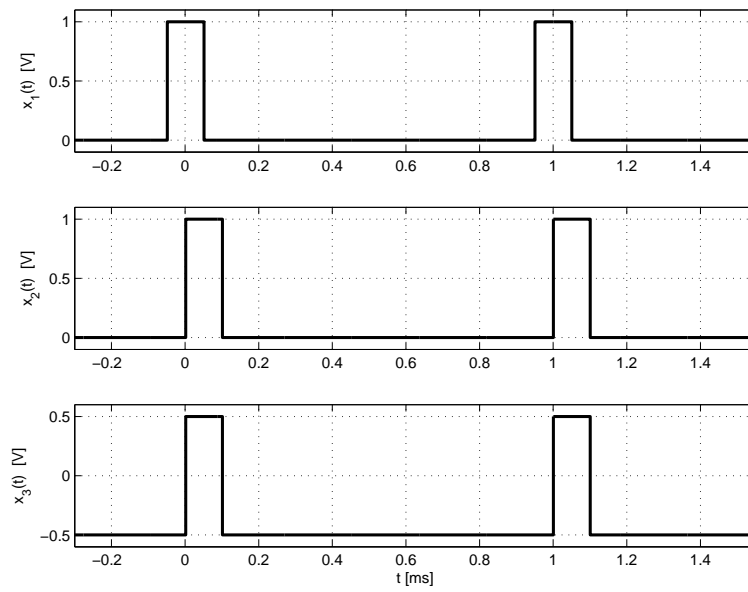


FIG. 4.28: Ex SF 12a

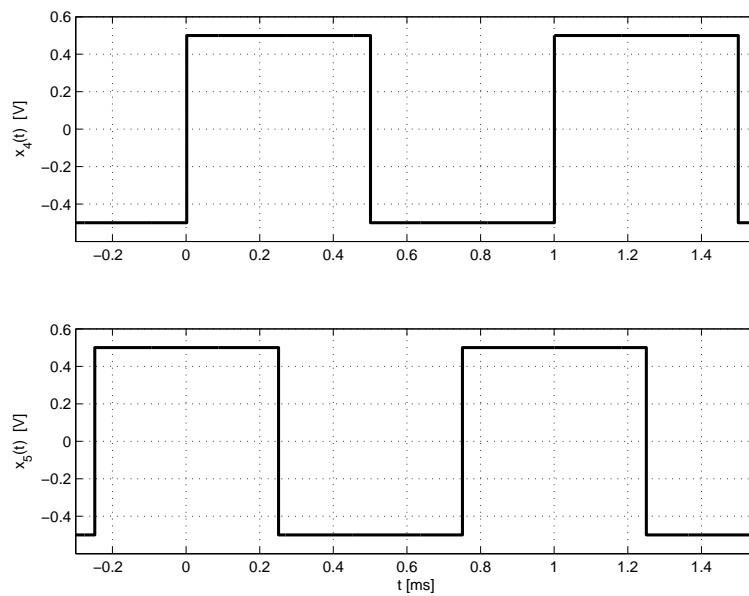


FIG. 4.29: Ex SF 12b

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

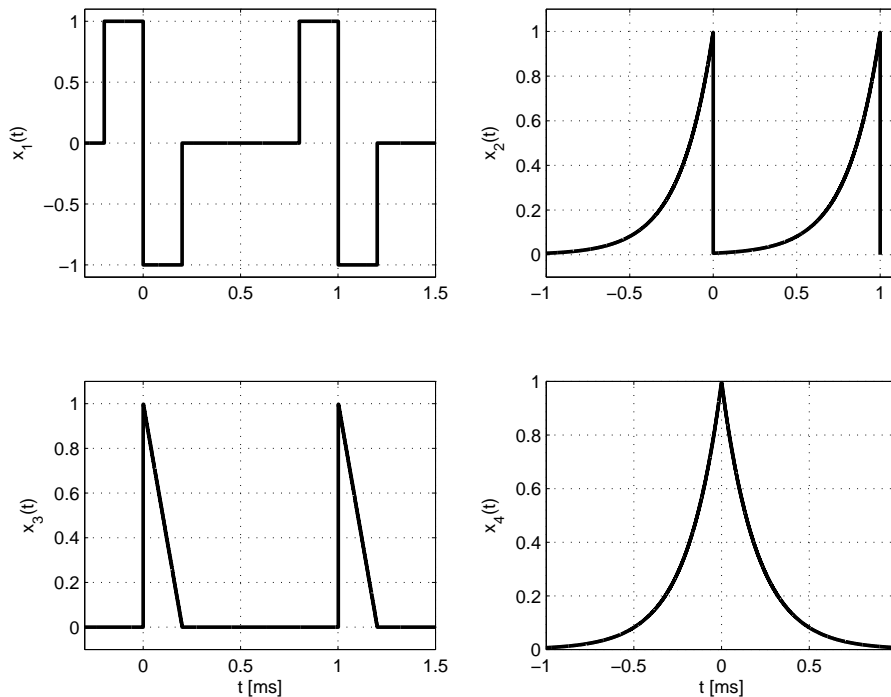


FIG. 4.30: Ex SF 14

SF 15 Considérant une SIR centrée de période $T = 100 [\mu s]$, de largeur $\Delta t = 20 [\mu s]$ et d'amplitude $A = 10 [V]$,

1. calculez le pourcentage de puissance comprise dans le premier lobe du sinus cardinal ;
2. admettant que cette SIR est appliquée à un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H(jf) = \frac{1}{1 + jf/f_c}, \quad f_c = 10 [kHz]$$

que valent l'amplitude et la phase des composantes 10 kHz, 40 kHz et 150 kHz ?

SF 16 Un filtre passe-bas RC réalisé avec $R = 1 [k\Omega]$ et $C = 0.1 [\mu F]$ est attaqué par un signal carré $u_1(t)$ de période $T = 1 [ms]$ et d'amplitude comprise entre 0 et 20 V :

1. esquissez le signal de sortie $u_2(t)$ et le courant $i(t)$;
2. pour chacun des 3 signaux $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i(t)$, calculez leurs valeurs DC, efficace totale et efficace AC.

SF 17 Soit un filtre RC passe-bas dont la constante de temps est mal connue. On lui applique une SIR $x(t)$ d'amplitude $A = 10 [V]$, de période $T = 20 [ms]$ et de largeur $\Delta t = 1 [ms]$.

1. que valent les composantes continues des signaux d'entrée et de sortie ?
2. quelle est la fonction de transfert $H(j\omega)$ du circuit ;

3. que valent les spectres bilatéraux $X(jk)$ et $Y(jk)$?
4. admettant que la constante de temps est de l'ordre de 2 ms, esquissez les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$; estimez la valeur maximum de $y(t)$;
5. pour la fréquence $f = 5 f_0$, l'analyseur spectral du signal de sortie fournit le coefficient complexe $Y(j5) = 0.0659 - j 0.154$; calculez l'amplitude et l'argument de la fonction de transfert pour cette fréquence ;
(Rép. : $|H| = 0.37$, $\angle H = -68^\circ$)
6. que valent la constante de temps et la fréquence de coupure du filtre ?
(Rép. : $\tau = 1.6 [ms]$, $f_c = 100 [Hz]$)

SF 18 Pour identifier un système linéaire possédant une résonance, on injecte dans celui-ci une SIR $x(t)$ de période T . La sortie sera donc périodique et son spectre $Y(jk)$ sera constitué de raies distantes de $1/T$. Afin d'obtenir une image spectrale représentative du système $H(j\omega)$, il faut que les raies spectrales soient en nombre suffisant et que le premier lobe de la SIR couvre le domaine de fréquences désiré ($\simeq 10 f_{res}$).

On demande de déterminer les paramètres T et Δt d'une SIR permettant de mesurer la réponse harmonique d'un circuit LC-R dont on connaît approximativement les valeurs $L \simeq 1 mH$, $C \simeq 0.1 \mu F$, $R \simeq 20 \Omega$.

Pour ce faire :

1. esquissez $H(f)$ dans un diagramme linéaire,
2. précisez le nombre de raies spectrales BF et HF que vous estimez nécessaires ;
3. estimez la distance inter-spectrale nécessaire pour observer le pic de résonance ;
4. calculez T et Δt ; adoptez des valeurs entières ;
5. si l'amplitude des impulsions est de 10 V, quelle est l'amplitude de la raie spectrale située près de la résonance f_{res} ? près de $5 f_{res}$?
6. pour ces mêmes fréquences, quelles sont les amplitudes des raies mesurées à la sortie du filtre LC-R ?

SF 19 Un circuit RC de résistance $R = 1 k\Omega$ et de capacité $C = 1 \mu F$ est attaqué par une SIR $u_1(t)$ d'amplitude $E = 10 V$, de largeur $\Delta t = 0.2 ms$ et de période $T = 1 ms$:

1. quelles sont les valeurs moyennes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. que vaut la constante de temps du circuit ?
3. esquissez $u_2(t)$;
4. calculez $Z(j\omega)$ et $I(jkf_0)$;
5. quelle est la puissance dissipée dans la résistance ?

SF 20 Un circuit redresseur double alternance suivi d'un filtre RC (R et C en parallèle avec le pont redresseur) est utilisé pour réaliser une conversion AC-DC. Tenant compte des hypothèses simplificatrices suivantes

- le courant $i(t)$ est considéré comme une suite d'impulsions rectangulaires de largeur Δt beaucoup plus petite que la période $T = 10$ ms ;
- la réactance du condensateur est négligeable par rapport à la résistance de charge R.

dessinez le schéma du circuit puis :

1. calculez les coefficients de Fourier $U(jk)$ de la tension de sortie $u(t)$;
2. calculez la puissance de chaque harmonique ;
3. calculez une borne supérieure pour la puissance d'ondulation, sachant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. calculez le taux d'ondulation maximum ;
5. si l'on veut un taux d'ondulation inférieur à 0.1, quelle capacité faut-il choisir lorsque la résistance R vaut 100Ω ?
6. estimez l'amplitude du générateur $u_1(t)$ pour que $U_{dc} \simeq 15 V$.

SF 21 Un circuit non linéaire de type parabolique est modélisé par la caractéristique de transfert suivante :

$$u_2(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_1^2(t)$$

Sachant qu'on lui applique une tension sinusoïdale $u_1(t) = A \sin(\omega t)$:

1. déterminez les composantes spectrales que l'on obtient à la sortie ;
2. quelle est la puissance normalisée P_2 du signal de sortie ?
3. que vaut-elle par rapport à celle du signal d'entrée P_1 ?
4. faites l'A.N. avec $A = 10 V$, $\omega = 2\pi 100 \text{ rad/s}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.21/V$
5. esquissez $u_2(t)$; quel est son taux de distorsion harmonique ?

SF 22 Considérant les deux signaux ci-dessous :

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{20}{7}t\right)$$

précisez si ces signaux sont périodiques ou non. Pour cela, il vous faut trouver :

1. les fréquences constitutives de chaque signal,
2. les rapports existant entre ces fréquences,
3. la fréquence fondamentale si elle existe,
4. les harmoniques présents.

SF 23 : Les deux signaux de la figure Ex SF23 caractérisés par

$$A_1 = 2V, \quad \Delta t = 0.2ms, \quad T = 1ms$$

$$A_2 = 5V, \quad \tau = 0.1ms, \quad T = 1ms$$

passent au travers d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 4.5kHz$. Après avoir rappelé ce qu'est la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas **idéal**,

1. calculez les puissances P_{x1} , P_{x2} de chacun des signaux d'entrée ;
2. calculez les puissances P_{y1} , P_{y2} de chacun des signaux de sortie.

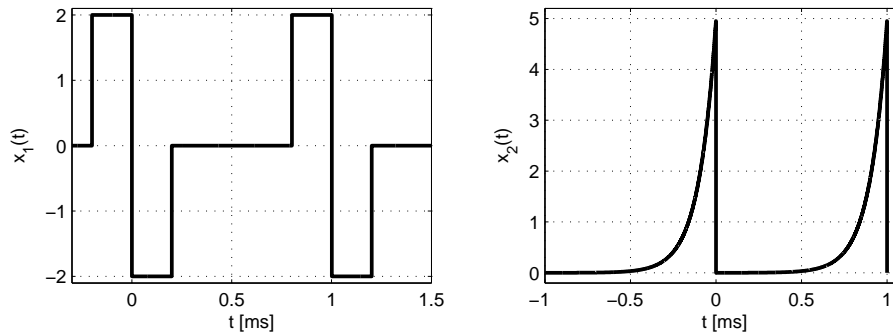


FIG. 4.31: Ex SF 23

SF 24 A cause de son taux de variation limité (slew-rate), un amplificateur opérationnel transforme un sinus en un signal triangulaire symétrique d'amplitude A. Calculez le taux de distorsion de cette déformation.

SF 25 Un signal sinusoïdal d'amplitude 10V et de fréquence 1 kHz est appliqué à un filtre RC passe-bas de fréquence de coupure 2 kHz. Calculez le TDH du signal de sortie.

SF 26 On applique un signal sinusoïdal d'amplitude 0.1V et de fréquence 10 kHz à un amplificateur inverseur de gain 100. Visuellement, le signal de sortie semble parfaitement sinusoïdal. Cependant, une analyse spectrale a fourni les composantes A_k du tableau ci-dessous. Calculez la valeur efficace du signal de sortie et son TDH.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_k [V]$	81e-3	6.46	87e-6	0.105	55e-6	2.66e-3	58e-6	213e-6	57e-6	48e-6

SF 27 La figure Ex SF27 présente une sinusoïde $x(t)$ d'amplitude 10V et une sinusoïde $y(t)$ saturée à $\pm 9V$ avec les spectres correspondants. Sachant que les composantes spectrales unilatérales fournies par l'analyseur spectral sont les suivantes :

k	1	3	5	7	9
$A_x(k) [dB]$	0.0				
$A_y(k) [dB]$	-0.33	-30.0	-33.2	-33.8	-50.7
$A_x(k) [V]$					
$A_y(k) [V]$					

4 ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

1. calculez les amplitudes spectrales unilatérales et complétez le tableau ;
2. calculez les valeurs efficaces des deux signaux ;
3. calculez le TDH de $y(t)$;
4. expliquez pourquoi les harmoniques pairs du signal $y(t)$ sont nuls.

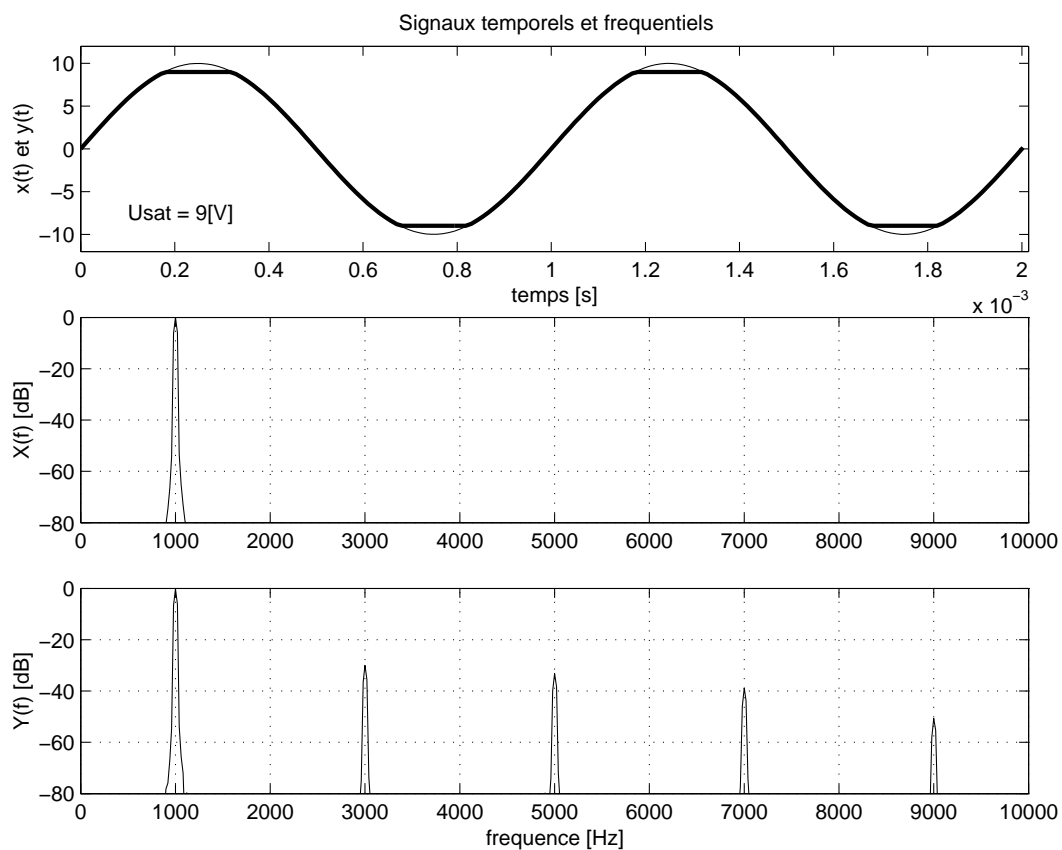


FIG. 4.32: Ex SF 27

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983