

5 Analyse des signaux non périodiques

5.1 Transformation de Fourier

5.1.1 Passage de la série à la transformation de Fourier

Le passage d'un signal périodique à un signal apériodique peut se faire en considérant que la période T devient de plus en plus grande pour tendre vers l'infini. On constate alors que les raies spectrales distantes de $1/T$ se rapprochent pour se transformer en spectre continu. Mais en même temps, l'amplitude de celui-ci diminue pour tendre vers zéro. Une illustration en est donnée (figure 5.1) pour une suite d'impulsions rectangulaires dont la période augmente alors que la largeur reste constante. Comme la surface de l'impulsion reste constante alors que la période augmente, l'amplitude X_{dc} du sinus cardinal ne cesse de décroître pour tendre vers zéro.

Partant d'un signal périodique décrit par

$$x_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t)$$

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt, \quad k \in Z$$

on évite l'annulation de $X(jk)$ lorsque $T \rightarrow \infty$ en considérant la fonction

$$T \cdot X(jk) = \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

À partir des correspondances suivantes

$$T \rightarrow \infty, \quad f_0 \rightarrow df, \quad k f_0 \rightarrow f, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf)$$

on voit que la série de Fourier discrète devient une fonction continue. Cette fonction $X(jf)$ est une **densité spectrale d'amplitude** qui, par définition, est la transformée de Fourier du signal apériodique $x(t)$:

$$X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt, \quad f \in R$$

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

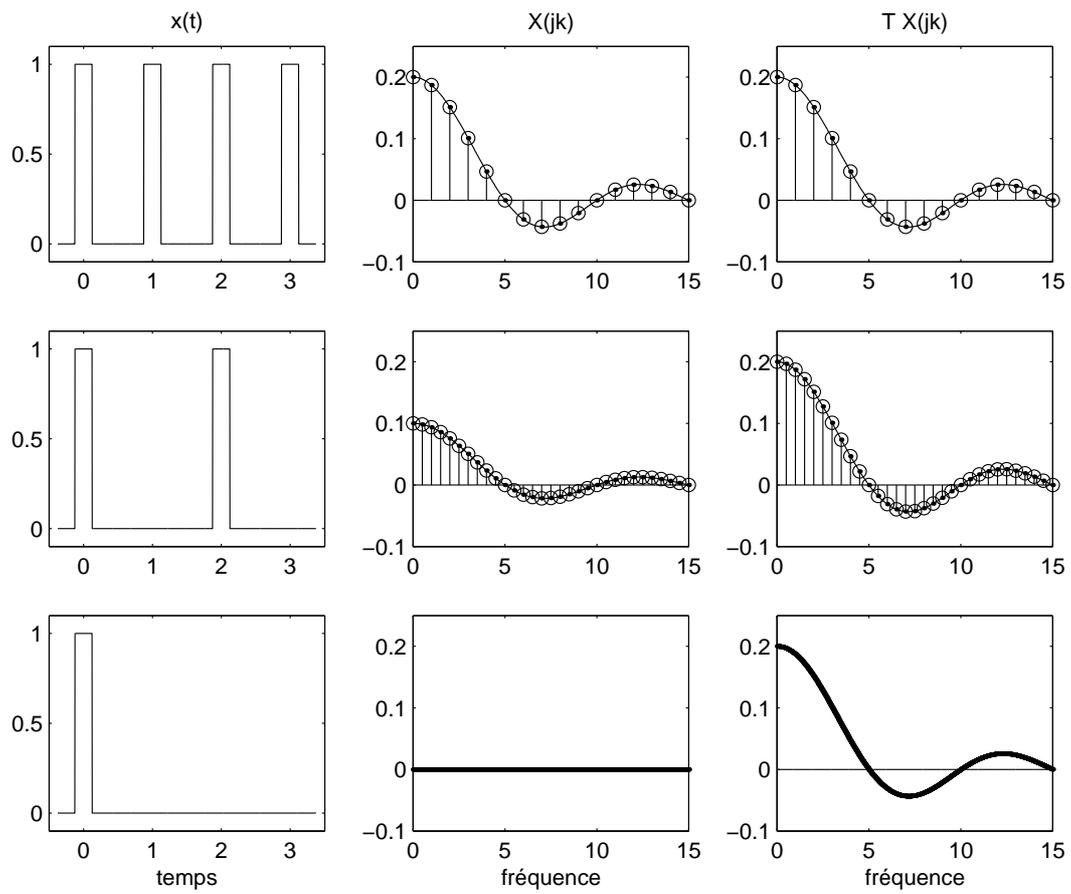


FIG. 5.1: Passage de la série de Fourier à la densité spectrale

La transformée inverse s'obtient en considérant la fonction périodique pour laquelle la période T tend vers l'infini ; on a alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) f_0 \end{aligned}$$

Lorsqu'on passe à la limite

$$T \rightarrow \infty, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf), \quad f_0 \rightarrow df, \quad kf_0 \rightarrow f$$

on obtient la définition de la transformation inverse de Fourier

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df$$

Il est important de noter que les unités de $X(jf)$ ne sont pas les mêmes que celles du signal original $x(t)$. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique, sa transformée $X(jf)$ s'exprime en [V/Hz].

5.1.2 TF directe et inverse

Les deux relations que nous venons de démontrer constituent les transformations de Fourier directe et inverse. On constate que les descriptions temporelle et spectrale sont parfaitement symétriques :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \tag{5.1}$$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \tag{5.2}$$

En notation abrégée, on décrira ces deux transformations par les opérateurs $TF\{\}$ et $TFI\{\}$. La correspondance réciproque s'écrit alors :

$$x(t) = TFI\{X(jf)\} \longleftrightarrow TF\{x(t)\} = X(jf)$$

Si la fonction $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude $X(jf)$ est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(jf) = X_r(f) + jX_i(f) \tag{5.3}$$

Les densités spectrales du module et de la phase valent alors :

$$|X(jf)| \equiv X(f) = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \tag{5.4}$$

$$\angle X(jf) \equiv \alpha(f) = \arctan \frac{X_i(f)}{X_r(f)} \tag{5.5}$$

5.1.3 Énergie d'un signal non permanent

Dans le cas des signaux non permanents, on prendra garde à parler de leur énergie et non pas de leur puissance, car celle-ci est nulle si l'on considère une durée infiniment longue.

De manière similaire à ce que l'on a vu pour les signaux périodiques, on peut calculer l'énergie d'un signal apériodique aussi bien dans le domaine temporel que dans domaine fréquentiel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (5.6)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (5.7)$$

L'expression de l'énergie d'un signal $x(t)$ dans le domaine des fréquences entraîne la définition de la **densité spectrale d'énergie** $S_x(f)$:

$$S_x(f) \equiv |X(jf)|^2 = X(jf) \cdot X(jf)^* \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (5.8)$$

On notera que ses unités s'expriment en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$ lorsque le signal est une tension.

5.1.4 Propriétés de la transformation de Fourier

Parmi le grand nombre de propriétés associées à la transformation de Fourier, on retiendra particulièrement celles qui ont le plus d'intérêt en traitement du signal. Elles sont présentées dans le tableau 5.1.

5.2 Exemples de spectres continus

Pour illustrer l'utilisation de la transformée de Fourier, calculons les densités spectrales de trois signaux particuliers.

5.2.1 Spectre d'une impulsion rectangulaire

Considérons une impulsion $x(t)$ de largeur Δt et d'amplitude A centrée en $t = 0$ (figure 5.2). Par définition de la transformation de Fourier, on a :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

En tenant compte de la définition de l'impulsion rectangulaire centrée :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (5.9)$$

a) linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(jf) + bY(jf)$
b) décalage	$x(t + t_d)$	$X(jf) \exp(+j2\pi f t_d)$
c) amortissement	$x(t) \exp(-at)$, $x(t)$ causal	$X(j2\pi f + a)$
d) modulation	$x(t) \exp(+j2\pi f_0 t)$	$X(j(f - f_0))$
e) dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(jf)$
f) intégration	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(jf) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
g) convolution	$h(t) \otimes x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(jf) \cdot X(jf)$ $H(jf) \otimes X(jf)$
h) énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) ^2 df$
j) valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
k) rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(jf) = X(-jf) = X^*(jf)$
l) fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(jf) \in \Re$
m) fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(jf) \in \Im$
n) symétrie	$y(t) = X(t)$	$Y(jf) = x(-jf)$

TAB. 5.1: Quelques propriétés de la transformation de Fourier

il vient :

$$\begin{aligned}
 X(jf) &= \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} A \exp(-j2\pi f t) dt \\
 &= \frac{-A}{j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \\
 &= \frac{-A}{j2\pi f} \left[\exp(-j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) \right] \\
 &= \frac{A}{\pi f} \frac{\exp(+j\pi f \Delta t) - \exp(-j\pi f \Delta t)}{2j}
 \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Euler :

$$\sin u = \frac{\exp(+ju) - \exp(-ju)}{2j}$$

on obtient finalement :

$$X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t) \in \mathfrak{R} \quad (5.10)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la densité spectrale d'amplitude d'une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$ est bien décrite par un sinus cardinal. De plus, comme l'impulsion rectangulaire $x(t)$ est paire, sa densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction réelle. Enfin, on remarquera (figure 5.2) que le spectre passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $1/\Delta t$.

Le spectre de cette impulsion illustre deux points importants concernant les signaux de durée limitée (figure 5.3) :

Un signal de **courte durée** possède un spectre **large bande**.

Un spectre **étroit** correspond à un signal de **longue durée**.

5.2.2 Spectres d'un sinus amorti

Étudions, comme deuxième exemple, la transformée de Fourier d'une sinusoïde de fréquence f_p décroissant exponentiellement au cours du temps (figure 5.4). Son équation s'écrit :

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t), & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Partant de la définition de la transformée de Fourier, on calcule sa densité spectrale d'amplitude :

$$Y(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

5.2 Exemples de spectres continus

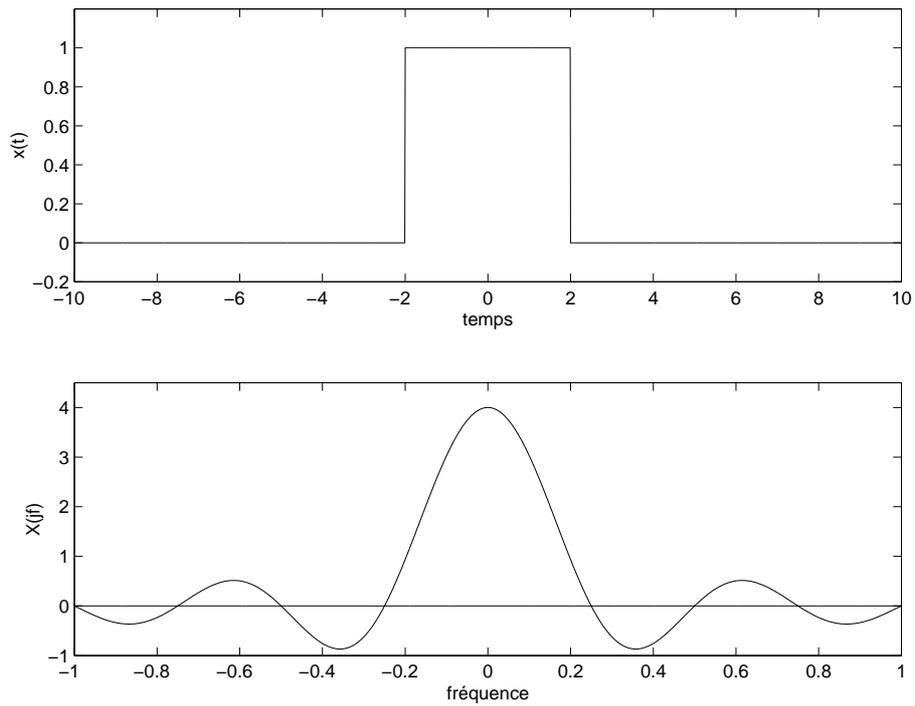


FIG. 5.2: Impulsion rectangulaire et sa densité spectrale d'amplitude

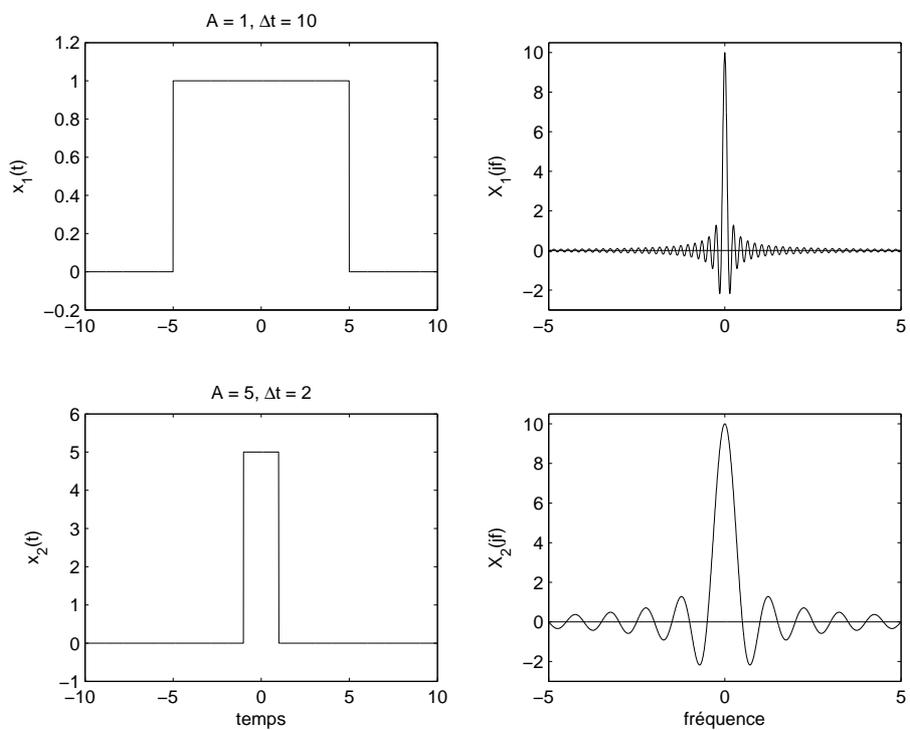


FIG. 5.3: Le contenu spectral d'une impulsion dépend fortement de sa durée

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t) \exp(-j2\pi f t) dt \\
&= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \frac{\exp(+j2\pi f_p t) - \exp(-j2\pi f_p t)}{2j} \exp(-j2\pi f t) dt
\end{aligned}$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles ; elle est très simple à calculer. Après réduction des deux primitives à un même dénominateur, on obtient :

$$Y(jf) = A \frac{2\pi f_p}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_p)^2} \in \mathcal{C} \quad (5.12)$$

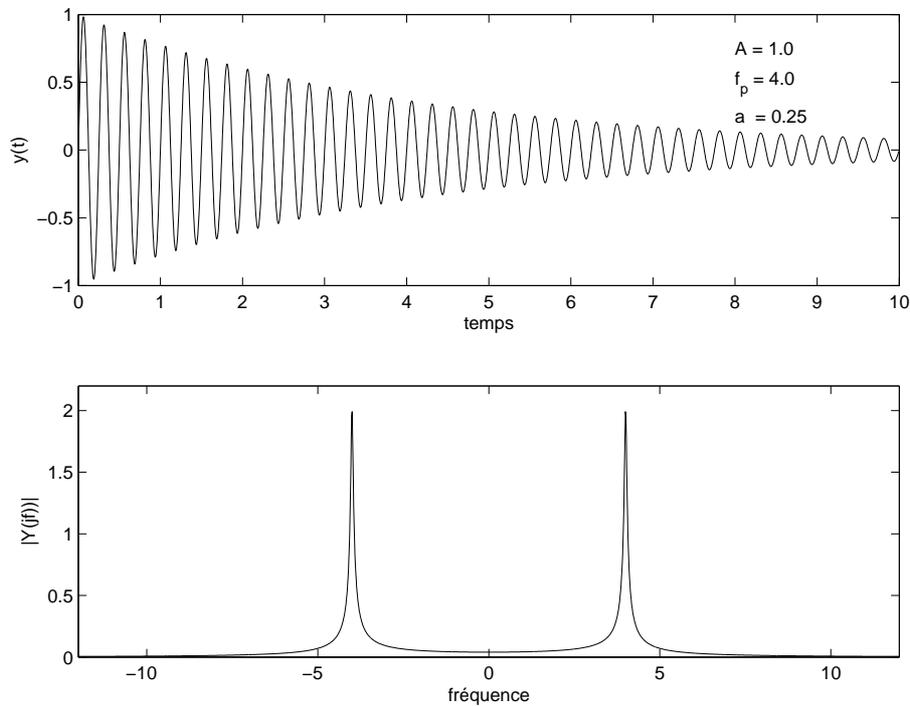


FIG. 5.4: Sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude

On remarquera que la densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction complexe car la sinusoïde décroissante $y(t)$ ne possède pas de symétrie particulière. La figure 5.4 présente le sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude.

On peut également noter les deux valeurs particulières suivantes

$$f = 0 : \quad Y(0) = A \frac{2\pi f_p}{a^2 + (2\pi f_p)^2} \simeq \frac{A}{2\pi f_p} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p$$

$$f = f_p : \quad Y(jf_p) = \frac{A}{a} \frac{2\pi f_p}{a + j4\pi f_p} \simeq \frac{A}{j2a} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p$$

5.2.3 Spectres de deux impulsions rectangulaires

Considérons un signal constitué de deux impulsions d'amplitude A placées symétriquement en $\pm t_0/2$ (figure 5.5). Ce signal possède un spectre qui se calcule facilement à partir de celui d'une impulsion centrée en $t = 0$ et à l'aide du théorème du décalage.

Comme le signal $z(t)$ est la somme de 2 impulsions décalées de $\pm t_0/2$,

$$z(t) = x(t + t_0/2) + x(t - t_0/2) \quad (5.13)$$

on a :

$$Z(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \left[\exp(+j2\pi f \frac{t_0}{2}) + \exp(-j2\pi f \frac{t_0}{2}) \right]$$

donc

$$Z(jf) = 2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \quad (5.14)$$

De plus, par rapport à ce qui va suivre, il est intéressant de considérer également la densité spectrale d'énergie :

$$S_z(f) \equiv |Z(jf)|^2 = \left[2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \right]^2 \quad (5.15)$$

Les densités spectrales d'amplitude et d'énergie sont représentées à la figure 5.5.

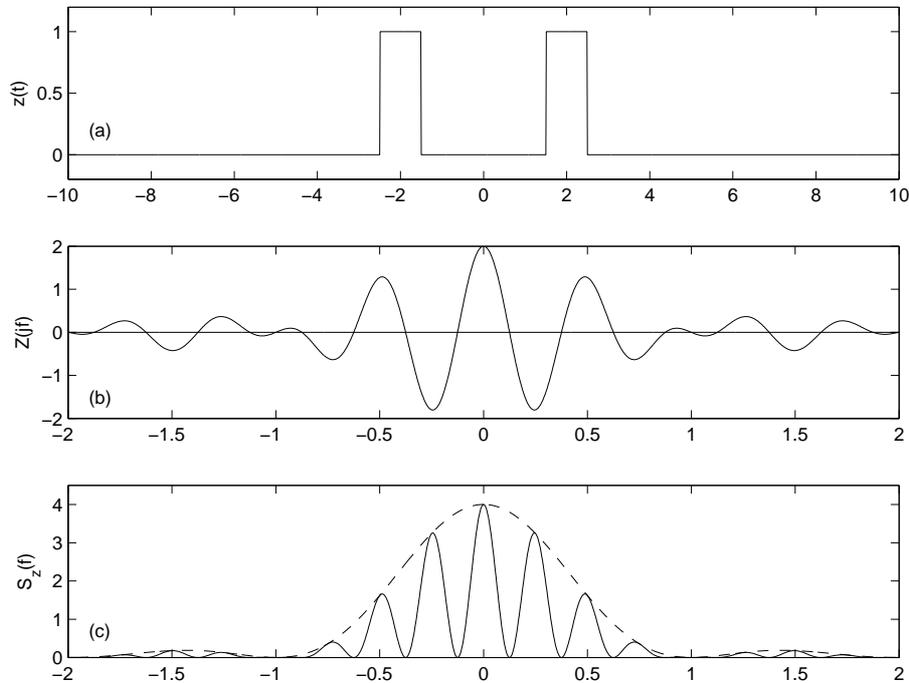


FIG. 5.5: Deux impulsions rectangulaires symétriques (a) avec ses densités spectrales d'amplitude (b) et d'énergie (c)

5.3 Calcul de quelques transformées

Afin de mieux saisir les implications de la TF, calculons les transformées de quelques signaux importants en traitement du signal.

5.3.1 Exponentielle décroissante

Dans ce cas, $x(t)$ vaut

$$x(t) = \exp(-at) \epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

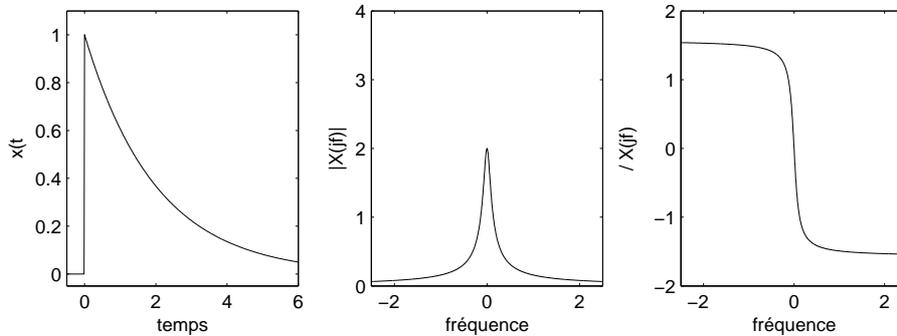


FIG. 5.6: Exponentielle décroissante et ses spectres (module et phase)

L'application de la définition de la TF conduit à :

$$X(jf) = \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi f t) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (5.17)$$

Pour illustrer le théorème de l'énergie, calculons l'énergie de ce signal dans le domaine temporel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-2at) dt = \frac{1}{2a}$$

et dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \arctan \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

On retrouve bien entendu le même résultat dans les deux cas.

5.3.2 Exponentielle décroissante symétrique

Ce signal est décrit par :

$$x(t) = \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (5.18)$$

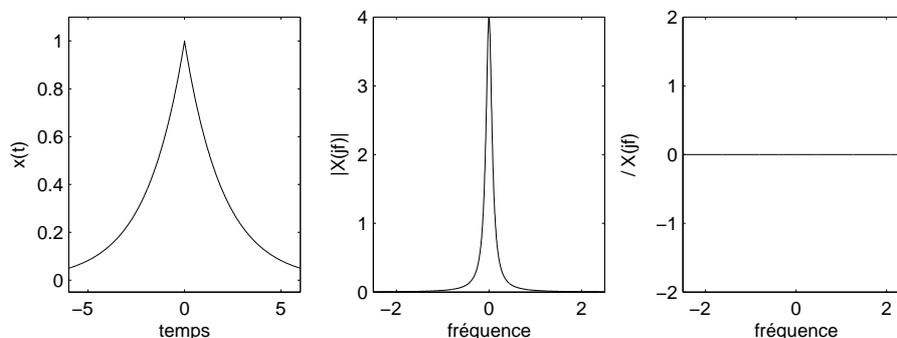


FIG. 5.7: Exponentielle symétrique et ses spectres (module et phase)

De manière plus explicite, on peut encore l'écrire sous la forme

$$x(t) = \exp(+at) \epsilon(-t) + \exp(-at) \epsilon(t) \quad (5.19)$$

On a alors :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^0 \exp(+at) \exp(-j2\pi ft) dt + \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi ft) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1 - 0}{a - j2\pi f} + \frac{0 - 1}{-(a + j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (5.20)$$

On remarquera que $x(t)$ étant pair, sa transformée est réelle.

5.3.3 Signal constant unité

Le signal constant unité vaut simplement 1 quelque soit $t \in (-\infty, +\infty)$. Au sens des limites, il peut être décrit à partir de l'exponentielle symétrique :

$$x(t) = 1 = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (5.21)$$

Ce passage par la limite est nécessaire car le signal constant n'est pas intégrable en valeur absolue et sa transformée de Fourier ne peut donc pas être calculée à partir de sa définition. Par contre, partant de l'exponentielle symétrique, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ \infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

Ce résultat coïncide avec la définition d'une impulsion de Dirac. La TF d'un signal unité est donc une impulsion de Dirac située en $f = 0$:

$$X(jf) = \delta(f) \quad (5.22)$$

5.3.4 Saut unité

Le calcul de la TF d'un saut unité $\epsilon(t)$ (figure 5.8) nécessite également quelques précautions, car ce signal n'est pas intégrable en valeur absolue. Mais, constatant que l'on a :

$$1 = \epsilon(t) + \epsilon(-t)$$

et désignant la TF de $\epsilon(t)$ par $E(jf)$, il vient :

$$TF\{1\} = \delta(f) = E(jf) + E^*(jf) = 2 E_r(jf)$$

De ce résultat, on en déduit que la partie réelle $E_r(jf)$ vaut $\delta(f)/2$.

Il reste encore à trouver la partie imaginaire de $E(jf)$. Pour ce faire, on peut remarquer que le saut unité peut également s'écrire sous la forme :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

dont la transformée (équation 5.17) est purement imaginaire et vaut $1/(j2\pi f)$. On obtient donc finalement :

$$E(jf) = E_r(jf) + j E_i(jf) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (5.24)$$

5.3.5 Phaseur

Pour calculer sa TF, considérons le fait qu'un phaseur de fréquence f_0 peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \exp(+j2\pi f_0 t) = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|) \exp(+j2\pi f_0 t) \quad (5.25)$$

Utilisant la TF de l'exponentielle symétrique (équation 5.20) et la propriété de modulation, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi(f - f_0))^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq f_0 \\ \infty & \text{si } f = f_0 \end{cases}$$

La TF d'un phaseur de fréquence f_0 est donc une impulsion de Dirac située en $f = f_0$:

$$X(jf) = \delta(f - f_0) \quad (5.26)$$

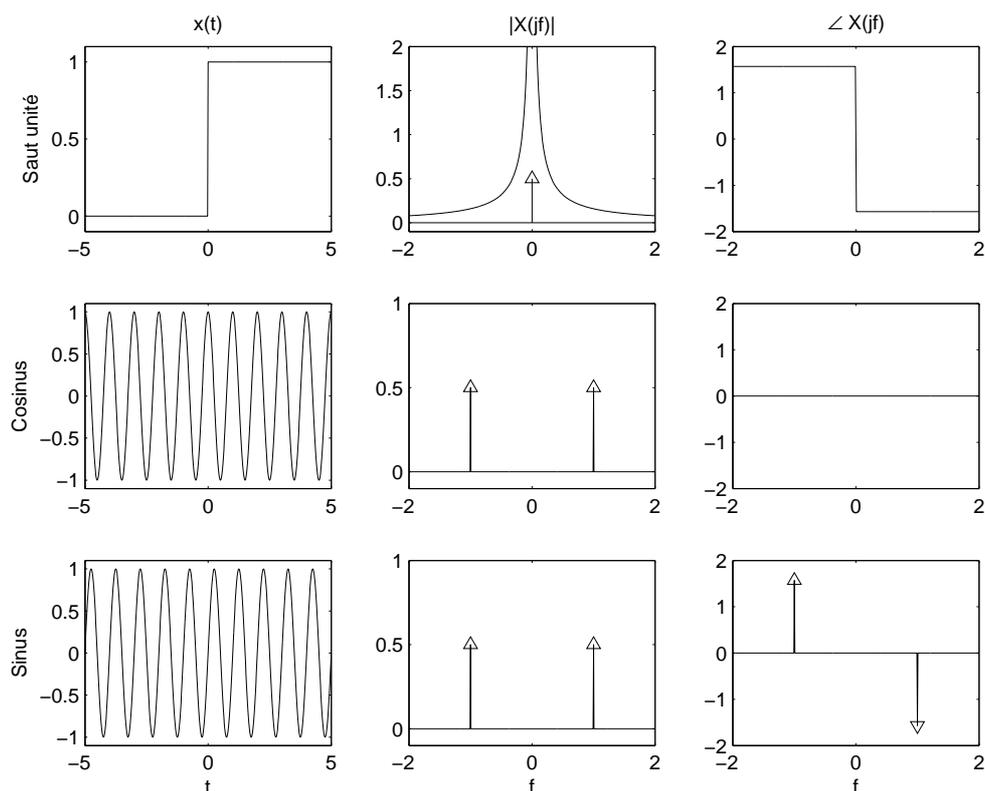


FIG. 5.8: Signaux et densités spectrales d'un saut unité, d'un cosinus et d'un sinus

5.3.6 Signal sinusoïdal

Comme un signal sinusoïdal est constitué de 2 phaseurs conjugués complexes (loi d'Euler), sa TF comportera 2 impulsions de Dirac situées en $\pm f_0$. Plus précisément, on aura :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \quad (5.27)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} [e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} \quad (5.28)$$

La première TF est réelle, car la cosinusoïde est paire, alors que la deuxième TF est imaginaire car la sinusoïde est impaire. On notera que les modules des densités spectrales sont les mêmes et que seuls diffèrent leurs arguments (figure 5.8).

5.3.7 Impulsion sinusoïdale

Parmi les propriétés des transformations de Laplace et Fourier, nous avons vu qu'à un produit de convolution dans le domaine temporel correspond un produit simple

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

dans le domaine complexe :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (5.29)$$

L'inverse de cette proposition est également vraie et elle est très pratique pour calculer le spectre de signaux modulés en amplitude. Elle s'exprime comme suit. À un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine complexe :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) \quad (5.30)$$

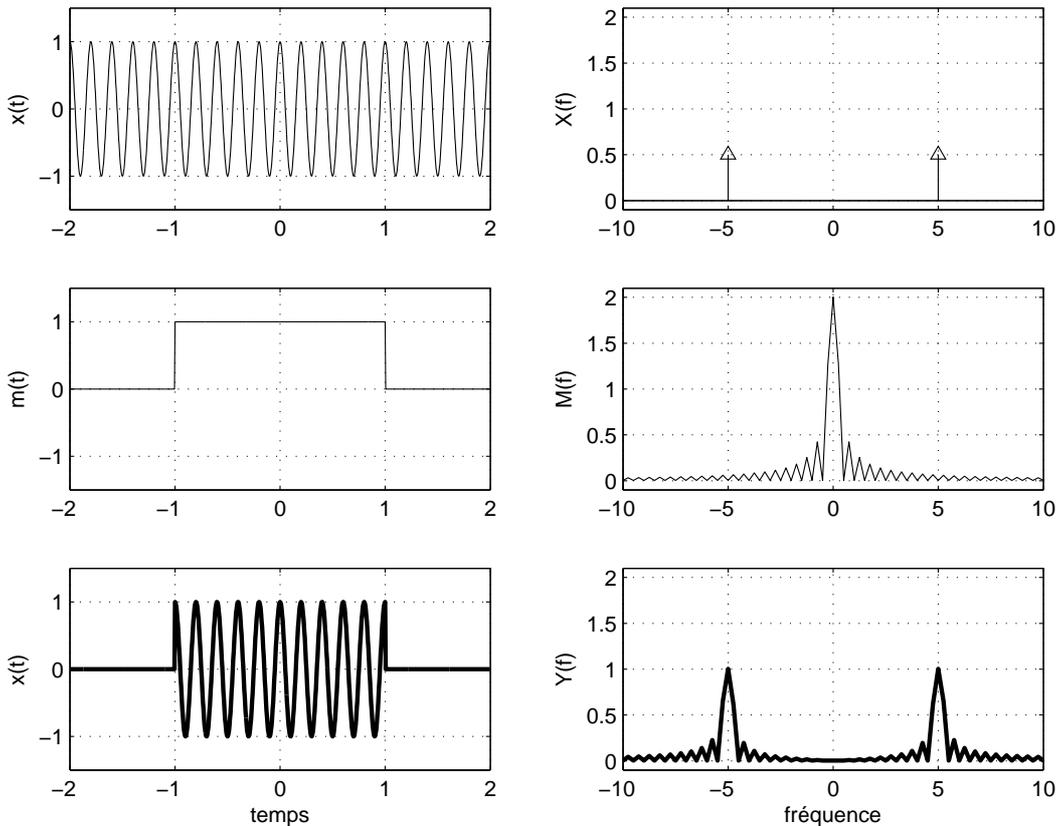


FIG. 5.9: Impulsion sinusoïdale et son spectre

Considérons comme exemple une impulsion sinusoïdale de durée Δt (fig. 5.9c)

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Voyant que ce signal est équivalent à la multiplication d'une sinusoïde permanente (fig. 5.9a) par une impulsion de largeur Δt (fig. 5.9b), on a :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Sachant que les spectres des signaux $x(t)$ et $m(t)$ valent respectivement

$$X(jf) = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$M(jf) = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t)$$

et que la convolution entre une fonction et une impulsion de Dirac reproduit la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion, on voit que le spectre de l'impulsion sinusoïdale vaut

$$Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) = \frac{A \Delta t}{2} (\operatorname{sinc}((f + f_0) \Delta t) + \operatorname{sinc}((f - f_0) \Delta t))$$

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion sinusoïdale de durée Δt est constitué de deux sinus cardinaux situés en $+f_0$ et $-f_0$ (figure 5.9c).

5.4 Quelques conclusions

5.4.1 TF des signaux périodiques

Du paragraphe précédent, on retiendra que la transformation de Fourier s'applique également à des signaux périodiques, c'est-à-dire à des signaux de puissance moyenne finie. Dans ce cas, les raies spectrales de la série de Fourier sont remplacées par des impulsions de Dirac.

5.4.2 Relations avec la transformation de Laplace

Les définitions des transformées de Fourier et Laplace montrent une forte similitude. On a en effet

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-s t) dt \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j2\pi f$$

Si on a défini des transformations si proches, mais malgré tout distinctes, c'est que tous les signaux ne sont pas transformables de Fourier et/ou de Laplace. En effet, l'existence de ces transformations entraînent les restrictions suivantes :

- pour la transformation de Fourier, il faut que le signal soit intégrable en valeur absolue et que le nombre de ses discontinuités soit fini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- pour la transformation de Laplace, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-st}| dt < \infty$$

autrement dit, il faut que le signal $x(t)$ pondéré par une exponentielle amortie soit intégrable en valeur absolue.

Des deux points ci-dessus, il découle que les signaux temporaires (à énergie finie) et les signaux permanents périodiques ou non (à puissance finie) possèdent une transformée de Fourier mais pas nécessairement une transformée de Laplace. Ainsi en est-il de l'exponentielle symétrique et, au sens des limites, des signaux périodiques.

Par contre, des signaux démarrant en $t = 0$ tels qu'une rampe $x(t) = a \cdot t \epsilon(t)$, une parabole $x(t) = a \cdot t^2 \epsilon(t)$, ne sont pas transformables de Fourier, alors qu'ils possèdent une transformée de Laplace.

Il existe d'autre part des signaux qui possèdent les deux transformées ; par exemple, les signaux amortis démarrant en $t = 0$. Et d'autres qui n'en possèdent aucune ; par exemple $x(t) = a \cdot t$ pour $-\infty < t < +\infty$.

On trouvera en fin de chapitre une table illustrée des transformées de Fourier tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2].

5.5 Extension de la transformation de Fourier

Le spectre d'énergie des deux impulsions étudiées à la section 5.2.3 montre une grande similitude avec la figure de diffraction de Fraunhofer due à deux fentes étroites (figure 5.10). En réalité, il s'agit bien plus que d'une similitude car on montre en physique que toute figure de diffraction est la transformée de Fourier de l'objet qui en est la cause.

De cette analogie, on déduit que la notion de transformation de Fourier peut être étendue à des espaces à plusieurs dimensions. Cette transformation de Fourier multidimensionnelle est définie de manière similaire à celle que nous avons étudiée jusqu'à présent

$$x(t) \rightarrow X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (5.31)$$

avec f représentant la fréquence des oscillations, c'est-à-dire le nombre de périodes par unité de temps. Cette fréquence est mesurée en [Hz] ou, de manière plus fondamentale, en [1/sec].

Dans le cas particulier d'une image (espace à deux dimensions), on a affaire à une intensité lumineuse i fonction des coordonnées x et y

$$i = i(x, y) \quad (5.32)$$

Sa transformée de Fourier est alors définie comme suit

$$i(x, y) \rightarrow I(jf_x, jf_y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, y) \exp(-j2\pi f_x x) \exp(-j2\pi f_y y) dx dy \quad (5.33)$$

Ici, les fréquences spatiales f_x et f_y représentent le nombre de périodes par unité de longueur mesurées en [1/m]. Une illustration des spectres spatiaux (ou des figures de diffraction) d'ouvertures circulaire et carrée est donnée à la figure 5.11 ; on y reconnaît la fonction sinus cardinal distribuée dans l'espace des fréquences spatiales f_x et f_y .

5.5 Extension de la transformation de Fourier

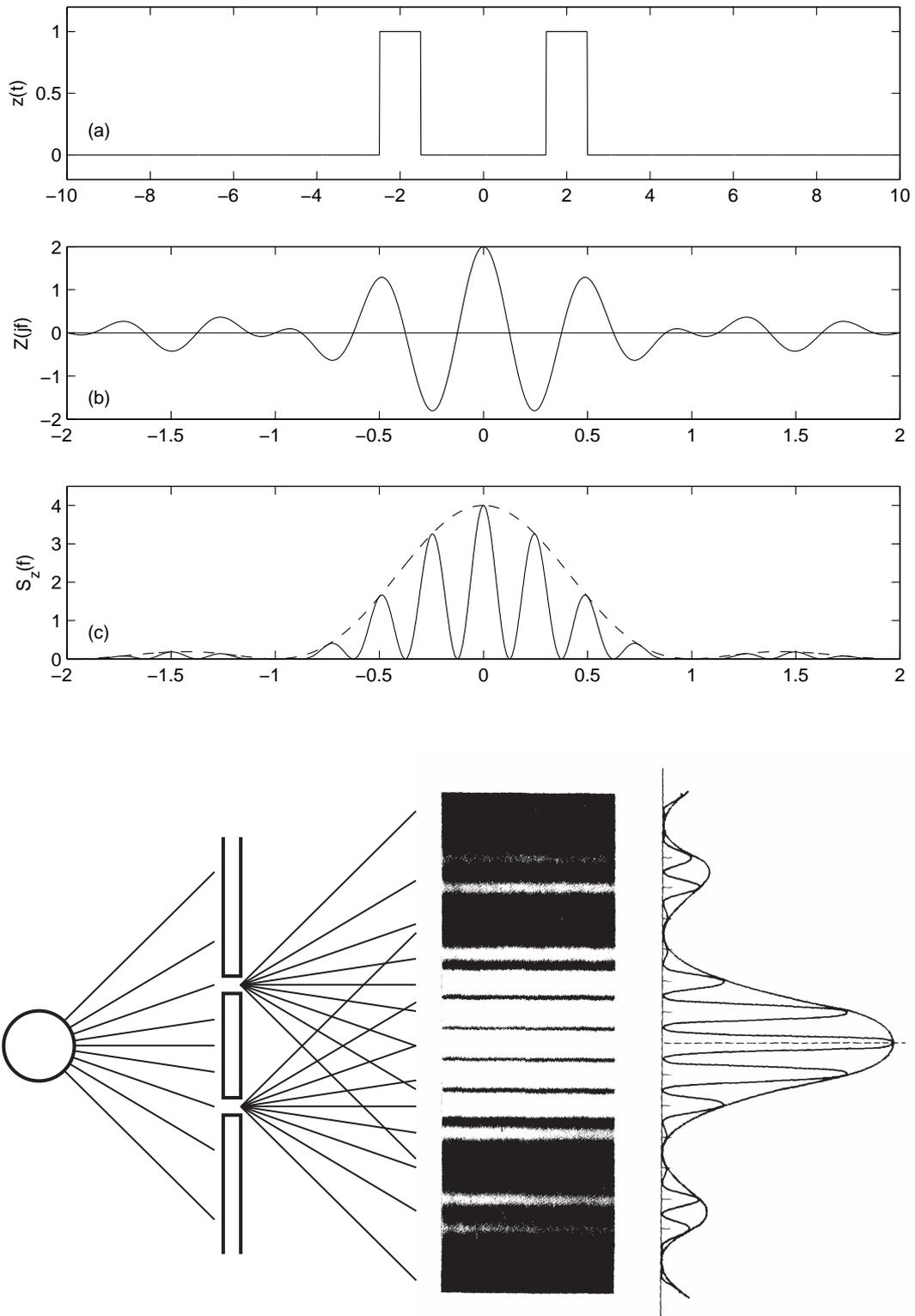


FIG. 5.10: a) Deux impulsions rectangulaires et leurs spectres d'amplitudes et d'énergie
 b) Figure de diffraction causée par deux ouvertures étroites [3]

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

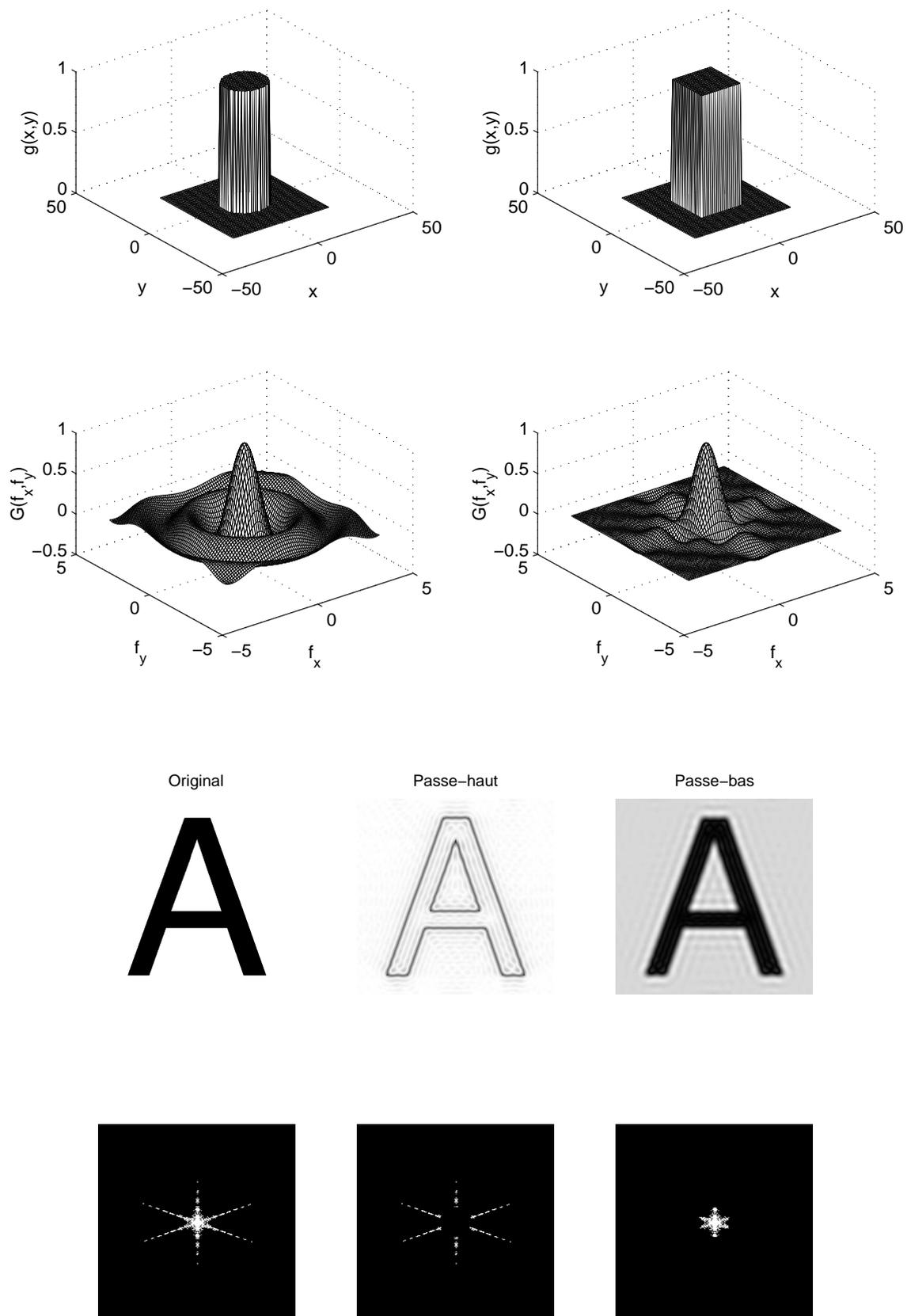


FIG. 5.11: a) Transformées de Fourier spatiales d'un rond et d'un carré
 b) Filtrage spatial de la lettre A avec un masque qui ne laisse passer que les hautes ou les basses fréquences

Comme nous venons de le voir, la notion de transformation de Fourier s'applique à des fonctions bidimensionnelles. On imagine donc aisément que les principes de filtrage bien connus en électronique peuvent s'étendre de la même manière à des signaux multidimensionnels. Une illustration en est donnée à la figure 5.11 où l'on voit comment l'application de masques dans le domaine fréquentiel permet d'extraire les bords de l'image (filtrage passe-haut) ou de défocaliser l'image (filtrage passe-bas). On notera qu'un filtrage réalisé avec un masque constitué simplement de 0 ou 1 n'est pas optimum car il entraîne les effets de franges bien visibles sur les images.

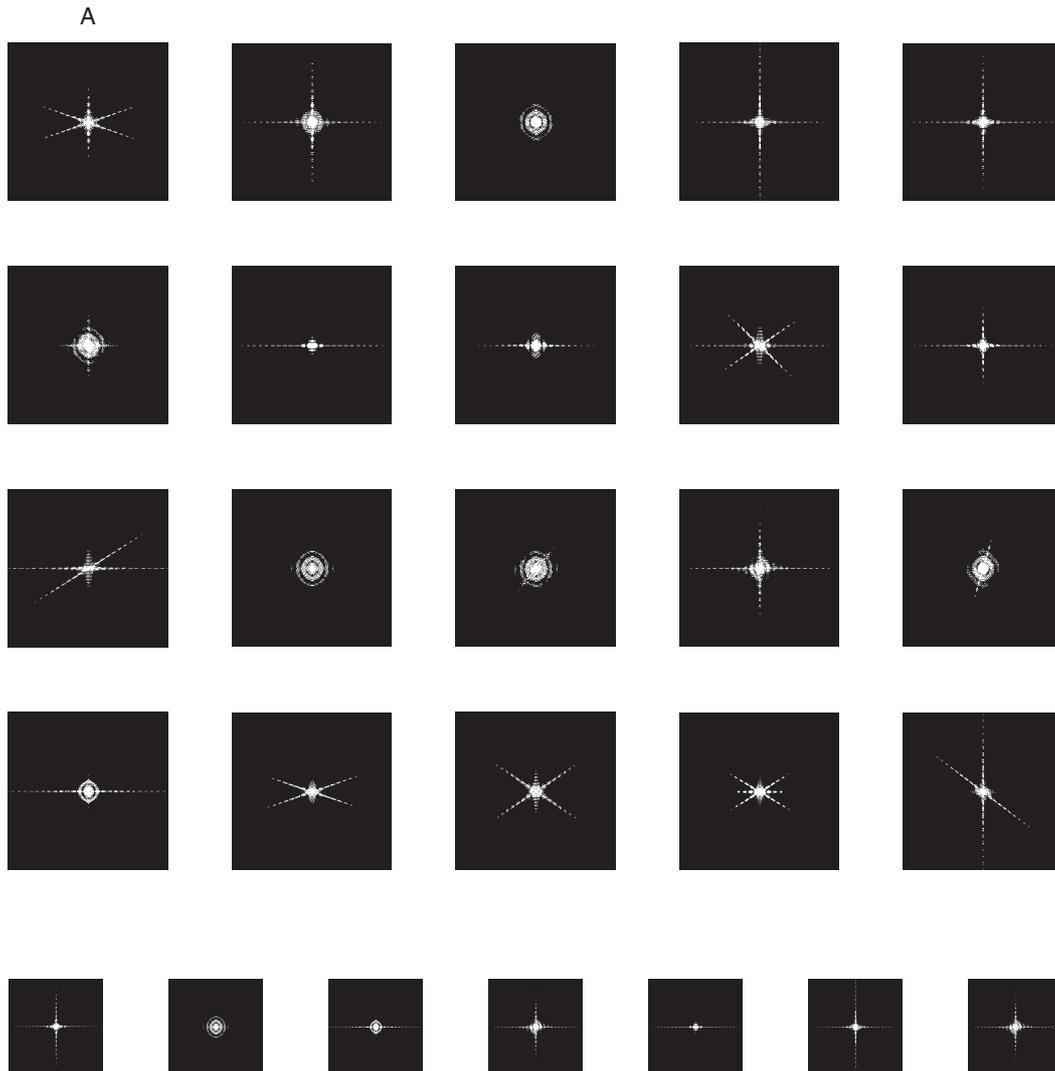


FIG. 5.12: Alphabet de Fourier (partiel) avec le mot à découvrir

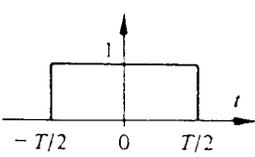
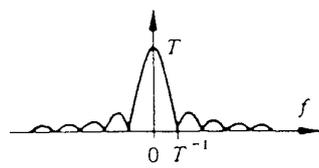
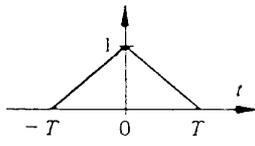
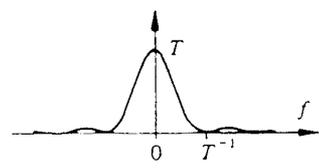
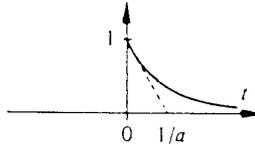
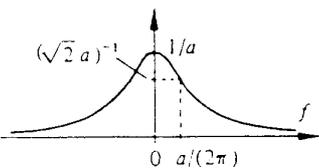
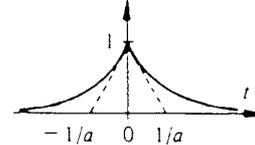
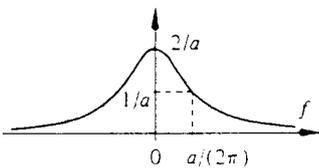
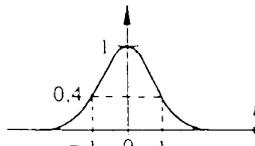
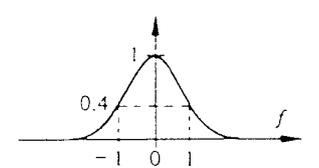
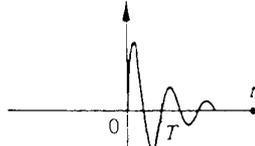
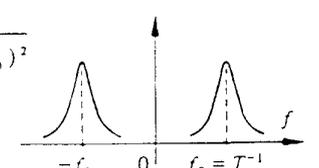
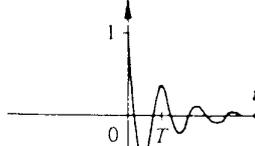
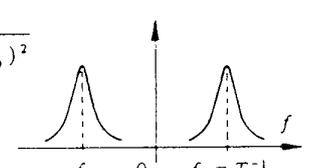
Une expérience amusante consiste à lire un texte dans l'espace de Fourier si, au préalable, on s'est familiarisé avec les spectres bidimensionnels des majuscules de l'alphabet (figure 5.12). Quelques instants d'observation montrent qu'il est possible de reconnaître les lettres de l'alphabet simplement à partir de leur transformée de Fourier spatiale. Dans cette figure, seules vingt images de l'alphabet sont présentées dans l'ordre alphabétique; les lettres manquantes peuvent être retrouvées en

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

essayant de se représenter leur spectre. Après avoir trouvé les lettres manquantes, on peut rechercher le mot écrit avec cet alphabet.

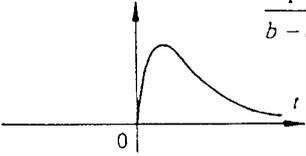
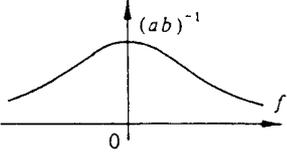
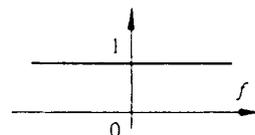
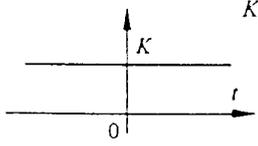
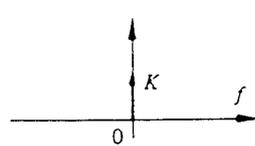
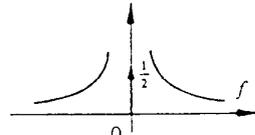
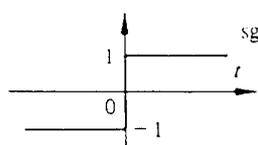
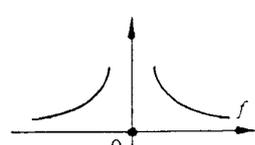
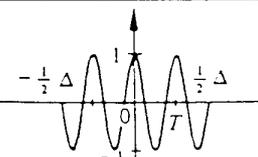
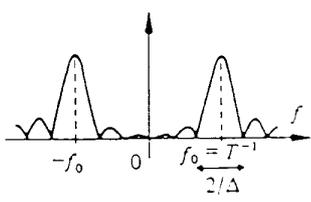
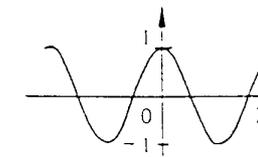
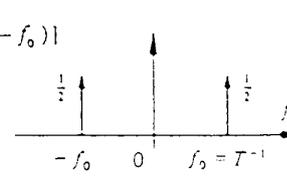
5.6 Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

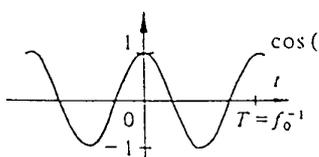
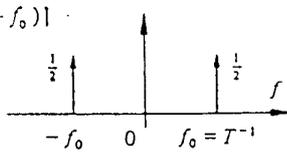
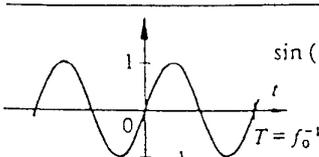
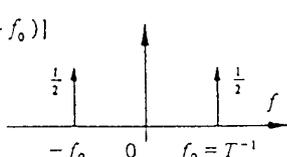
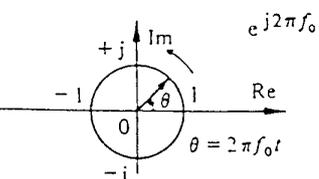
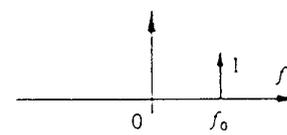
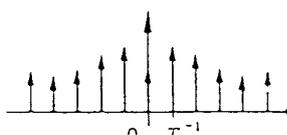
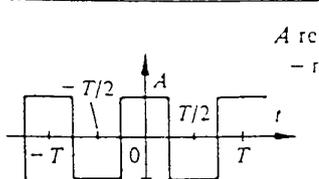
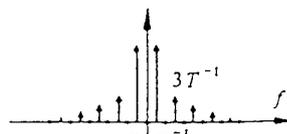
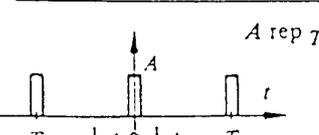
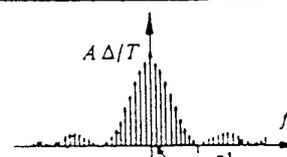
$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$	$= T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\delta(t)$	1	
<p>impulsion unité (Dirac)</p>		
 K	$K \delta(f)$	
<p>constante</p>		
 $\epsilon(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
<p>saut unité</p>		
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\frac{1}{j\pi f}$ si $f \neq 0$ 0 si $f = 0$	
<p>fonction signe</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	
<p>impulsion cosinusoidale</p>		
 $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
<p>signal cosinusoidal</p>		

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$	
 <p>$e^{j2\pi f_0 t}$</p>	$\delta(f-f_0)$	
 <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nr}{T}}$	
 <p>onde carrée</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = A \text{sinc}(n/2)$	
	$= \begin{cases} \left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 1, \pm 5, \dots \\ -\left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 3, \pm 7, \dots \end{cases}$	
	$X_n = 0$ pour n nul ou pair	
 <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$

5.7 Exercices

TF 1 À partir de la seule observation du signal temporel de la figure 5.13, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ puis calculez et esquissez sa transformée de Fourier.

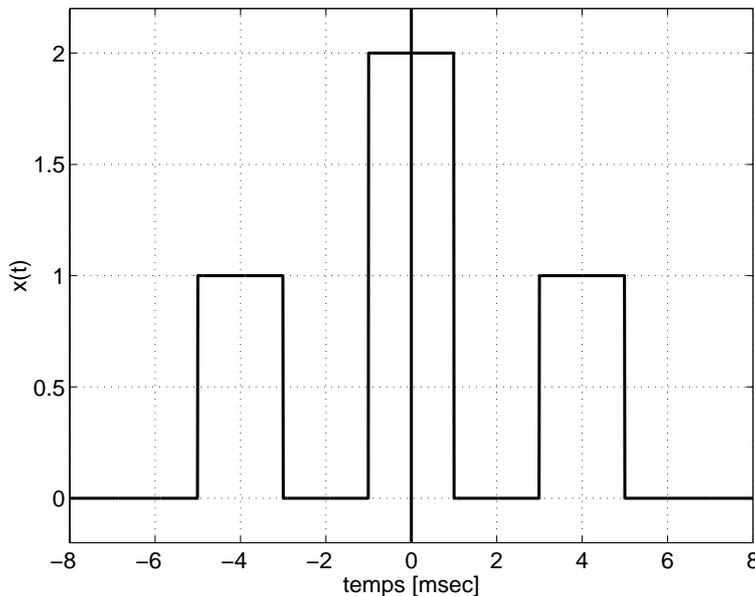


FIG. 5.13: Exercice TF1

TF 2 Partant de la TF d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculez les TF de $x(t)$ et $y(t)$ (figure 5.14). Après calculs, vous remarquerez que $Y(jf)$ peut s'écrire sous la forme d'un sinc^2 .

TF 3 Partant de la TF d'une impulsion et d'un saut unité, trouvez celle de $z(t)$ (figure 5.14). Est-il possible de trouver $Z(jf)$ à partir de $Y(jf)$? Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $Z(jf = 0)$ qui doit être égal à $\Delta t/2$.

TF 4 Soit un signal carré périodique symétrique (à valeur moyenne nulle) d'amplitude A . Esquissez

1. le signal $x(t)$;
2. le spectre que l'on obtient avec les séries de Fourier ;
3. le spectre que l'on obtient avec la transformation de Fourier.

TF 5 Considérant le signal $x(t) = \exp(-a|t|)$, calculez et esquissez $x(t)$ et $X(jf)$, puis vérifiez les 2 égalités suivantes :

$$a) \quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt, \quad b) \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$$

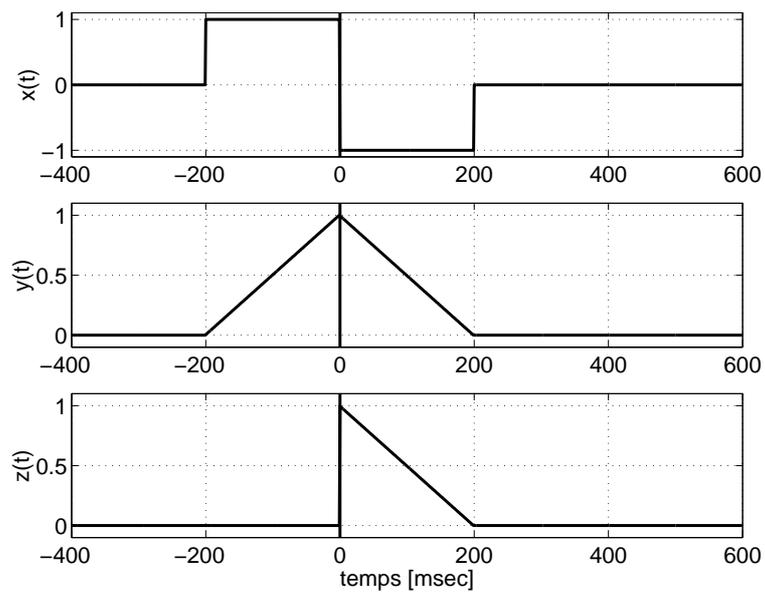


FIG. 5.14: Exercices TF2 et TF3

TF 6

	fréquence	temps
1	la partie réelle de $X(jf)$ est nulle	
2	la partie imaginaire de $X(jf)$ est nulle	
3	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est réel	
4	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est imaginaire	
5	$X(jf)$ est continu	

1. Considérant les cinq propriétés fréquentielles du tableau ci-dessus, exprimez leur équivalent temporel dans la colonne de droite.
2. Pour chacun des signaux temporels de la figure 5.15, quelles sont les propriétés du tableau qui s'y appliquent ?

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

3. Construisez un signal qui ne possède aucune des cinq propriétés mentionnées dans le tableau.

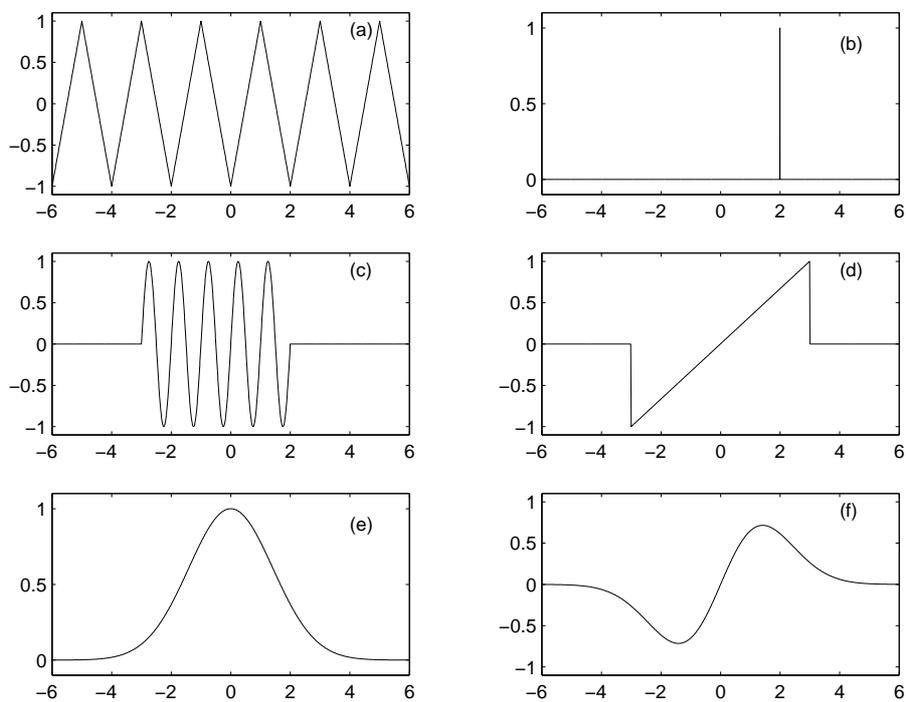


FIG. 5.15: Exercice TF6

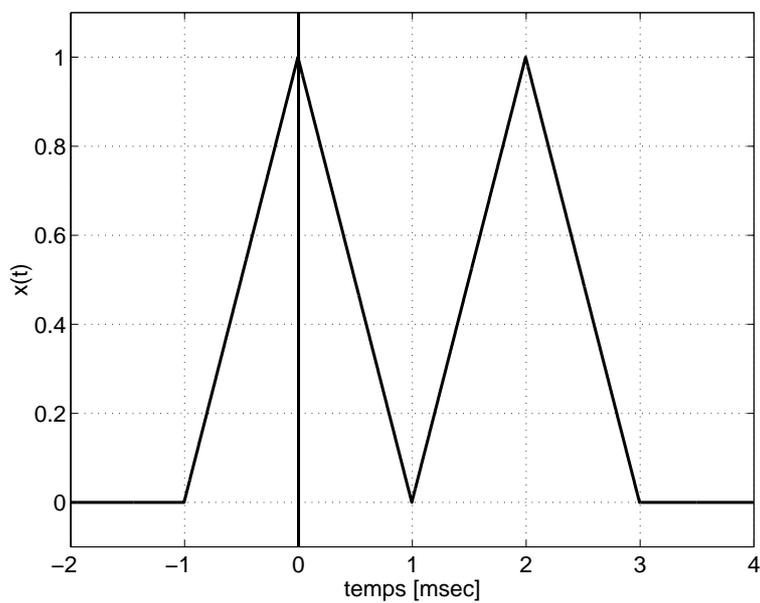


FIG. 5.16: Exercice TF7

TF 7 Soit $X(jf)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$ de la figure 5.16. Sans calculer explicitement $X(jf)$, recherchez :

1. la densité spectrale de phase de $X(jf)$;
2. la valeur de $X(f = 0)$;
3. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$;
4. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df$.

TF 8 Connaissant la TF d'une sinusoïde amortie démarrant en $t = 0$

$$X(jf) = \frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$$

1. calculez la TF d'une sinusoïde non amortie démarrant à l'instant $t = 0$;
2. esquissez les modules des spectres $X(jf)$, $Y(jf)$ et celui d'une sinusoïde permanente;
3. discutez les différences existant entre ces trois spectres.

TF 9 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \epsilon(t)$, d'amortissement

$a = 100$ [1/sec] à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec];

1. calculez la TF $U_2(jf)$ de la tension de sortie $u_2(t)$ du filtre;
2. utilisez le tableau des transformées pour déduire l'expression temporelle de $u_2(t)$.

TF 10 Soit un message $m(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(jf)|$ si $f_1 = 10$ [kHz] et $f_0 = 800$ [kHz];
3. idem 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(jf)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz].

TF 11 Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $|U(jf)|$ pour $U_0 = 1$ [V], $T = 1/f_0 = 1$ [msec], $t_0 = 10$ [msec].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

TF 12 Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi f_0 t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $U(jf)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée ;
4. observez les différences.

TF 13 Connaissant la transformée $E(jf)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(jf)$ de la fonction signe $s(t)$.

TF 14 Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(jf) = X(jf) \cdot H(jf) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(jf)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf)\exp(+j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(jf)X(jf)\exp(+j2\pi ft)df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\exp(-j2\pi f\theta)d\theta$$

TF 15 Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(jf)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(jf)$; ce filtre est-il réalisable ? pourquoi ?

TF 16 Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $U(jf)$;
2. calculez puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut son énergie ?

TF 17 Utilisez la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

TF 18 On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

TF 19 On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \exp(-a|t|)$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

TF 20 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$; esquissez leur module ;
2. en admettant $U_0 = 10 \text{ [V]}$ et $a = 1000 \text{ [1/sec]}$, calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :
 - (a) $f_c = 1 \text{ [kHz]}$;
 - (b) $f_c = \frac{a}{2\pi}$.

TF 21 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec] un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(jf) = \begin{cases} 1 \text{ [V/Hz]} & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 300 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(jf)$ du filtre; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(jf)$, $H(jf)$ et $U_2(jf)$ pour $-500 \text{ [Hz]} < f < +500 \text{ [Hz]}$;
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

TF 22 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = RC = 10$ [msec] une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \exp(-at)\epsilon(t)$ avec $a = 1000$ [1/sec].

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

TF 23 On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(jf) = \frac{D_0 \frac{jf}{f_0}}{1 + D_0 \frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1 \text{ [kHz]} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 D_0$$

TF 24 Considérant le spectre $X(jf)$ de la figure 5.17 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface $1/2$, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

¹Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- a) esquissez la fonction à intégrer;
- b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie;
- c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

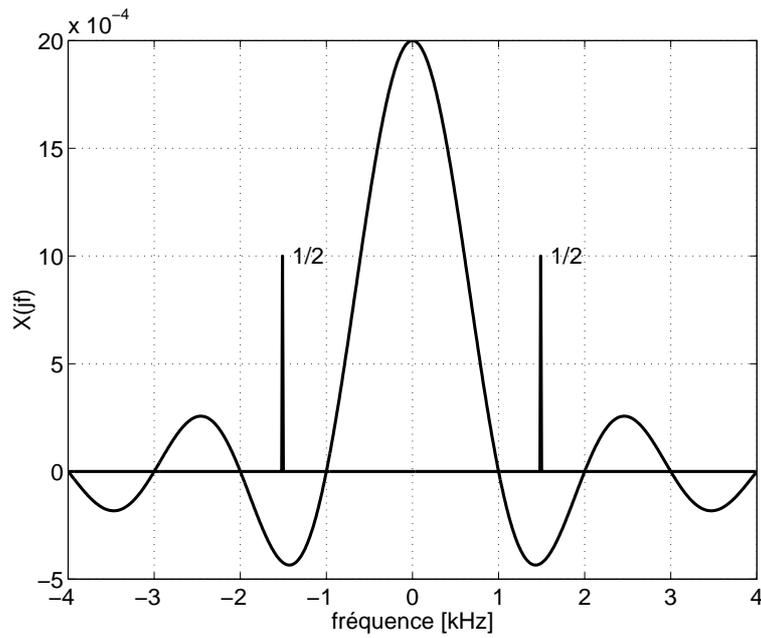


FIG. 5.17: Exercice TF24

TF 25 À partir du signal $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

5 ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970