

6 Éléments d'analyse spectrale numérique

6.1 Passage de la TF à la TFD

L'échantillonnage des signaux analogiques est étudié en détail par ailleurs. Pour ce qui suit, il suffit de savoir que tout signal analogique $x(t)$ est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage T_e et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux $x[n]$ sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 6.1) et tels que

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_e} \quad (6.1)$$

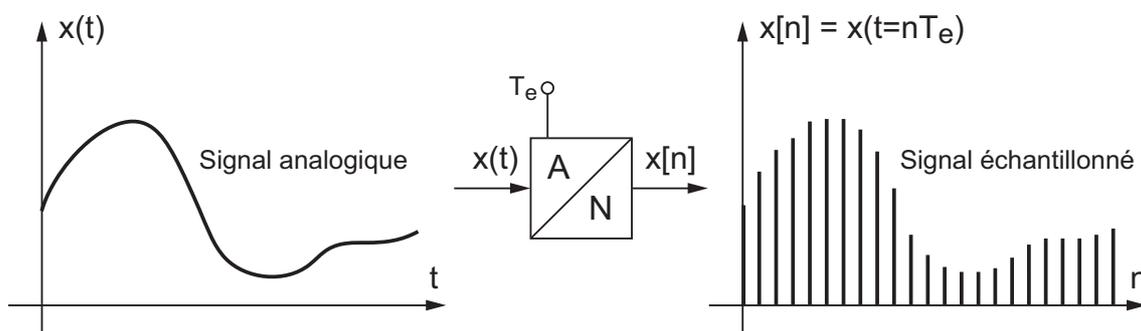


FIG. 6.1: Acquisition numérique d'un signal analogique

Le passage de la transformation de Fourier (TF) des signaux analogiques $x(t)$ à la transformation de Fourier discrète (TFD) des signaux numérisés $x[n]$ fait intervenir trois opérations :

- l'échantillonnage du signal analogique ;
- la limitation de la durée de l'enregistrement de ce signal ;
- la discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale numérique.

Ces trois opérations, apparemment anodines, ont des conséquences dont il est important d'évaluer l'étendue. Pour mémoire, on rappelle trois propriétés de la transformation de Fourier dont on aura besoin par la suite :

- au produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(jf) \otimes Y(jf) \quad (6.2)$$

$$x(t) \otimes y(t) \longleftrightarrow X(jf) \cdot Y(jf) \quad (6.3)$$

– la TF d'un peigne d'impulsions de Dirac est également un peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (6.4)$$

– la TF d'une impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt est un sinus cardinal

$$A \text{rect}(t/\Delta t) \longleftrightarrow A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{sinc}(f \Delta t) \quad (6.5)$$

Afin de concrétiser au mieux les relations existant entre les espaces temps et fréquence, on considérera par la suite que les signaux étudiés sont fournis sous la forme d'une tension électrique que l'on échantillonne régulièrement pendant une durée finie avant de calculer numériquement son contenu spectral. Ainsi, pour chaque équation, on pourra préciser les unités des résultats obtenus.

6.1.1 Signaux continus non-périodiques (\Rightarrow TF)

Un signal analogique $x(t)$ et sa densité spectrale $X(jf)$ sont reliés entre eux par les relations

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V sec}] \quad (6.6)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi ft) df \quad [\text{V}] \quad (6.7)$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence (figure 6.2.a). À cette symétrie correspond la propriété suivante :

à un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu non périodique.

6.1.2 Signaux discrets de durée infinie (\Rightarrow TFi)

On considère ici que le signal continu $x(t)$ (figure 6.2.a) est échantillonné tous les multiples de la période d'échantillonnage T_e . Cette opération d'échantillonnage peut être représentée mathématiquement par la multiplication du signal $x(t)$ avec un peigne d'impulsions de Dirac distantes de T_e (figure 6.2.b)

$$x(t = nT_e) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (6.8)$$

On obtient ainsi une suite d'impulsions de Dirac pondérées par les valeurs $x(t = nT_e)$ (figure 6.2.c) ; celles-ci représentent alors le signal discret $x[n] = x(t = nT_e)$.

Dans l'espace fréquentiel, le peigne de Dirac temporel $\delta_{T_e}(t)$ devient un peigne de Dirac périodique f_e (figure 6.2.b)

$$\Delta(f) \equiv TF\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (6.9)$$

Comme le produit simple dans l'espace temps conduit à un produit de convolution entre les spectres $X(jf)$ et $\Delta(f)$ (figure 6.2.c), on constate que :

6.1 Passage de la TF à la TFD

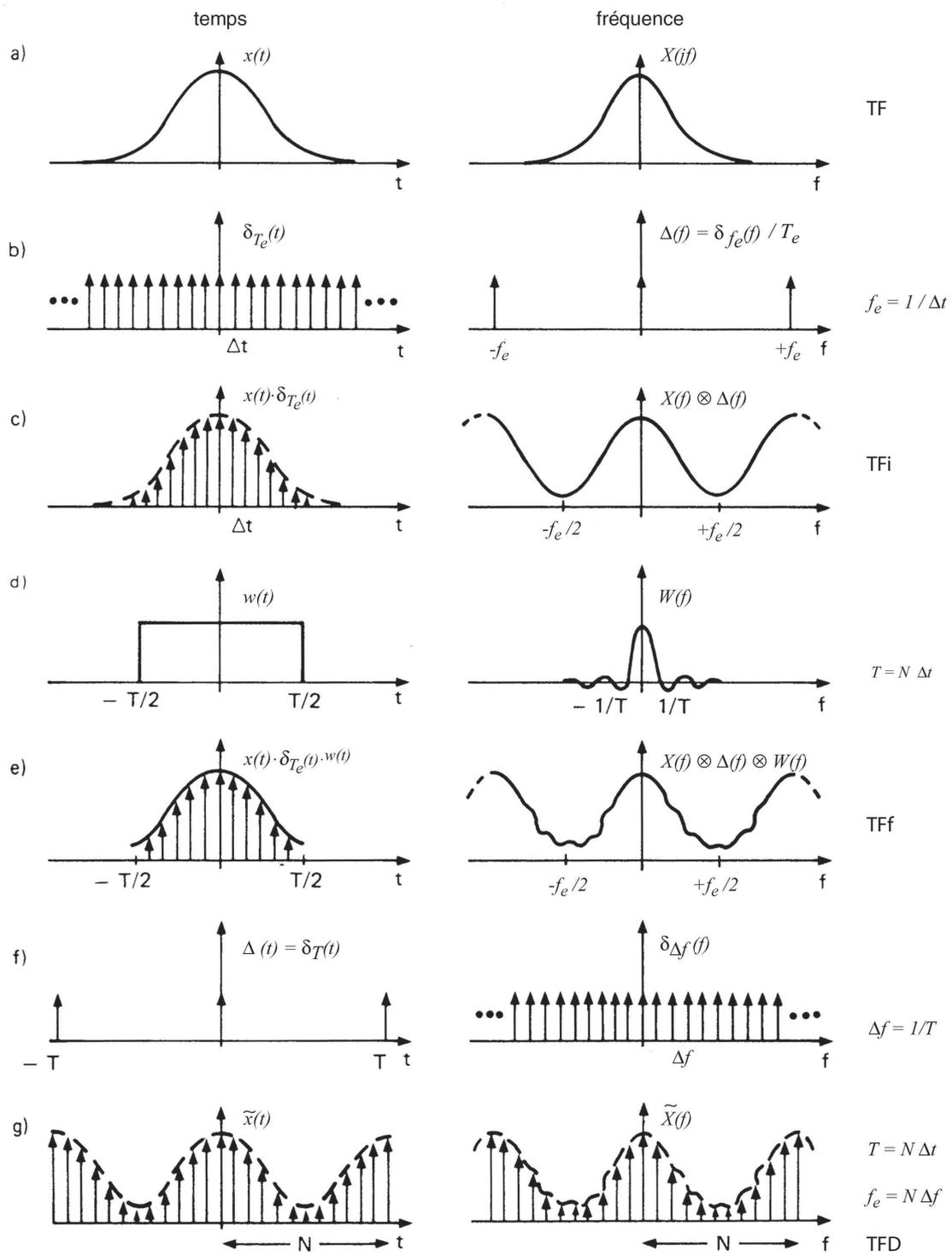


FIG. 6.2: Passage de la TF à la TFD [1]

à un signal échantillonné ou discret correspond un spectre continu et périodique f_e .

Le calcul du spectre $X_e(jf)$ d'un signal discret $x[n]$ se fait à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux continus (équation 6.6). On obtient alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (6.10)$$

Partant de ce spectre $X_e(jf)$, on peut bien entendu revenir au signal temporel $x[n]$:

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad -\infty < n < +\infty \quad (6.11)$$

6.1.3 Signaux discrets de durée finie (\Rightarrow TFF)

Dans le cas où l'on désire traiter numériquement un signal, le nombre de valeurs $x[n]$ ne peut pas être infiniment grand. On est donc contraint à ne prendre en compte qu'une partie du signal original. Mathématiquement, cette opération de troncation revient à multiplier le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire $w(t)$ de largeur T (figure 6.2.d).

À cette multiplication dans l'espace temps correspond un produit de convolution dans l'espace des fréquences entre le spectre du signal $X(jf)$ et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre $w(t)$. Il en résulte une déformation du spectre original causée par les ondulations du sinus cardinal (figure 6.2.e).

Le signal $x(t)$ est enregistré pendant une durée finie T en échantillonnant N valeurs du signal $x(t)$. On a donc $T = N \cdot T_e$. La suite de valeurs discrètes $x_N[n]$ ainsi obtenue sera énumérée avec le compteur temporel n compris entre 0 et $N - 1$ et le spectre du signal tronqué se calcule alors comme suit

$$X_{e,N}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}]$$

Il est bien clair que les N valeurs temporelles peuvent s'obtenir par transformation inverse de $X_{e,N}(jf)$

$$x_N[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{e,N}(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Remarque Par la suite, aucune distinction ne sera faite entre $x_N[n]$ et $x[n]$ d'une part, et $X_{e,N}(jf)$ et $X_e(jf)$ d'autre part, car le contexte permettra toujours de savoir si la longueur N de la suite considérée est finie ou non ; les 2 relations ci-dessus s'écriront alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (6.12)$$

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}] \quad (6.13)$$

6.1.4 Discrétisation de la fréquence (\Rightarrow TFD)

Afin de pouvoir calculer numériquement un spectre, il est évidemment nécessaire de discrétiser la fréquence. En divisant le domaine fréquentiel en N intervalles, l'incrément fréquentiel vaut $\Delta f = f_e/N$ et les fréquences analysées, au nombre de N , sont :

$$f = k \cdot \Delta f = k \cdot f_e/N \quad (6.14)$$

Cette discrétisation de la fréquence n'est rien d'autre qu'un échantillonnage dans le domaine spectral et les résultats des opérations d'échantillonnage et de multiplication vues plus haut pour l'espace temps s'appliquent également dans l'espace des fréquences (figure 6.2.f et 6.2.g) et conduisent à la propriété suivante :

à la discrétisation du domaine spectral correspond un signal temporel périodique.

Tout se passe comme si la durée d'acquisition T correspondait à une période du signal temporel $x[n]$. Le spectre considéré à présent est donc un spectre discret que l'on écrit $X[jk]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$. Tenant compte des relations temps-fréquence, l'argument du phaseur s'écrit

$$\pm j2\pi f n T_e = \pm j2\pi k \Delta f n T_e = \pm j2\pi k \frac{f_e}{N} n T_e = \pm j2\pi \frac{k n}{N} \quad (6.15)$$

Le spectre $X[jk]$ et le signal temporel $x[n]$ se calculent alors comme suit

$$X[jk] = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V sec}] \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (6.16)$$

$$x[n] = \frac{1}{N T_e} \sum_{k=0}^{N-1} X[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.17)$$

6.2 Relations temps-fréquence

Comme les domaines temporel et fréquentiel sont discrétisés avec le même nombre de points N , on peut relever que

1. l'**espace du temps** est caractérisé par la durée de l'enregistrement T et par l'incrément temporel Δt (qui n'est autre que la période d'échantillonnage T_e) tel que

$$\Delta t \equiv T_e = \frac{T}{N} \quad (6.18)$$

2. l'**espace des fréquences** est caractérisé par l'incrément fréquentiel Δf et la fréquence maximum f_{max} qui n'est autre que la fréquence d'échantillonnage f_e

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{f_e}{N} \quad (6.19)$$

Ces deux relations ayant en commun la période d'échantillonnage T_e et son inverse la fréquence d'échantillonnage, on a

$$\Delta t \equiv T_e \equiv \frac{1}{f_e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta f} \quad (6.20)$$

On en déduit donc trois relations importantes liant les domaines temporel et fréquentiel

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (6.21)$$

$$f_{max} \equiv f_e = \frac{1}{\Delta t} \equiv \frac{1}{T_e} \quad (6.22)$$

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (6.23)$$

De plus, on définit la fréquence de Nyquist f_N comme étant la limite du domaine d'analyse spectrale

$$f_N = \frac{f_e}{2} \quad (6.24)$$

Les relations que nous venons de voir peuvent se traduire par les propriétés suivantes.

1. *L'incrément fréquentiel Δf est l'inverse de la durée temporelle T .*
2. *La période spectrale $f_{max} = f_e$ est l'inverse de l'incrément temporel Δt .*
3. *Le domaine d'analyse spectrale est limité par la fréquence de Nyquist $f_e/2$.*
4. *Pour un nombre donné de points N , il n'est pas possible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et une très bonne définition fréquentielle (Δf petit).*

Une illustration des relations existant entre les domaines temporel et fréquentiel est donnée dans la figure 6.3.

6.2.1 Analyse spectrale avec Matlab

Dans la section suivante, on précisera ce qu'est la transformation de Fourier discrète ou FFT (Fast Fourier Transform). Mais par rapport à ce que nous venons de voir, il vaut la peine de montrer ici combien l'analyse spectrale d'un signal $x(t)$ est simple à faire. Dans Matlab, elle se réduit aux cinq lignes du paragraphe ci-dessous consacré au domaine fréquentiel. Le résultat graphique en est présenté à la figure 6.4.

```
% domaine temporel
Te = 0.1e-3 ;
tmin = -10e-3 ; tmax = 10e-3 ;
tn = tmin :Te :tmax - Te ;
T0 = 2e-3 ;
xn = 5*cos(2*pi*tn/T0 + pi/3) + 2*sin(6*pi*tn/T0 - pi/4) ;
```

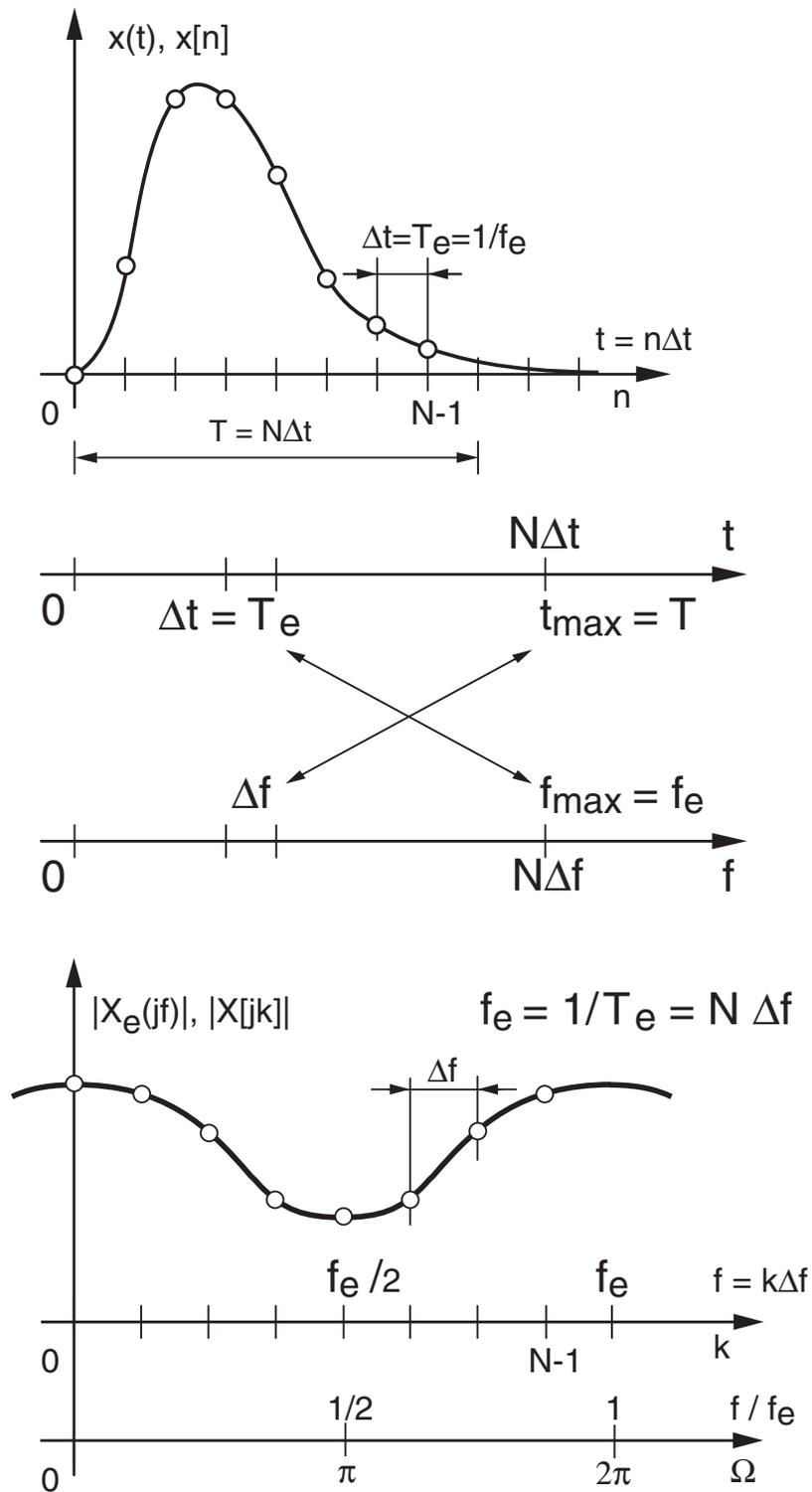


FIG. 6.3: Relations temps – fréquence

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
% domaine fréquentiel
fe = 1/Te;
duree = tmax - tmin;
df = 1/duree;
ff = 0 :df :fe-df;
Xjf = fft(xn) / length(xn);

% graphes
subplot(2,1,1);
plot(tn,xn);
xlabel('temps [sec]'); ylabel('x(t)');
subplot(2,1,2);
stem(ff, abs(Xjf));
xlabel('fréquence [Hz]'); ylabel('|X(jf)|');
```

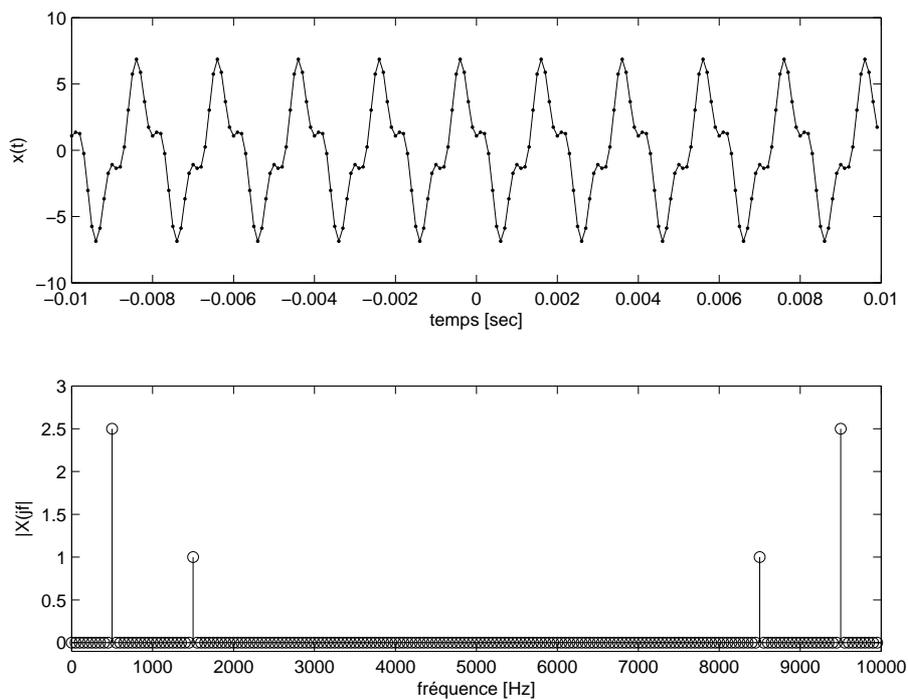


FIG. 6.4: Résultats d'une analyse spectrale simple

6.2.2 Pulsation normalisée

Dans ce qui précède, on a constamment vu apparaître un phaseur faisant intervenir l'argument $\pm j2\pi n f T_e$:

$$\exp(\pm j2\pi n f T_e)$$

Il est donc naturel de chercher à alléger l'écriture en définissant la pulsation numérique ou normalisée Ω qui s'exprime en radians (figure 6.3) :

$$\Omega \equiv 2\pi fT_e = 2\pi \frac{f}{f_e} \text{ [rad]} \quad (6.25)$$

Comme le spectre de base est compris entre $\pm f_e/2$, on voit que la pulsation normalisée prendra ses valeurs entre $\pm\pi$ et que les transformations de Fourier s'écrivent :

$$X_e(j\Omega) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [\text{V sec}] \quad (6.26)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_e(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad [\text{V}] \quad (6.27)$$

6.3 Transformation de Fourier discrète

6.3.1 Définition de la TFD

En observant les relations (6.16) et (6.17), on constate que, mis à part le changement de signe du phaseur et les coefficients précédant la somme, les calculs du spectre $X[jk]$ ou du signal $x[n]$ se font de la même manière. Ceci conduit à définir les algorithmes des transformations de Fourier discrètes directe ou inverse comme suit :

$$X_D[jk] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (6.28)$$

$$x_D[n] \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_D[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.29)$$

Comme ces deux définitions ne diffèrent que par le signe de l'exponentielle qui pondère les signaux $x[n]$ et $X_D[jk]$, on voit qu'un même algorithme peut être utilisé pour les transformations de Fourier directe et inverse. Alors les résultats de la TFD ainsi définie sont reliés aux spectres et signaux réels par les relations suivantes :

$$X[jk] = T_e \cdot X_D[jk] \quad (6.30)$$

$$x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.31)$$

La figure 6.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique où l'on a, d'un côté, des signaux et des spectres continus alors que de l'autre, on n'a que des valeurs numériques stockées en RAM.

6.3.2 TFD d'un signal périodique

Nous avons vu que le passage de la TF à la TFD peut modifier de manière sensible les résultats de l'analyse spectrale à cause de la troncation. Par contre, si le signal temporel $x(t)$ est périodique, on peut se trouver dans la situation idéale où les raies spectrales du signal $x_T(t)$ sont en parfaite coïncidence avec les raies analysées par la TFD. Pour remplir cette condition, il suffit d'enregistrer très exactement une ou plusieurs périodes du signal temporel.

En comparant les définitions de la décomposition en série de Fourier :

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt \quad [\text{V}] \quad (6.32)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{SF}[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kt}{T}\right) \quad [\text{V}] \quad (6.33)$$

avec celles de la TFD (équations 6.28 et 6.29), on voit alors apparaître les relations suivantes :

$$X_{SF}[jk] = \frac{X_D[jk]}{N} \quad (6.34)$$

$$x_T(t = nT_e) = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.35)$$

6.3.3 TFD et FFT

La découverte de la transformation rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey [3] a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier et il est généralement désigné par son appellation anglo-saxonne : FFT (Fast Fourier Transform).

Il est aisé de voir que le nombre d'opérations arithmétiques (sommations et produits) nécessitées par la TFD d'une suite de longueur N est proportionnel à N^2 . Ce qui, pour une suite de longueur 1000, conduit à calculer 1'000'000 de sinus et cosinus suivis d'une addition et d'une multiplication; les temps de calcul deviennent très vite prohibitifs..

L'algorithme de la FFT utilise le fait que l'opération de la TFD globale peut être décomposée en la TFD de séquences de plus en plus courtes. Il en découle alors que le nombre total d'opérations est bien inférieur à celui imposé par la simple application de l'algorithme de la TFD. En contrepartie, le nombre de points analysés N doit être une puissance de 2. Le nombre d'opérations demandées par le nouvel algorithme est alors fortement diminué et il vaut

$$N_{op} \simeq N \log_2(N) \quad (6.36)$$

6.4 Relations entre les domaines analogique et numérique

Ainsi, pour transformer 1024 points, le nouvel algorithme demande environ cent fois moins de temps que la TFD :

$$\frac{N^2}{N_{op}} = \frac{N}{\log_2(N)} = \frac{1024}{10} = 102.4$$

Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD. Différents algorithmes de FFT sont présentés dans le livre de Burrus et Parks [4].

6.4 Relations entre les domaines analogique et numérique

En conclusion et en résumé de ce que nous venons de voir dans le détail, la figure 6.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique. L'interface entre les domaines analogique et numérique est réalisée par un échantillonneur qui acquiert les signaux à un rythme fixé par la période d'échantillonnage $T_e \equiv 1/f_e$. On peut noter que, du côté analogique, on a des signaux et des spectres continus (ou discrets si $x(t)$ est périodique) reliés entre eux par la transformation de Fourier alors que du côté numérique, on n'a que des valeurs numériques $x[n]$ stockées en RAM sur lesquelles on travaille avec l'algorithme de la TFD ou de la FFT pour obtenir $X[jk]$ (figure 6.5).

Si on considère, comme on l'a vu dans la figure 6.2, que la partie enregistrée $x[n]$ du signal analogique $x(t = nT_e)$ représente une période du signal numérique, on voit alors que l'analyse spectrale numérique se ramène tout simplement à la série complexe $X_{SF}(jk)$ de Fourier et que la connaissance des relations suivantes suffisent pour l'analyse spectrale d'un signal analogique dont on a enregistré N valeurs à la fréquence $f_e = 1/T_e$:

$$X_D[jk] \equiv FFT(x[n]) \leftrightarrow x_D[n] = IFFT(X_D[jk]) \quad (6.37)$$

$$X_{SF}(jk) = \frac{X_D[jk]}{N} = \frac{FFT(x[n])}{N} \leftrightarrow x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (6.38)$$

$$f = 0, \dots, k \Delta f, \dots, f_e - \Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{f_e}{N} \quad (6.39)$$

6.4.1 Calcul et analyse d'une TFD

Afin d'illustrer l'usage de ces relations considérons la suite suivante $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ qui pourrait provenir, par exemple, de l'échantillonnage d'une rampe. Comme la période d'échantillonnage n'est pas donnée, on admet $T_e = 1$ sec. De cette donnée élémentaire, on en déduit immédiatement

$$N = 4, \quad \Delta f = \frac{1}{NT_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (6.40)$$

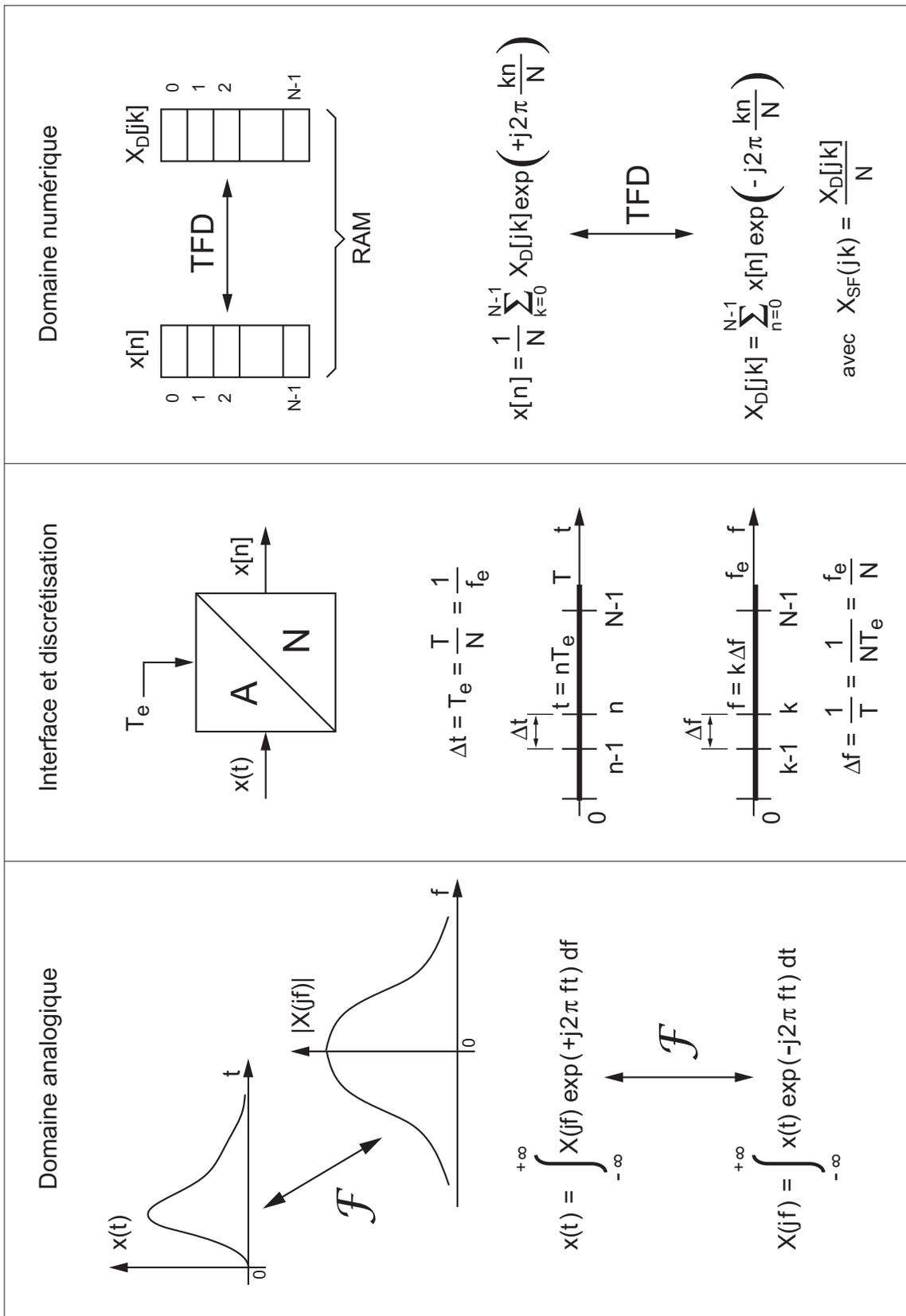


FIG. 6.5: Illustration des relations entre les domaines analogiques et numériques

6.4 Relations entre les domaines analogique et numérique

$$t_n = 0, 1, 2, 3 \text{ sec}, \quad f_k = 0, 0.25, 0.5, 0.75 \text{ Hz} \quad (6.41)$$

Il y a donc quatre échantillons temporels et quatre raies spectrales décrites par

$$X_D[jk] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{avec } k = 0, \dots, 3 \quad (6.42)$$

Avant de se lancer dans le calcul de $X_D[jk]$, il est intéressant de noter que

$$e^{-j2\pi kn/N} = (e^{-jk\pi/2})^n$$

On obtient ainsi

– pour $k = 0$, $e^{-jk\pi/2} = 1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$X_D[j0] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

– pour $k = 1$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j1] &= 0 \cdot e^{-0j\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (+j) = -2 + 2j \end{aligned}$$

– pour $k = 2$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi} = -1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j2] &= 0 \cdot e^{-0j\pi} + 1 \cdot e^{-1j\pi} + 2 \cdot e^{-2j\pi} + 3 \cdot e^{-3j\pi} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (+1) + 3 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

– pour $k = 3$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j3\pi/2} = +j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j3] &= 0 \cdot e^{-0j3\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j3\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j3\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j3\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (+j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-j) = -2 - 2j \end{aligned}$$

Par simple TFD (ou FFT) directe ou inverse, on bascule ainsi d'un domaine à l'autre et l'on a

$$x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{fft} \rightarrow X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{ifft} \rightarrow x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le passage de la TFD $X_D[jk]$ à la série de Fourier bilatérale $X_{SF}[jk]$ se fait en divisant le résultat de la TFD par le nombre de points de la suite $x[n]$ après avoir redistribué les composantes spectrales supérieures à $f_e/2$ entre $-f_e/2$ et 0. Cette redistribution se fait simplement avec la fonction `fftshift` :

$$X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{fftshift} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 - 2j \\ 6 \\ -2 + 2j \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{N} \rightarrow X_{SF}[jk] = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 - 0.5j \\ 1.5 \\ -0.5 + 0.5j \end{pmatrix}$$

On notera ici la situation particulière de la première composante qui n'a pas de composante symétrique (un conjugué complexe comme pour la deuxième composante).

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

k ou n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x[n]$?	?	?	?	?	0	1	2	3	?	?	?
$X_D[jk]$...	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$...
$X_{SF}[jk]$					$-0.5-0.5j$	1.5	$-0.5+0.5j$	-0.5				
A_k						1.5	$2/\sqrt{2}$	0.5				
α_k						0	$+3\pi/4$	$+\pi$				

TAB. 6.1: Résultats de l'analyse spectrale de la suite $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$

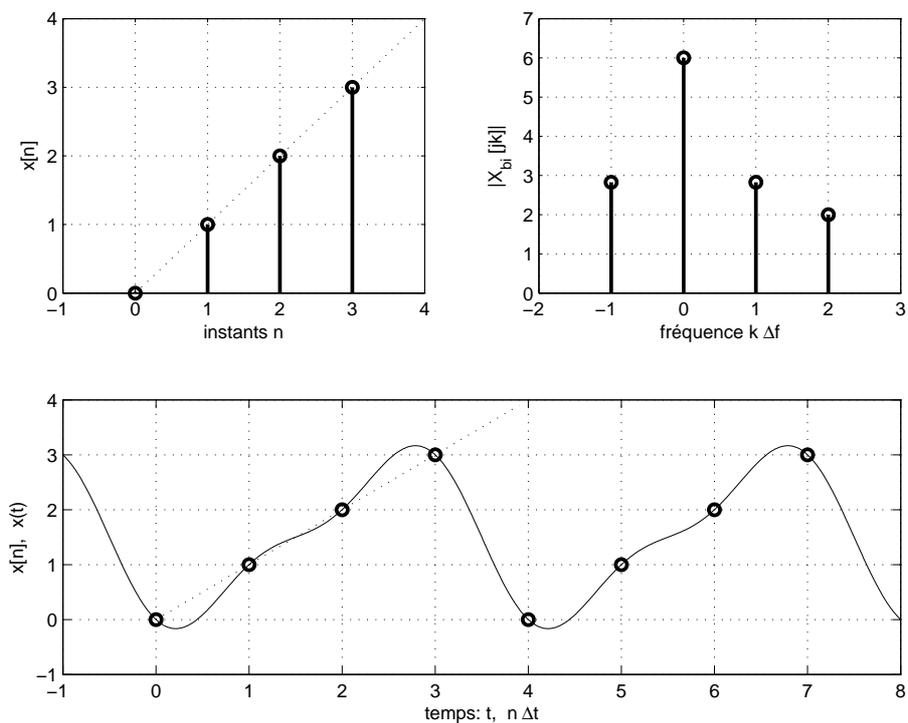


FIG. 6.6: Résultats d'une TFD

En effet, *lorsque N est pair*, cette composante se situe sur la fréquence de Nyquist $f_e/2$ et sa valeur sera toujours réelle comme la composante DC. Ce qui fait, que lors du passage à la description (A_k, α_k) , les composantes DC et de Nyquist ne doivent pas être multipliées par le facteur 2.

Les valeurs intéressantes sont réunies dans le tableau 6.1; les cases vides sont non significatives. Les points d'interrogation rappellent qu'après échantillonnage, on ne sait rien du signal original hormis les valeurs ainsi obtenues. Connaissant les (A_k, α_k) , on peut alors calculer le signal continu qui, au sens de Fourier, passe par les points échantillonnés

$$x(t) = 1.5 + \sqrt{2} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right) + 0.5 \cos(4\pi f_0 t + \pi), \quad f_0 = \frac{1}{NT_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (6.43)$$

Dans la figure 6.6, on peut observer les points échantillonnés (graphe a) et le spectre bilatéral correspondant (graphe b). En revenant au domaine temporel, il est important de se souvenir que, vu par l'algorithme TFD, le signal $x[n]$ est considéré périodique comme le montre également la reconstruction au sens de Fourier du signal $x(t)$ (graphe c).

6.5 Spectre d'une sinusoïde

Il est important de bien comprendre que, dans toute analyse numérique des signaux, on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal et que cette durée finie peut conduire à des effets indésirables lors de l'analyse.

On a vu que la FFT travaille sur un bloc complet d'échantillons considéré comme périodique. Cela ne pose aucun problème dans le cas d'un signal transitoire si celui-ci a le temps de revenir à 0 avant la fin de l'enregistrement. Par contre, dans le cas de signaux permanents, les choses peuvent se compliquer sensiblement. Pour le voir, considérons deux situations pouvant apparaître lors de l'enregistrement d'un signal périodique tel qu'une sinusoïde.

6.5.1 Le nombre de périodes enregistrées est un entier

La figure 6.7a illustre un enregistrement de durée 10 ms contenant *exactement* 10 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, coïncide avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et aucune modification de l'information n'est introduite.

Le résultat de l'analyse FFT pour cette situation confirme ce que l'on attend, à savoir que son spectre est constitué d'une raie spectrale bien définie et située en 1 kHz. Les deux raies supplémentaires que l'on peut observer en 3 et 5 kHz sont dues aux distorsions du signal sinusoïdal fourni par le générateur.

6.5.2 Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier

Dans ce cas, la FFT analyse un signal qui possède une transition brusque au raccordement du début et de la fin de l'enregistrement. Cette transition possède un contenu spectral hautes-fréquences qui peut masquer une partie du spectre réel.

La figure 6.7b montre un enregistrement contenant 10.25 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, ne coïncide pas avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et son spectre s'étale dans tout le domaine spectral. Cette dispersion de la puissance du signal dans tout le domaine fréquentiel porte le nom d'*étalement spectral*.

Il est important de réaliser que le phénomène d'étalement spectral est dû à la non-coïncidence des valeurs initiale et finale de la durée enregistrée. Dans le cas de la figure 6.7b, ces effets de bords sont tels qu'ils masquent complètement les composantes spectrales d'ordre 3 et 5 du signal.

Pour éviter ces effets de bords, il faut s'attacher à enregistrer exactement un nombre entier de périodes du signal et, dans le cas où cela n'est pas possible, il faut ramener les deux bords à une valeur identique à l'aide d'une fenêtre qui modifie aussi peu que possible le spectre réel.

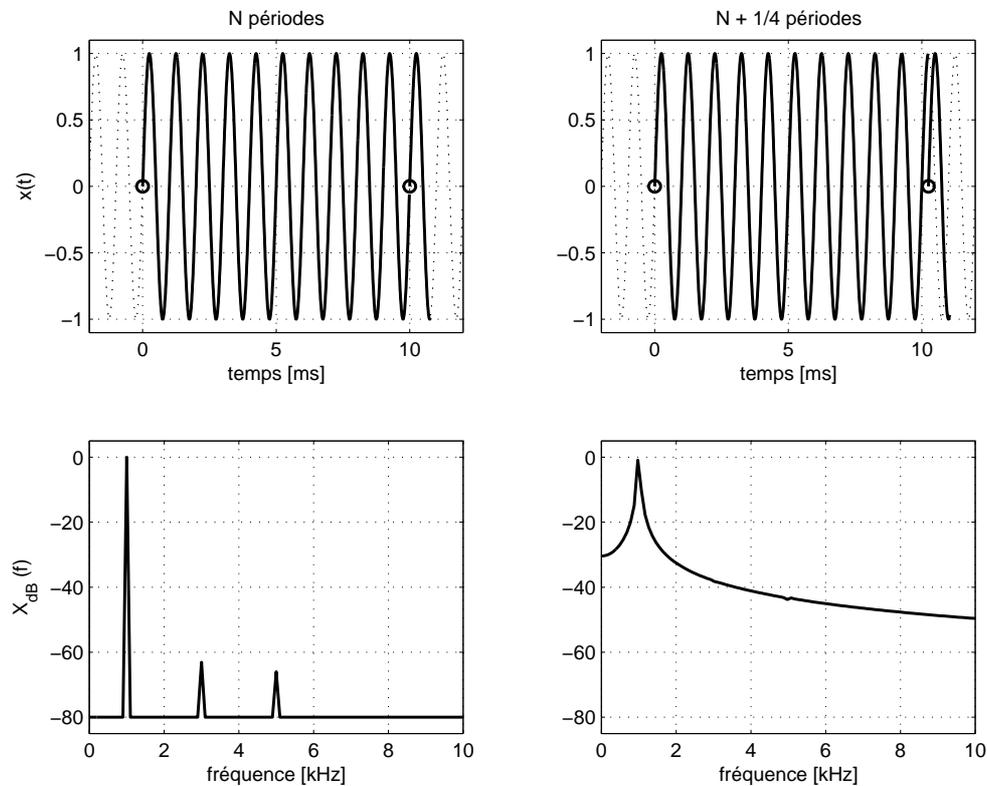


FIG. 6.7: Signal sinusoïdal et son spectre

6.6 Fenêtres d'observation

6.6.1 Quatre fenêtres usuelles

Les fenêtres utilisées en analyse spectrale sont nombreuses et elles ont été étudiées extensivement par F.J. Harris [2]. On se contente ici de mentionner quatre fenêtres fréquemment appliquées à l'enregistrement d'un signal. Elles sont définies comme suit :

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = 1 \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (6.44)$$

Fenêtre de Hann

$$w_c[n] = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (6.45)$$

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = 0.54 - 0.46 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (6.46)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) + 0.08 \cos \left(4\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (6.47)$$

6.6.2 Effet d'une fenêtre

Pour bien saisir l'effet des fenêtres dans le domaine spectral, on considère ici les deux situations présentées plus haut auxquelles on appliquera les fenêtres de Hann, de Hamming et de Blackman (figure 6.9).

Le nombre de périodes enregistrées est un entier Dans ce cas idéal (figure 6.9a), on peut relever quelques différences spectrales légères.

1. Les raies spectrales du signal original sont également présentes quelle que soit la fenêtre choisie.
2. Grâce au maintien d'une légère discontinuité temporelle, la fenêtre de Hamming offre les raies spectrales les plus étroites.
3. La fenêtre de Blackman qui est la plus étroite temporellement, fournit, comme attendu, des raies spectrales plus larges.

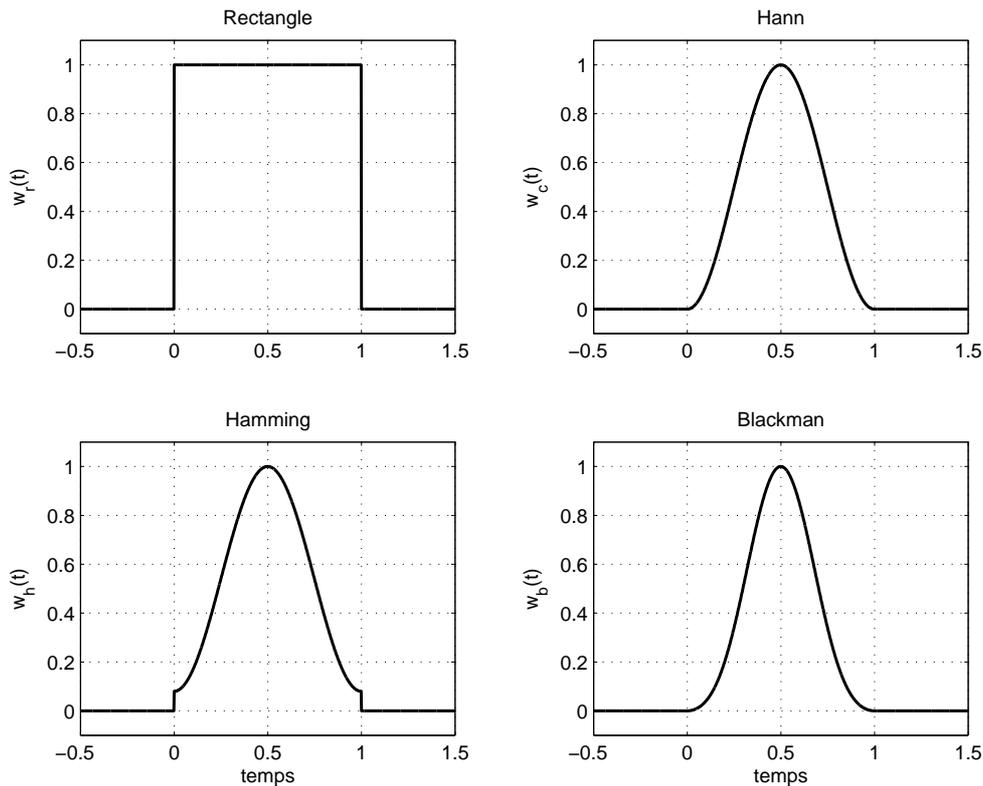


FIG. 6.8: Fenêtres d'observation

Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier Dans la figure 6.9b, on a repris l'enregistrement contenant 10.25 périodes. Les résultats spectraux obtenus montrent à l'évidence l'effet de ces 3 fenêtres :

1. la fenêtre de Hann fournit un spectre tout à fait satisfaisant sans diminuer fortement l'étalement spectral ; c'est pourquoi le spectre est un peu large à la base ;
2. la fenêtre de Hamming fournit un spectre étroit mais, à cause de l'effet de bord résiduel, l'étalement spectral n'est pas suffisamment réduit et il masque les deux autres composantes spectrales ;
3. la fenêtre de Blackman donne le meilleur résultat grâce à la double cosinusoïde qui masque bien les effets de bord ; les raies spectrales sont alors étroites et bien définies.

6.6.3 Choix d'une fenêtre

Le choix d'une fenêtre est un compromis entre une bonne définition spectrale (spectre étroit) et un étalement spectral aussi faible que possible (douceur de la fenêtre). Qualitativement, leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit.

1. La *fenêtre rectangulaire* ne modifie pas l'enregistrement ; c'est celle que l'on utilisera dans le cas de **signaux transitoires ou non permanents** et, dans le cas de signaux périodiques, lorsque l'on est sûr que le nombre de périodes enregistrées est un entier.

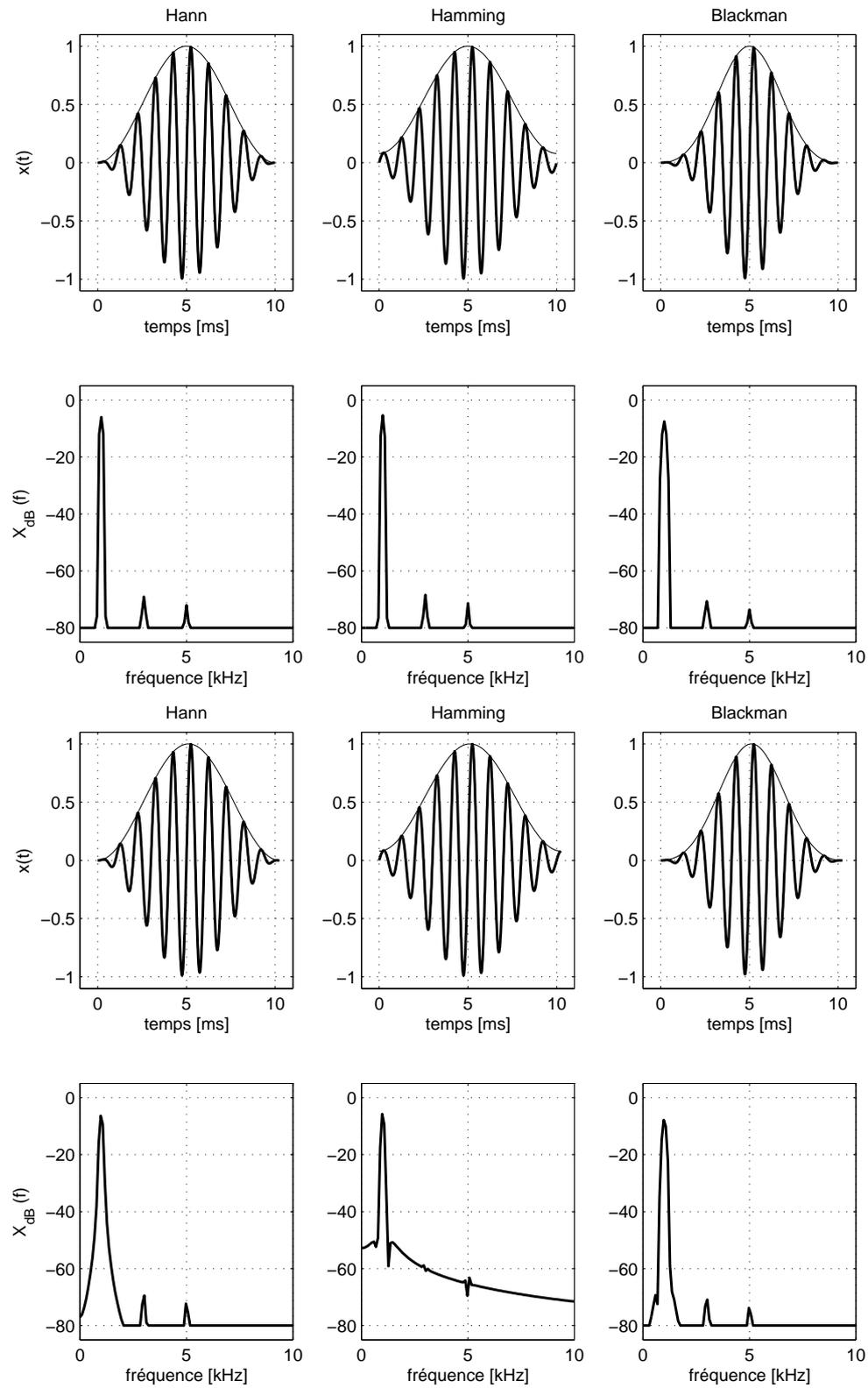


FIG. 6.9: Effet des fenêtres d'observation avec : (a) 10 périodes entières ; (b) 10.25 périodes

2. La *fenêtre en cosinus*, dite de Hann, est mathématiquement la plus simple et elle offre de bons résultats dans le cas de **composantes spectrales pas trop proches**.
3. La *fenêtre en cosinus relevé*, dite de Hamming, n'élimine pas complètement l'étalement spectral. Elle offre en contre partie une **meilleure définition spectrale** mais ne permet pas de voir des composantes spectrales de faibles amplitudes.
4. La *fenêtre de Blackman*, constituée de deux cosinus, atténue très fortement les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des **raies spectrales proches et de faibles amplitudes**.

6.6.4 Fenêtrage et traitement d'images

Tout ce qui vient d'être dit pour des signaux temporels est bien entendu valable pour des signaux bidimensionnels tels que des images. Et, en plus, visuellement parlant, les artefacts apparaissent de manière évidente. Comme illustration, considérons une image composée de grains de riz (figure 6.10).

En effectuant une FFT bidimensionnelle sur cette image, on voit apparaître une ligne claire verticale indiquant un contenu spectral fort selon l'axe Oy alors qu'aucune discontinuité ne semble apparaître dans l'image originale. En effectuant la même opération après un fenêtrage en cosinus, la ligne verticale a disparu. D'où cela peut-il bien provenir ?

En observant attentivement la figure originale, il semble que la partie inférieure de l'image soit légèrement plus sombre que le haut. Pour s'en assurer, formons, comme le voit la fonction FFT, une image constituée de deux périodes selon Ox et Oy (figure 6.11). Cette juxtaposition, équivalente à celle que voit la FFT, montre à l'évidence une variation brusque d'intensité selon l'axe Oy , cause de la ligne verticale dans l'espace de Fourier, alors qu'il n'y en a pratiquement pas selon l'axe Ox . De plus, en observant bien l'image de Fourier, on peut noter que la définition spectrale s'est améliorée grâce au fenêtrage

[Réf : <http://blogs.mathworks.com/steve/2009/12/04/fourier-transform-visualization-using-windowing/>]

6.7 Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

Données On considère ici un signal temporel fortement bruité ($\text{SNR} \simeq 0$ dB) qui semble contenir une oscillation périodique dont on souhaite connaître la teneur (figure 6.12).

Analyse temporelle De l'enregistrement, on tire

1. la composante DC du signal et sa valeur efficace AC

$$X_{dc} = 0.045 \quad X_{ac} = 1.42$$

6.7 Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

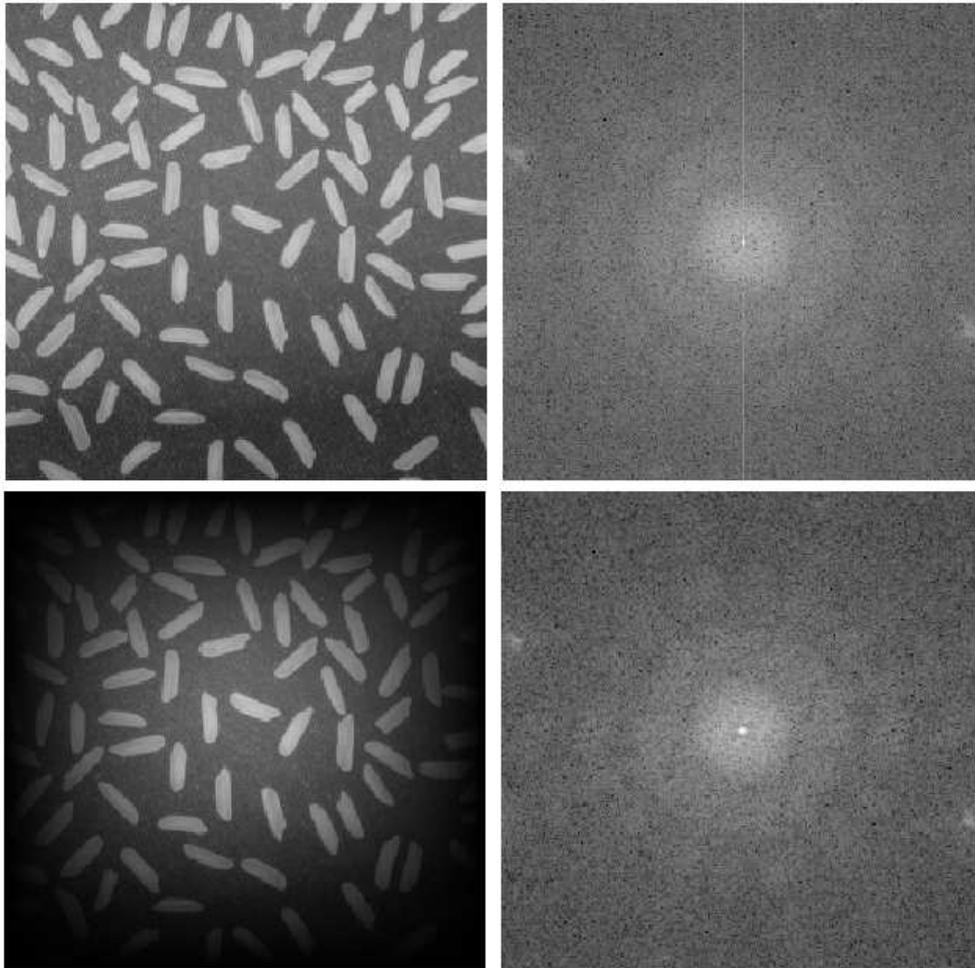


FIG. 6.10: Deux images (colonne de gauche) et leur transformée de Fourier respective (colonne de droite) ; a) sans fenêtrage, b) avec fenêtrage

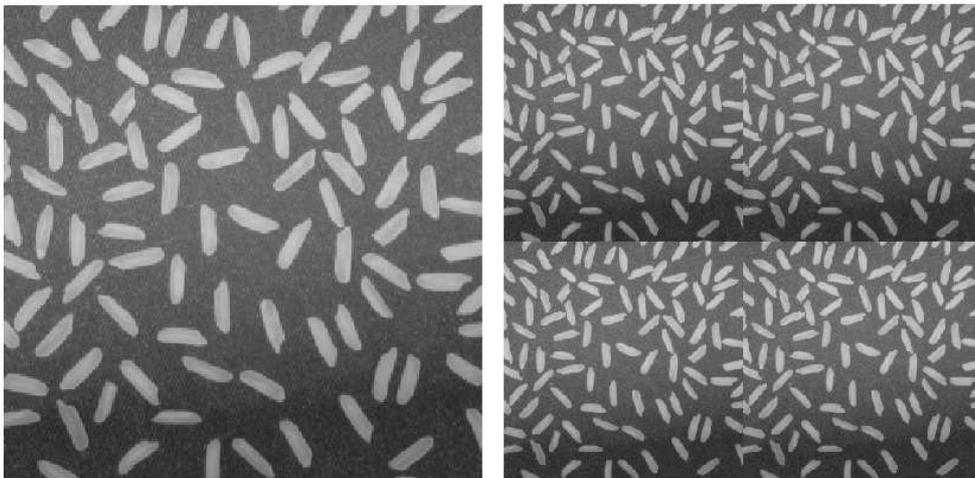


FIG. 6.11: Une image et sa réplique selon Ox et Oy

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

2. la période d'échantillonnage T_e et sa durée T

$$T_e = 20 \mu s \quad T = 20 \text{ ms}$$

3. le domaine d'analyse spectrale f_N et la définition spectrale Δf

$$f_N = \frac{1}{2} f_e = \frac{1}{2T_e} = 25 \text{ kHz} \quad \Delta f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

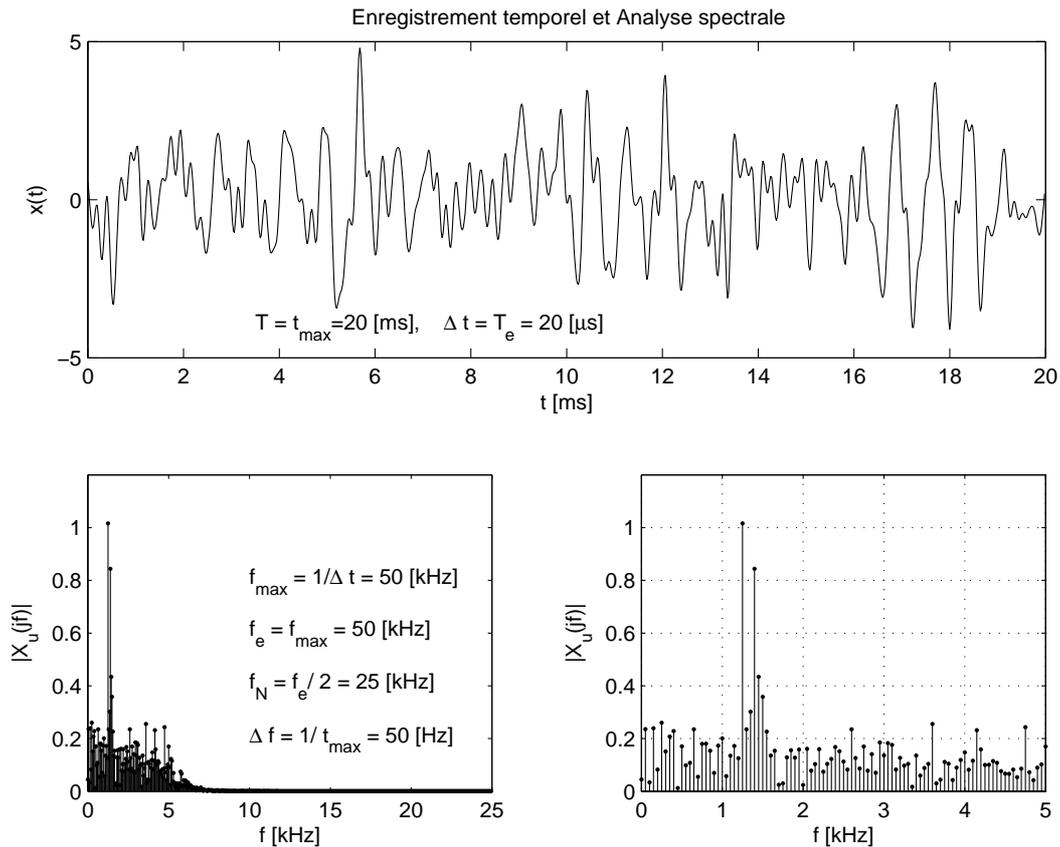


FIG. 6.12: Illustration de l'analyse spectrale avec :

- l'enregistrement temporel ;
- son spectre d'amplitudes pour $0 \leq f \leq f_e/2 = 25 \text{ kHz}$;
- un zoom spectral entre 0 et 5 kHz

Analyse spectrale Le programme des calculs temporels et spectraux se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```
% lecture de l'enregistrement
enreg = load('enreg.txt');
tt = enreg(:,1);
xt = enreg(:,2);
Xdc = mean(xt)
Xac = std(xt)
```

```

% analyse temporelle
Npts = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1);
duree = Npts * dt;

% analyse spectrale
df = 1/duree, fmax = 1/dt;
ff = 0 :df :fmax-df;
Xjf = fft(xt)/Npts;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(Npts/2);
fk = ff(1 :Ndemi);
Ak = 2*abs(Xjf(1 :Ndemi));
Ak(1) = abs(Xjf(1)); % composante DC
ak = angle(Xjf(1 :Ndemi));
subplot(2,1,1); stem(f,Ak,'.');

% estimation du rapport signal/bruit (SNR)
Px = Xdc^2 + Xac^2; % puissance du signal + bruit = 2.023
A1 = 1.02; A2 = 0.85; % amplitudes mesurées
Px0 = (A1^2 + A2^2)/2; % puissance du signal original = 0.88
Pn = Px - Px0; % puissance du bruit = 1.14
SNR = 10*log10(Px0/Pn) % SNR = -1.12 dB

```

Les spectres d'amplitudes, présentés dans la figure 6.12, montrent que deux raies spectrales s'élèvent clairement au-dessus du niveau de bruit situé aux environs de 0.3. Ces deux raies spectrales ont une amplitude et une fréquence valant respectivement

$$A_1 \simeq 1.02 \quad f_1 = 1.25 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

$$A_2 \simeq 0.85 \quad f_2 = 1.40 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

La précision des fréquences mesurées est égale à la moitié de la définition spectrale Δf .

6.8 Exemple 2 : reconstruction d'un signal

Données Afin d'analyser et illustrer les résultats fournis par la TFD, on considère ici un signal connu

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \pi/4)$$

constitué de trois sinusoïdes d'amplitudes

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -0.8 \quad A_3 = 0.5$$

et de fréquences harmoniques

$$f_1 = 50 \text{ Hz} \quad f_2 = 150 \text{ Hz} \quad f_3 = 250 \text{ Hz}$$

Ce signal original est perturbé par un bruit important car le SNR ne vaut que +5 dB. Avec cet exemple, on souhaite :

1. montrer que, malgré la présence d'un fort bruit, il est possible de retrouver le signal original (tout au moins partiellement) ;
2. attirer l'attention sur le fait que d'une raie spectrale peuvent naître deux raies spectrales proches si l'incrément fréquentiel n'est pas un diviseur exact des fréquences présentes.

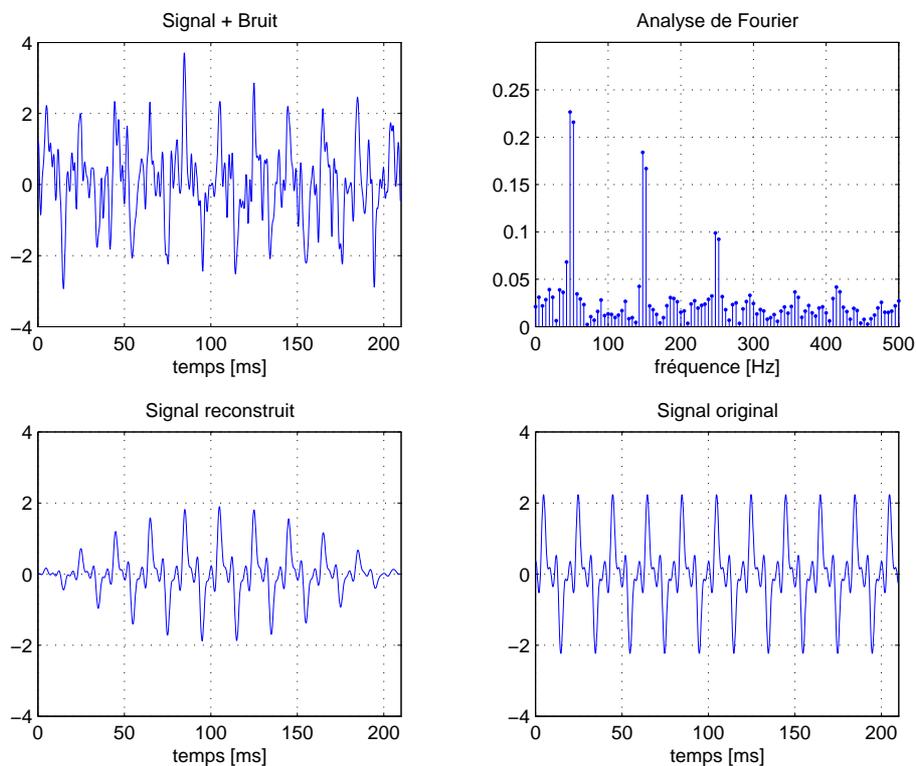


FIG. 6.13: Analyse spectrale et extraction des signaux

Analyse temporelle Le signal bruité a été enregistré avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.2 \text{ ms}$ et il a une durée $T = 210 \text{ ms}$ (figure 6.13a). Ceci permet de prévoir que le domaine des fréquences est caractérisé par :

– la fréquence de Nyquist

$$f_N = \frac{f_e}{2} = 2500 \text{ Hz}$$

– la définition spectrale

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{210 \text{ ms}} = 4.76 \text{ Hz}$$

On notera que la durée enregistrée $T = 210$ ms conduit à une définition spectrale $\Delta f = 4.76$ Hz qui n'est pas un sous-multiple des composantes spectrales. Cela fait que l'on sera dans l'impossibilité de trouver la valeur exacte des fréquences originales. Idéalement, on aurait dû prendre une durée de 200 ms permettant ainsi d'avoir une définition spectrale de 5 Hz. On pourrait bien entendu réduire la durée de l'enregistrement à 200 ms, mais ce n'est pas le but recherché.

Analyse spectrale L'observation du spectre obtenu après fenêtrage (figure 6.13b) montre que les trois raies spectrales sont bien visibles. Mais, on doit cependant constater que ces raies se sont dédoublées à cause de la définition spectrale non-entière et de l'utilisation de la fenêtre d'observation.

Le programme donné ci-dessous permet de rechercher ces raies spectrales. Les fréquences mesurées à ± 2.4 Hz près sont

$$\begin{aligned} f_{11} &= 47.6 \text{ Hz} & f_{12} &= 52.4 \text{ Hz} \\ f_{21} &= 147.6 \text{ Hz} & f_{22} &= 152.4 \text{ Hz} \\ f_{31} &= 247.6 \text{ Hz} & f_{32} &= 252.4 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Leurs amplitudes et phases respectives valent

$$\begin{array}{llll} A_{11} = 0.453 & A_{12} = 0.432 & \alpha_{11} = -0.151 \text{ rad} & \alpha_{12} = +2.98 \text{ rad} \\ A_{21} = 0.368 & A_{22} = 0.334 & \alpha_{21} = -2.87 \text{ rad} & \alpha_{22} = -0.275 \text{ rad} \\ A_{31} = 0.198 & A_{32} = 0.185 & \alpha_{31} = +0.372 \text{ rad} & \alpha_{32} = -2.65 \text{ rad} \end{array}$$

avec

$$A_k = 2 |X(jk)| \quad \alpha_k = \angle X(jk)$$

Reconstruction du signal original Connaissant les amplitudes et phases des composantes spectrales, il est aisé de reconstruire le signal non bruité :

$$x_r(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \alpha_k)$$

Malgré l'effet de la fenêtre d'observation utilisée avant d'effectuer la FFT et le fait qu'il y ait six fréquences au lieu de trois, le signal ainsi extrait (figure 6.13c) reproduit assez bien l'allure du signal original (figure 6.13d).

Programme d'analyse et recherche des composantes spectrales Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```
% signal bruité
yt = xt+nt;
Npts = length(yt);
```

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
% analyse spectrale avec une fenêtre de Hann
yht = yt'.*hann(Npts);
Yjf = fft(yht)/Npts;
df = 1/tmax; fmax = 1/dt;
ff = 0 :df :fmax-df;

% recherche de N raies spectrales
Nraies = 6;
Yjf_tempo = Yjf(1 :end/2);
for kn = 1 :Nraies
    [Ymax, kf(kn)] = max(abs(Yjf_tempo));
    Yjf_tempo(kf(kn)) = 0; % mise à zéro de la valeur trouvée
end;

% reconstruction
xtr = zeros(size(yt));
for kn = 1 :Nraies
    Xrjf = Yjf(kf(kn)); fr = ff(kf(kn));
    xtr = xtr + Xrjf*exp(+j*2*pi*fr*tt) + conj(Xrjf)*exp(-j*2*pi*fr*tt);
end;

% valeurs des composantes spectrales
fr = ff(kf)';
Ar = 2*abs(Yjf(kf))
ar = angle(Yjf(kf))
```

6.9 Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

6.9.1 Données

On considère ici un signal permanent observé à l'oscilloscope. À partir de l'observation visuelle du signal, on désire choisir les paramètres d'acquisition qui permettront ensuite d'extraire toutes les informations possibles. L'acquisition se fera avec un convertisseur analogique-numérique 8 bits, ± 2 V.

6.9.2 Signal temporel

Le signal $x(t)$ observé à l'oscilloscope (figure 6.14a) apparaît comme une sinusoïde caractérisée par son amplitude $A \simeq 1.7$ V et sa période $T_0 \simeq 3.68$ msec. Cependant, une observation de plus longue durée (figure 6.14b) montre un phénomène de battement de période $T_b \simeq 0.45$ sec ou de fréquence

$$f_b = \frac{1}{T_b} \simeq 2.2 \text{ Hz}$$

6.9 Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

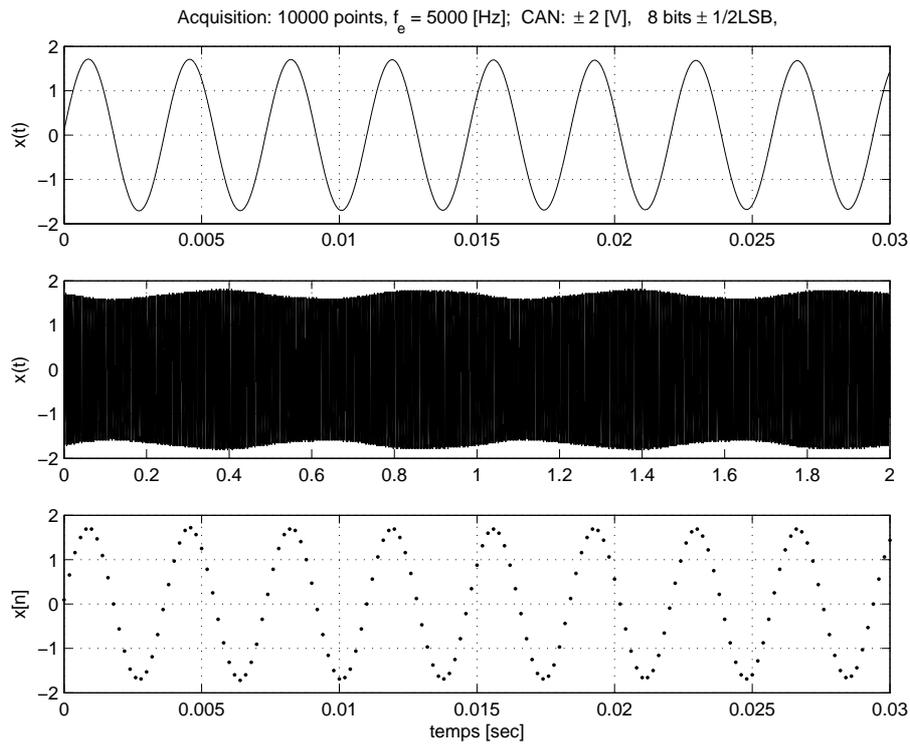


FIG. 6.14: Signal analysé

On en déduit que ce signal est composé d'au moins deux sinusoïdes de fréquences très proches

$$f_1 \simeq \frac{1}{T_0} \simeq 272 \text{ Hz} \quad f_2 = f_1 \pm f_b \simeq 270 \text{ ou } 274 \text{ Hz}$$

et d'amplitudes fort différentes car la variation d'amplitude de $x(t)$ est faible.

6.9.3 Paramètres d'acquisition

Afin d'avoir une définition temporelle raisonnable, on choisit

$$\Delta t \equiv T_e \simeq \frac{T_0}{10} = 0.35 \text{ msec} \simeq 0.2 \text{ msec}$$

et on en déduit la fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} = 5 \text{ kHz}$$

La figure 6.14c présente une partie du signal numérique ainsi acquis.

Comme il faut pouvoir distinguer deux raies distantes de $f_b \simeq 2$ Hz, on choisira une définition spectrale suffisamment fine

$$\Delta f \simeq \frac{f_b}{4} = 0.5 \text{ Hz}$$

Sachant que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à la durée d'acquisition, on en tire

$$t_{acq} = \frac{1}{\Delta f} = 2 \text{ sec}$$

Le nombre de points acquis vaudra donc

$$N_{pts} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} = \frac{1}{0.5 \text{ Hz} \cdot 0.2 \text{ ms}} = 10'000$$

L'ensemble des valeurs acquises est représenté à la figure 6.14b.

6.9.4 Analyse spectrale

Utilisation de la FFT On a vu plus haut que l'algorithme FFT exige un nombre de points égal à une puissance de 2. Lorsque cela n'est pas le cas, on complète la suite de valeurs acquises par une succession de zéros permettant d'atteindre un nombre de valeurs égal à la puissance de 2 la plus proche (figure 6.15a).

Du point de vue de l'analyse de Fourier, cela ne change rien aux résultats fournis ; seule la résolution spectrale est améliorée. Dans notre cas, on passera donc de $N_{pts} = 10'000$ à $N_{fft} = 16'384$ et la résolution fréquentielle passera ainsi de

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{5000}{10'000} = 0.5 \text{ Hz}$$

à

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{fft}} = \frac{5000}{16'384} = 0.305 \text{ Hz}$$

Fenêtre rectangulaire Dans ce cas, l'analyse spectrale de la suite de valeurs acquises $x[n]$ fournit les spectres présentés dans les figures 6.15b et 6.17a. Le spectre ainsi obtenu fait apparaître une seule raie spectrale aux environs de 270 Hz et, contrairement à ce que l'on attendait, il n'y a pas de deuxième raie spectrale. Manifestement, celle-ci est masquée par l'étalement spectral dû au nombre non entier de périodes.

Fenêtre de Blackman On est donc amené à fenêtrer le signal acquis en le multipliant par une fonction atténuant les effets de bord dus à l'acquisition effectuée. On choisit ici d'utiliser la fenêtre de Blackman définie comme suit :

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N_{pts}$$

Du point de vue numérique, on analysera donc le signal

$$x_w[n] = x[n] \cdot w_b[n]$$

Après avoir complété le signal fenêtré par des zéros pour atteindre une puissance de 2 (figure 6.16a), on obtient les résultats présentés dans les figures 6.16b et 6.17b où le niveau de bruit causé par l'étalement spectral a pratiquement disparu.

6.9 Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

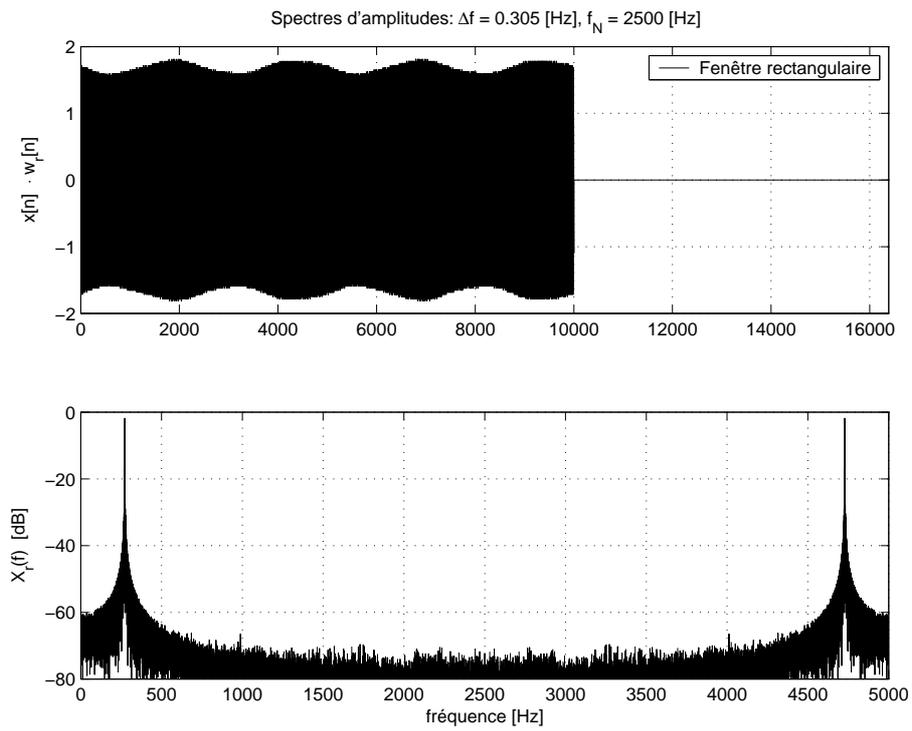


FIG. 6.15: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre rectangulaire

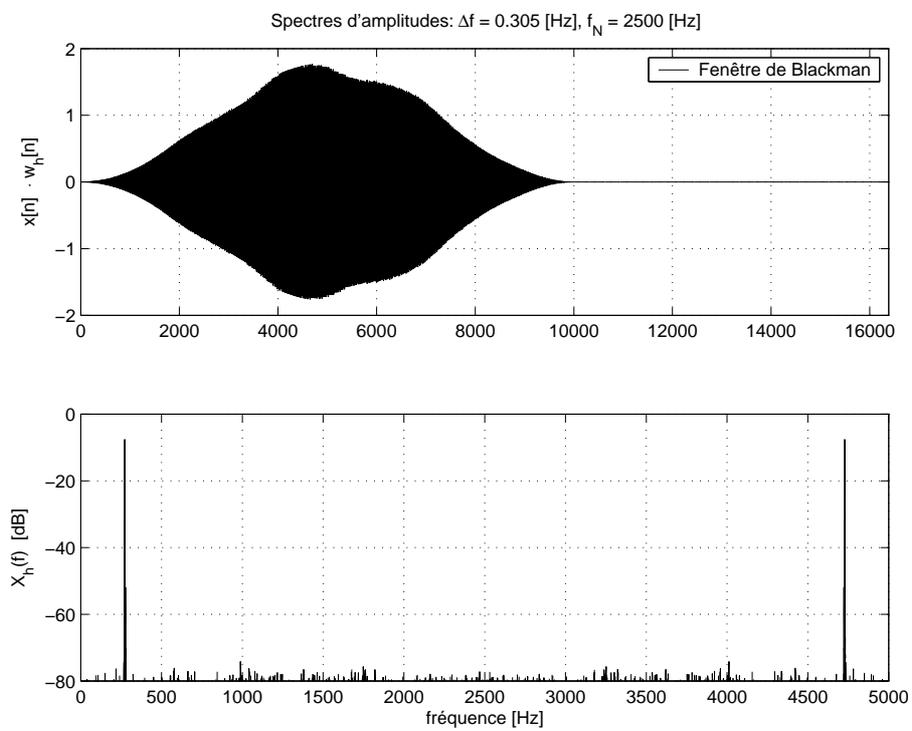


FIG. 6.16: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre de Blackman

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

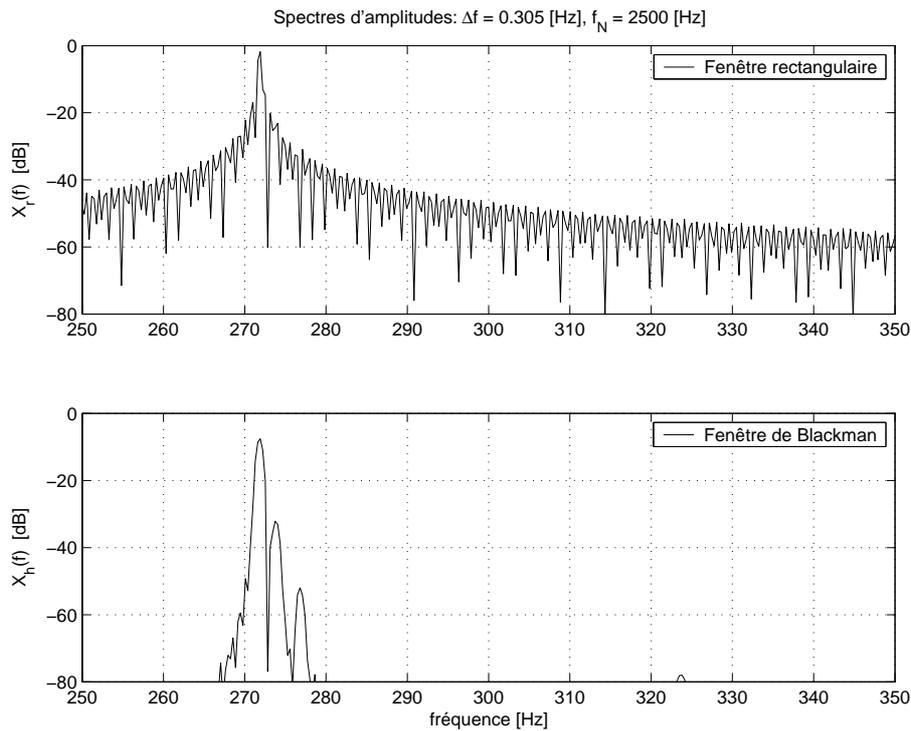


FIG. 6.17: Agrandissement spectral

Zoom fréquentiel Étant donné la haute définition spectrale, obtenue au prix d'un long enregistrement, les échelles globales ne permettent pas de voir le détail des raies attendues. Il faut donc zoomer sur la zone intéressante. On voit alors très nettement que la fenêtre rectangulaire (figure 6.17a) est totalement incapable de fournir les informations attendues alors qu'avec la fenêtre de Blackman (figure 6.17b), on retrouve bien la deuxième fréquence recherchée et on peut même apercevoir la présence d'une troisième composante spectrale d'amplitude encore plus faible, qui n'était absolument pas perceptible au niveau temporel.

6.9.5 Estimation des amplitudes

Le spectre d'amplitudes de la figure 6.17b permet de mesurer les fréquences des trois composantes spectrales du signal $x(t)$ et les amplitudes relatives des raies spectrales.

k	f_k	$X_{k,dB}$	$X_{k,dB} - X_{1,dB}$	X_k/X_1
1	272 Hz	-7.6	0	1
2	274 Hz	-32.2	-24.6	0.059
3	277 Hz	-52	-44.4	0.006

Il est important de noter que les amplitudes spectrales dépendent de la fenêtre choisie et que seules leurs valeurs relatives peuvent en être déduites

$$\frac{X_k}{X_1} = 10^{(X_{k,dB} - X_{1,dB})/20}$$

Pour obtenir la valeur réelle des amplitudes, on peut passer par l'égalité de Parseval :

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T x_{ac}^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} \left(1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \right)$$

Ce qui donne dans notre cas

$$P_{ac} = \frac{A_1^2}{2} (1 + 0.059^2 + 0.006^2) = 1.00352 \frac{A_1^2}{2}$$

À partir du signal acquis, on calcule aisément sa puissance :

$$P_{ac} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \mu_x)^2 = \text{var}(x[n]) = 1.45$$

On en déduit alors la valeur de A_1 et celles des autres composantes :

$$A_1 = \sqrt{\frac{2 P_{ac}}{1.00352}} = 1.70$$

$$A_2 = 0.059 A_1 = 0.1$$

$$A_3 = 0.006 A_1 = 0.01$$

Remarque Une correction des amplitudes spectrales tenant compte de la fenêtre utilisée n'est possible que *si le signal acquis possède exactement un nombre entier de périodes*. Si cette condition est remplie, il suffit alors de diviser les amplitudes spectrales par la valeur moyenne de la fenêtre : $A_k \rightarrow A_k/\mu(w)$. Ce calcul doit être évité si l'on n'est pas sûr que la condition est remplie.

6.9.6 Détail du calcul des signaux et des spectres

Le fichier créé pour générer le signal $x(t)$, calculer et tracer les spectres dans différentes conditions est donné ci-dessous. Bien qu'il puisse paraître volumineux au premier abord (beaucoup de lignes sont consacrées au traçage uniquement), les parties essentielles de ce fichier sont simplement :

1. la conversion analogique- numérique $\pm 2V$ avec $N_{bits} \pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité (on admet que celle-ci entraîne la perte d'un bit) :
 - `Ucan = 4; Nbits = 8;`
 - `xn = Ucan*round((xn0/Ucan)*(2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1));`
2. le fenêtrage :
 - `wk = (blackman(length(xn)))';`
 - `xnwk = xn.*wk;`
3. l'ajout de zéros et le calcul du spectre :
 - `Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)));`
 - `xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xn))];`
 - `Xjfh = fft(xnwk)/length(xnwk);`

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Initialisation Le programme débute par l'initialisation des paramètres et la création du signal vu sur l'écran de l'oscilloscope

```
% analyse spectrale
clear all; close all; format compact; clc;

% parametres du signal
amp1 = 1.7; amp2 = 0.1; amp3 = 0.01;
f1 = 271.828; f2 = f1+2; f3 = f1+5;
% oscilloscope
tosc = 0.03; kosc = 2000;
dt = tosc/kosc;
tt = 0 :dt :tosc-dt;
xt0 = amp1*sin(2*pi*tt*f1)+amp2*cos(2*pi*tt*f2)+amp3*sin(2*pi*tt*f3);
```

Acquisition numérique Il se poursuit avec l'acquisition et la conversion sur une durée plus longue

```
% acquisition
tacq = 2;
Te = 0.2e-3;
tn = 0 :Te :tacq-Te;
xn0 = amp1*sin(2*pi*tn*f1)+amp2*cos(2*pi*tn*f2)+amp3*sin(2*pi*tn*f3);
% conversion +/- 2V avec Nbits et +/- 1/2LSB de non linearite
Ucan = 4; Nbits = 8;
xn = Ucan*round(xn0/Ucan*2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1);
```

Calcul des spectres Une fois les signaux acquis, on peut calculer leurs spectres et afficher des informations

```
% calcul des spectres
Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)))
% fenetres rectangulaire et de Blackman
wr = ones(size(xn));
wk = (blackman(length(xn)))';
xnwr = xn.*wr;
xnwk = xn.*wk;
% ajout de zeros
xnwr = [xnwr, zeros(1,Nfft-length(xnwr))];
xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xnwk))];
% fft
Xjfr = fft(xnwr)/length(xn);
Xjfh = fft(xnwk)/length(xn);
% domaine spectral
fmax = 1/Te;
df = fmax/Nfft;
ff = 0 :df :fmax-df;
% infos
```

```

Nbits, tacq, Te, fmax, df
Pac = var(xn)
Npoints = round(tacq/Te), Nfft

```

Graphes On trace les signaux acquis

```

% graphes temporels
figure;
subplot(3,1,1);
plot(tt,xt0); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
texte = ['Acquisition : ', num2str(round(tacq/Te)), ' points,'];
texte = [texte, ' f_e = ', num2str(1/Te,4), ' [Hz];'];
texte = [texte, ' CAN : \pm ', num2str(Ucan/2,2), ' [V], '];
texte = [texte, ' ', num2str(Nbits,2), ' bits \pm 1/2LSB,'];
title(texte);
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2)
plot(tn,xn); grid;
axis([0,tacq,-2,2])
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,3); % zoom
plot(tn,xn,'.'); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
ylabel('x[n]');
xlabel('temps [sec]');
print -deps ansptemps.eps

```

ainsi que les spectres après fenêtrage

```

% spectres
figure; % fenetre rectangulaire
subplot(2,1,1);
plot(xnwr); grid;
axis([0,Nfft,-2,2])
texte = ['Spectres d'amplitudes : \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_r[n]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_r(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwr.eps
figure; % fenetre de Blackman
subplot(2,1,1);
plot(xnwk); grid;

```

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
axis([0,Nfft,-2,2])
texte = ['Spectres d'amplitudes : \Delta f = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
title(texte);
ylabel('x[n] \cdot w_h[n]');
legend('Fenêtre de Blackman');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh))); grid;
axis([0,fmax,-80,0]);
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwk.eps
```

Zoom Les détails sont mis en évidence

```
% zoom spectral
fz1 = 250; fz2 = 350; % domaine interessant
dbmax = 80;
figure;
subplot(2,1,1);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); hold on;
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
title(texte);
ylabel('X_r(f) [dB]');
legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh)));
axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
ylabel('X_h(f) [dB]');
xlabel('fréquence [Hz]');
legend('Fenêtre de Blackman');
print -deps anszoom.eps
```

6.10 Exercices

TFD 0

1. Montrez que le passage de l'analogique vers le numérique se fait bien avec les deux relations discrètes $X[jk]$ et $x[n]$ de la figure 6.5.
2. Considérant la suite de quatre valeurs $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$, calculez son spectre $X[jk]$. Dessinez la suite $x[n]$ et un signal analogique périodique $x(t)$ lui correspondant.
3. Calculez le signal périodique $x_F(t)$ correspondant à la suite $x[n]$ au sens de Fourier.

TFD 1

L'analyse spectrale, par la FFT, d'un signal $x[n]$ constitué de $N = 8$ valeurs a fourni le spectre discret $X_D[jk]$ partiellement donné dans le tableau ci-dessous.

1. Complétez le tableau sachant que $f_e = 1$ [kHz].
2. Vu par le processeur FFT, le signal temporel $x[n]$ est-il continu, discret, périodique ?
3. Que valent $x[n = 0]$ et X_{dc} ?
4. Quelle est l'expression permettant de calculer $x[n]$? Montrez quelle peut s'écrire sous la forme

$$x[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_D[jk] \exp\left(j \frac{k\pi}{4} n\right)$$

5. Calculez quelques valeurs de $x[n]$.

k ou n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k [kHz]											
$X_D[jk]$	2	$1 + j$	$1 - j$	$+j$	1						
$ X_D[jk] $ $\angle X_D[jk]$											
A_k α_k											
$x[n]$											

TFD 2 On souhaite calculer le spectre d'une impulsion rectangulaire de largeur $\Delta t = 3$ [msec] et d'amplitude $A = 5$ [V]. Pour ce faire, on acquiert 8 points à la fréquence $f_e = 1$ [kHz].

1. Admettant que l'échantillonnage commence à l'apparition du flanc montant, dessinez $x(t)$ et $x[n]$. Discutez les valeurs choisies pour $x[n]$ lorsque $n = 0$ et $n = 3$.

6 ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

2. Que vaut la durée d'acquisition t_{max} ?
3. Quel sera le domaine spectral analysé ; que vaudra l'incrément de fréquence Δf ?
4. Calculez $X_D[jk]$ pour $k = 0$ et $k = 2$; quel est le domaine de variation du compteur k des fréquences ?
5. Validez votre résultat en analysant la valeur de $X_D[jk = 0]$.

TFD 3 Considérant la suite de valeurs $x[n]$ ci-dessous :

n	-m	-m+1	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...	+m-1
$x[n]$	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0

1. Esquissez $x[n]$ et une fonction $x(t)$ passant par ces points.
2. Calculez $X_D[jk]$; sa valeur dépend-elle de la longueur $N = 2m$ de la suite ?
3. Qu'est ce qui change si on ajoute des zéros pour doubler le nombre d'échantillons ?

TFD 4 On considère un signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)$ de période $T_0 = 1$ ms. Sachant que ce signal est échantillonné pendant une période à la fréquence $f_e = 8 f_0$:

1. Calculez et dessinez la suite de valeurs $x[n]$.
2. Complétez le tableau ci-dessous avec $x[n]$ et le spectre bilatéral fourni par la décomposition en série de Fourier puis justifiez les résultats $X_D[jk]$ fournis par la la FFT en précisant la relation qui les lie.
3. On échantillonne le signal $x(t)$ sur 4 périodes ; que donnera la FFT ?

n ou k	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$x[n]$								
$X_{SF}[jk]$								
$X_D[jk]$	0	0	4	4	0	4	4	0

TFD 5 On échantillonne une exponentielle décroissante

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \epsilon(t) \text{ où } A = 5 \text{ [V]}, \tau = 5 \text{ [msec]}$$

avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ [msec]}$.

1. Que vaut la densité spectrale $X(jf)$ du signal $x(t)$?
2. Calculez la suite des valeurs $x[n]$; exprimez la sous la forme $x[n] = A \cdot r^n$.
3. Calculez la TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$.
4. On ne prend en compte que les 16 premières valeurs de la suite $x[n]$ et on annule les autres ; que vaut $X_{e,N}(jf)$.
5. Considérant la suite temporelle tronquée $x_N[n]$ avec $N = 16$, on discrétise l'axe des fréquences. Que vaut l'incrément fréquentiel ? Calculez le spectre discret $X_D[jk]$.
6. Que valent, pour chacun des spectres ci-dessus ($X(jf)$, $X_e(jf)$, $X_{e,N}(jf)$, $X_D[jk]$), les composantes spectrales lorsque $f = 0$?

AnSp 1 Lors de l'analyse spectrale d'un signal échantillonné $x[n]$, les paramètres N , T_e , t_{max} et f_e , Δf sont reliés entre eux ; la donnée de deux d'entre eux suffit pour fixer tous les paramètres de l'analyse. Rappelez ces relations puis complétez le tableau ci-dessous.

N	T_e	t_{max}	Δf	f_e
40				2 kHz
	1 msec		50 Hz	
50		10 msec		
100			10 Hz	
			20 Hz	1 kHz
	2 msec	1 sec		
30	1 msec			
		5 msec		5 kHz

AnSp 2 On doit faire l'analyse spectrale numérique des signaux suivants

1	une sinusoïde	5	une impulsion triangulaire
2	une réponse indicielle	6	un signal chirp (wobulé)
3	une impulsion rectangulaire	7	une exponentielle décroissante
4	une suite d'impulsions rectangulaires	8	un signal triangulaire périodique

Pour chacun des signaux :

1. Esquissez leur allure temporelle.
2. Choisissez-vous une fenêtre rectangulaire ou en cosinus ?
3. Précisez les raisons de votre choix.

AnSp 3 On considère ici le signal

$$x(t) = 3 + 4 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(4\pi f_0 t), \quad f_0 = 100 \text{ Hz}$$

représenté à la figure 6.18 dont on a enregistré deux périodes. Sachant qu'on souhaite obtenir numériquement son spectre $X[jk]$, on l'échantillonne avec une période $T_e = 1$ msec.

1. Dessinez les points échantillonnés $x[n]$. Quelle fenêtre faut-il utiliser avant l'analyse spectrale ?
2. Que valent N , t_{max} , f_e , Δf ?
3. Quelles raies spectrales seront présentes ? Quel sera le nombre de valeurs spectrales analysées ?
4. Donnez les fréquences, les amplitudes et les phases de chaque valeur spectrale $X[jk]$, $k = 0, \dots, N - 1$.
5. Quel serait le résultat de l'analyse spectrale si l'on avait échantillonné six périodes au lieu de deux ?

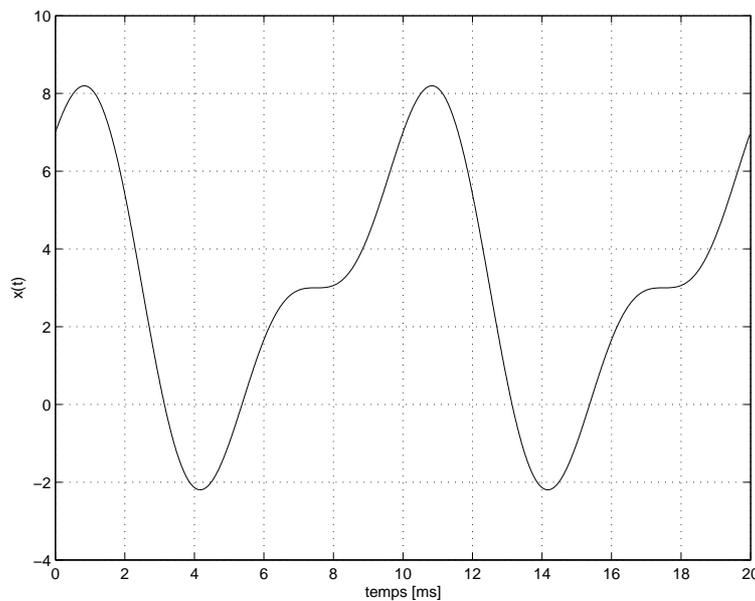


FIG. 6.18: Ex AnSp 3

AnSp 4 On considère le signal

$$x(t) = 1 + 5 \sin(2\pi f_a t) + 2 \sin(2\pi f_b t), \quad f_a = 1 \text{ [kHz]}, \quad f_b = 1.5 \text{ [kHz]}$$

1. Quelle est la période de ce signal ? Dessinez le spectre unilatéral de $x(t)$. Que valent X_{dc} et X_{ac} ?
2. Son enregistrement a été effectué avec une période d'échantillonnage de 125 μsec pendant exactement 10 msec.
 - a) Quel sera le domaine d'analyse spectrale et sa résolution.

- b) Pensez-vous devoir utiliser une fenêtre d'observation ? Si oui, laquelle choisissez-vous et pourquoi ?
 - c) Les raies spectrales fournies par la FFT seront-elles situées aux fréquences attendues ? Sinon, précisez la valeur de ces fréquences.
3. Idem 2), si l'enregistrement a duré exactement 11 msec.

Bibliographie

- [1] Randall R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1987
- [2] Frederic J. Harris : *On the use of windows for harmonic analysis with DFT*, Proceedings of IEEE, vol. 66, no.1, january 1978
- [3] Cooley J.W., Tukey J.W., “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965
- [4] Burrus C.S., Parks T.W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985
- [5] B.P. Lathy, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992