

7 Comparaison et description des signaux

Ce chapitre présente et analyse quelques signaux types avant de définir et illustrer l'utilisation des fonctions d'auto- et d'intercorrélation. Il se termine par une présentation succincte des signaux aléatoires.

7.1 Classification des signaux

Sans entrer dans les détails de la classification des signaux, il faut mentionner que plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, on en citera deux :

- la classification phénoménologique qui met l'accent sur le comportement temporel du signal ;
- la classification énergétique où l'on classe les signaux suivant qu'ils sont à énergie finie ou à puissance finie.

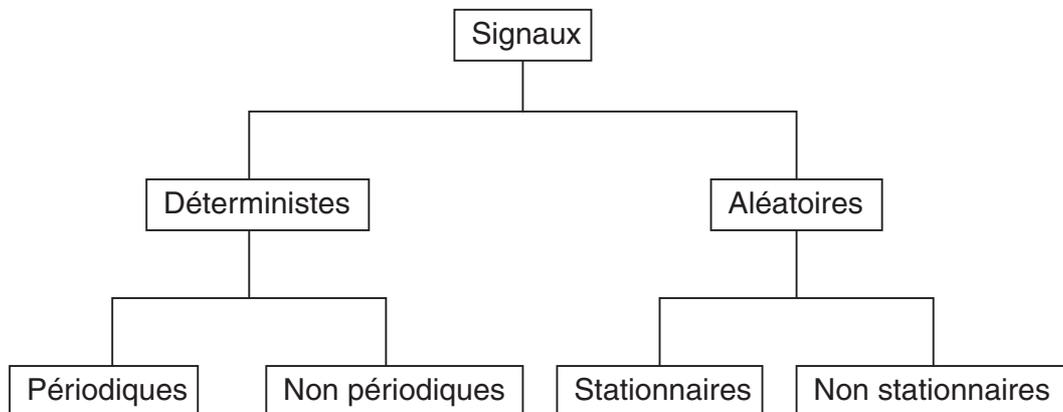


FIG. 7.1: Classification phénoménologique des signaux

7.1.1 Classification phénoménologique

Dans cette classification, on répartit généralement les signaux en deux classes principales et quatre sous-classes illustrées par la figure 7.1.

Dans les deux classes principales, on trouve :

- les signaux déterministes dont l'évolution temporelle parfaitement définie peut être prédite par un modèle mathématique approprié ;

– les signaux aléatoires qui ont un comportement temporel imprévisible et dont la description ne peut se faire qu’au travers d’observations statistiques.

Parmi les *signaux déterministes* (figure 7.2.1), on distingue :

- les signaux périodiques dont la forme se répète régulièrement ;
- les signaux pseudo-aléatoires qui sont des signaux périodiques mais avec, à l’intérieur de la période, un comportement aléatoire ;
- les signaux quasi-périodiques qui résultent d’une somme de sinusoides dont le rapport des périodes n’est pas rationnel ;
- les signaux non-périodiques ; ils sont essentiellement représentés par des signaux transitoires dont l’existence est éphémère.

Parmi les *signaux aléatoires* (figure 7.2.2), on distingue :

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (p.ex : le bruit électronique) ;
- les signaux non-stationnaires dont le contenu statistique évolue au cours du temps (p.ex. : la parole).

7.1.2 Énergie et puissance des signaux

Considérant la puissance moyenne P_x ou l’énergie totale W_x des signaux, on observe que ceux-ci peuvent alors être classés dans une des deux catégories suivantes :

1. Les signaux à énergie finie tels que

$$W_x < \infty \text{ alors que } P_x = 0$$

Dans cette catégorie, on rencontre tous les signaux temporaires qu’ils soient déterministes ou aléatoires.

2. Les signaux à puissance finie tels que

$$P_x < \infty \text{ alors que } W_x \rightarrow \infty$$

Cette catégorie englobe les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux permanents aléatoires ou non.

Suivant les caractéristiques des signaux, on calculera donc soit leur puissance P_x , soit leur énergie W_x . Selon Parseval, ce calcul peut, bien entendu, se faire dans le domaine temporel

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.1)$$

$$W_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (7.2)$$

ou dans celui des fréquences :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2] \quad (7.3)$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (7.4)$$

à condition d’avoir à sa disposition

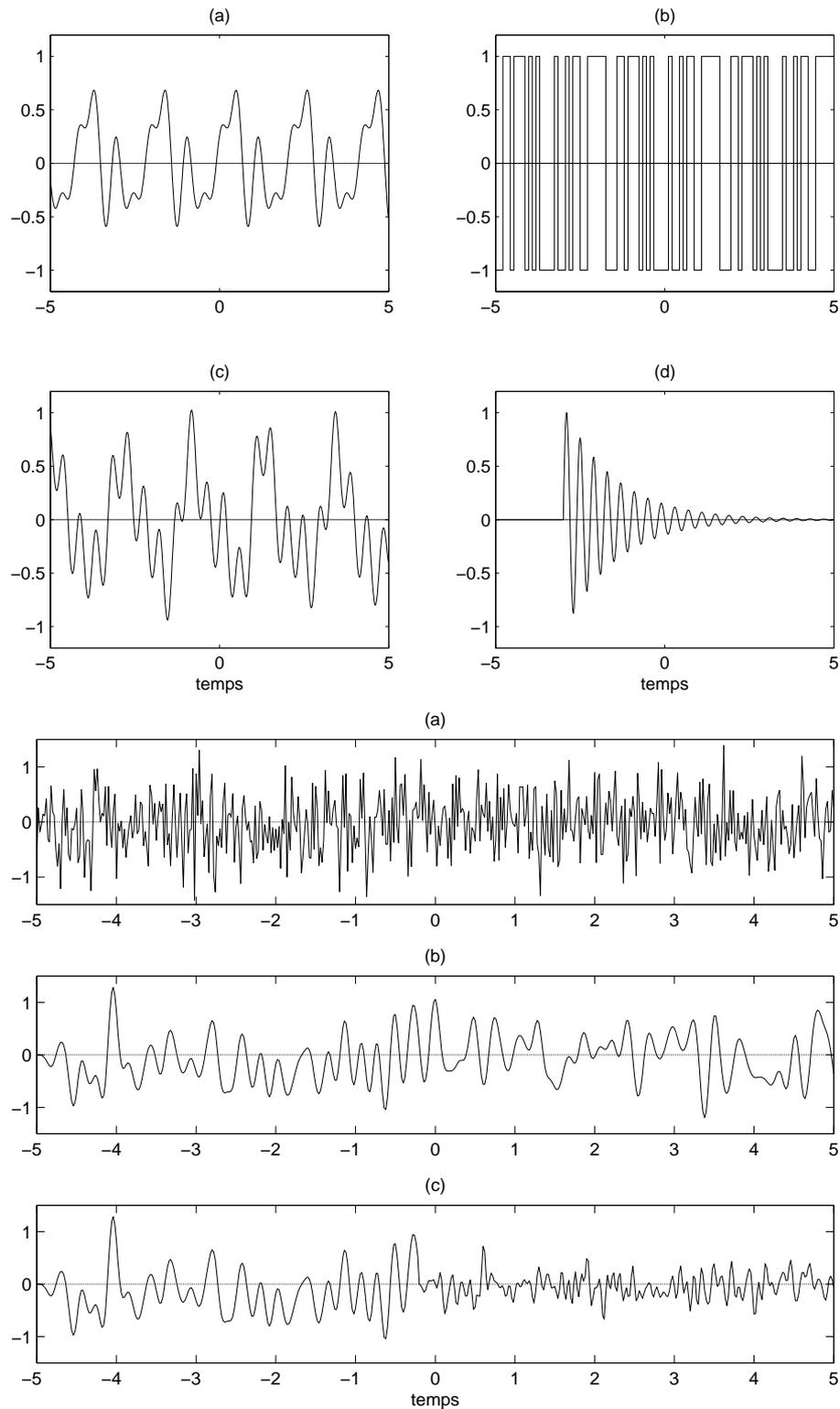


FIG. 7.2: 1) Quatre signaux déterministes : (a) périodique, (b) pseudo-aléatoire, (c) quasi-périodique, (d) non-permanent.
 2) Trois signaux aléatoires : (a) bruit blanc (spectre infiniment large et constant), (b) bruit large bande (spectre de largeur finie), (c) bruit non-stationnaire.

- la densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ qui s'exprime en $[\text{V}^2/\text{Hz}]$
- ou
- la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ dont les unités sont $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$.

On notera que, pour le calcul de la puissance des signaux périodiques, la durée d'intégration T sera prise égale à une période T_0 du signal. On se souviendra également que la puissance moyenne P_x d'un signal $x(t)$ est, par définition, égale au carré de sa valeur efficace

$$P_x \equiv X_{eff}^2$$

Enfin, il faut relever que certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune des deux catégories présentées ci-dessus. C'est le cas, par exemple, de l'exponentielle $x(t) = e^{-at} \quad -\infty < t < \infty$.

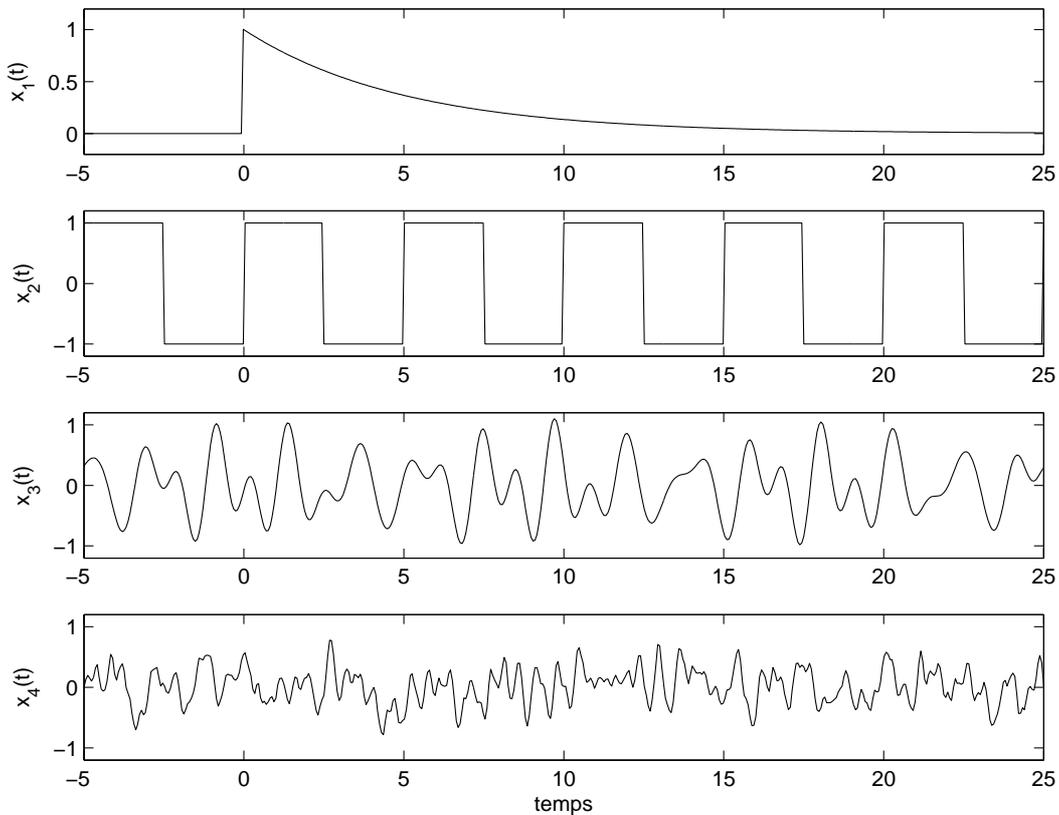


FIG. 7.3: Quatre signaux types : (a) déterministe temporaire, (b) déterministe permanent périodique, (c) quasi-périodique permanent, (d) aléatoire à bande étroite

7.2 Quatre signaux types

Afin de clarifier les choses, considérons comme exemple des signaux-types (figure 7.3) illustrant les quatre classes de signaux :

1. **Déterministes temporaires** tels que l'exponentielle amortie $x_1(t)$ ou les signaux périodiques de durée finie.

2. **Permanents et périodiques** tels que le signal carré $x_2(t)$.
3. **Permanents quasi-périodiques** tels que le signal $x_3(t)$ constitué de quatre composantes spectrales non rationnelles.
4. **Aléatoires stationnaires permanents** tels que $x_4(t)$ pour lequel il n'existe pas de description temporelle.

7.2.1 Signaux déterministes temporaires

Les signaux déterministes temporaires tels que $x_1(t)$ sont des signaux à puissance moyenne nulle mais énergie finie. Ils possèdent un spectre continu défini par leur densité spectrale d'amplitude. Celle-ci n'est autre que la transformée de Fourier du signal :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] = [\text{V/Hz}] \quad (7.5)$$

Leur énergie se calcule soit au niveau temporel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{sec}]$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.6)$$

à partir de la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ exprimée en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$. Dans le cas des signaux temporaires, on peut montrer que la densité spectrale d'énergie est liée à la densité spectrale d'amplitude par la relation

$$S_x(f) = X(jf) \cdot X(jf)^* = |X(jf)|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.7)$$

Exemple L'exponentielle décroissante $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = 0$$

$$W_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = \frac{A^2}{2a} = \frac{A^2 \tau}{2} < \infty \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.8)$$

Cette énergie peut également se calculer dans le domaine fréquentiel. En effet, comme au signal $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ correspond la densité spectrale d'amplitude

$$X_1(jf) = \frac{A}{a + j2\pi f} \quad (7.9)$$

on peut calculer sa densité spectrale d'énergie $S_1(f)$:

$$S_1(f) = |X_1(jf)|^2 = \left| \frac{A}{a + j2\pi f} \right|^2 = \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.10)$$

puis son énergie

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} df \quad (7.11)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi a} \operatorname{atg} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A^2}{2a} \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (7.12)$$

7.2.2 Signaux permanents périodiques

Un signal déterministe permanent est un signal périodique dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] \quad (7.13)$$

Pour tous signaux périodiques, on obtient alors une densité spectrale d'amplitude constituée d'impulsions de Dirac. Ces impulsions correspondent aux raies spectrales du signal périodique qui, comme on le sait, possède un spectre discret.

Plutôt que de travailler avec les impulsions de Dirac, il est alors plus simple et plus pratique d'en rester à la description bien connue des séries de Fourier

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad [\text{V}] \quad (7.14)$$

La puissance des signaux périodiques se calcule soit au niveau temporel

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.15)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad [\text{V}^2] \quad (7.16)$$

Exemple Le signal carré $x_2(t)$ d'amplitude A possède une puissance finie et une énergie infinie :

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt = A^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (7.17)$$

$$W_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt \rightarrow \infty$$

Dans le domaine fréquentiel, partant des composantes de Fourier du signal carré périodique d'amplitude A et à valeur moyenne nulle

$$X(jk) = 2A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(\pi k f_0 \Delta t)}{\pi k f_0 \Delta t} = A \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2A}{k\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (7.18)$$

on peut calculer, sa densité spectrale de puissance $R_2(f)$

$$R_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left| \frac{2A}{k\pi} \delta(f - kf_0) \right|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.19)$$

Partant de celle-ci, il vient

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(f) df = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left(\frac{2A}{k\pi} \right)^2 = A^2 \quad [\text{V}_{eff}^2] \quad (7.20)$$

7.2.3 Signaux permanents aléatoires

Un signal permanent est un signal dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Parmi ceux-ci, on trouve essentiellement les signaux aléatoires tels que $x_4(t)$ et, plus rarement, les signaux quasi-périodiques comme le signal $x_3(t)$ qui est constitué de quatre sinusoïdes dont les fréquences ne sont pas dans un rapport rationnel.

Ces signaux n'ayant pas de transformée de Fourier, car leur intégrale en valeur absolue est infinie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \rightarrow \infty \quad (7.21)$$

on devra tenter de trouver une modélisation spectrale par une approche différente. C'est ce que l'on verra à la section 7.7.

Par contre, si l'on est en possession d'une suite de valeurs enregistrées de durée finie $T = N \Delta t$, on peut calculer la puissance et le spectre d'amplitudes $X(jf)$ de cette suite $x[n] = x(t = n \Delta t)$:

$$P_x \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad [\text{V}^2] \quad (7.22)$$

$$X(jf) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n \Delta t) \quad [\text{V}] \quad (7.23)$$

7.3 Comparaison des signaux

La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission, le GPS (Global Positioning System), etc.

Dans chaque cas, on dispose de deux fonctions : le signal de référence $x(t)$ et le signal à analyser $y(t)$. Il faut alors trouver une opération mathématique permettant de comparer ces signaux et d'en mesurer la ressemblance ou la corrélation. Ceci se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.24)$$

On obtient alors une opération mathématique qui, de par sa forme, est très proche de la convolution. Cependant, contrairement à la convolution qui permet de calculer le signal de sortie d'un filtre linéaire, la corrélation sert à mesurer le degré de ressemblance de deux signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée.

Deux illustrations en sont données dans les figures 7.4 et 7.5. Dans la première, on compare deux signaux dont la superposition (maximum de ressemblance) apparaît après un décalage temporel égal à 0.8. Dans la deuxième, on compare un signal chirp (signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement avec le temps) avec sa version décalée. On y voit que la corrélation d'un tel signal avec sa version décalée possède un maximum très bien défini à l'endroit correspondant exactement au décalage des deux signaux.

7.3.1 Corrélation de signaux à énergie finie

Intercorrélation de deux signaux

Considérant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, on définit la fonction d'*intercorrélacion* (fic) comme l'intégrale du produit du signal $x(t)$ avec le signal $y(t)$ décalé d'une valeur τ :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.25)$$

Par changement de variable $\theta = t + \tau$, on montre que

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = r_{yx}(-\tau) \quad (7.26)$$

On voit ainsi que la fonction $r_{xy}(\tau)$ est aussi la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonnée Oy .

Comme on peut le constater, les fonctions d'intercorrélacion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = r_{xy}(\tau)$$

7.3 Comparaison des signaux

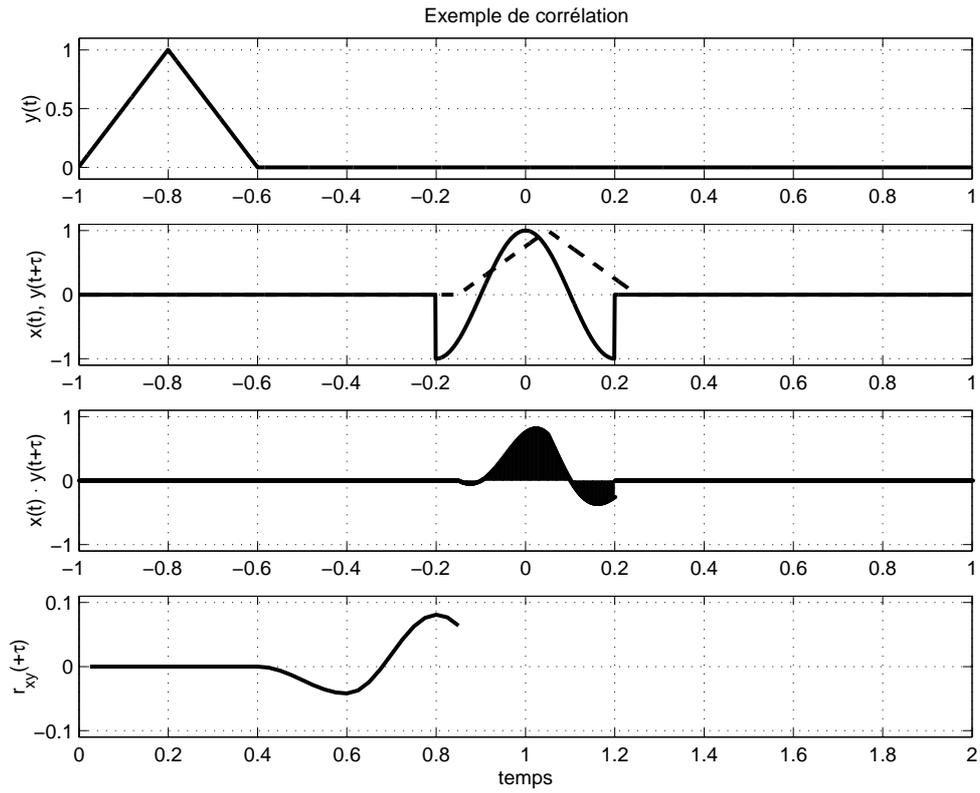


FIG. 7.4: Intercorrélation de deux signaux

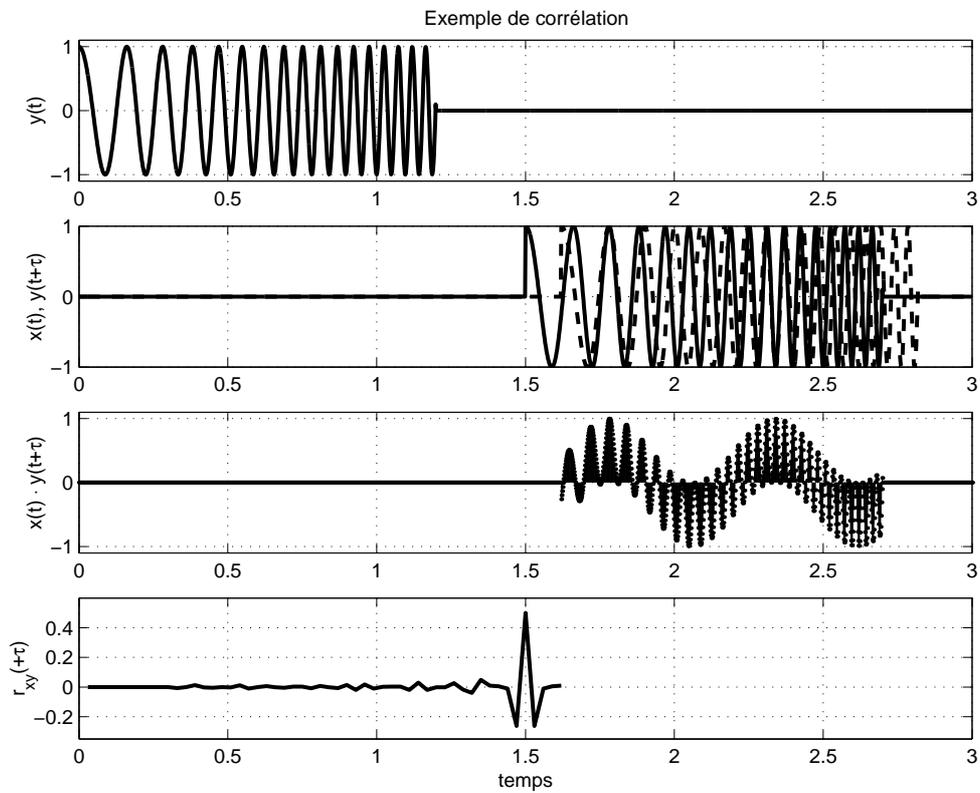


FIG. 7.5: Autocorrélation d'un signal chirp

et de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta = x(t) \otimes y(t)$$

sont formellement très proches. On montre qu'elles sont reliées entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau) \quad (7.27)$$

Cette relation valable dans l'espace temps a bien entendu son équivalent dans l'espace des fréquences :

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) Y(jf) \quad (7.28)$$

Autocorrélation d'un signal

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, on obtient la fonction d'*autocorrélation* (fac) du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt \quad (7.29)$$

qui, pour un décalage nul, donne l'énergie du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (7.30)$$

7.3.2 Corrélation de signaux à puissance finie

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande ; on ne peut donc pas utiliser les définitions précédentes. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit les deux fonctions de corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y(t + \tau) dt \quad (7.31)$$

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad (7.32)$$

Dans le cas d'un décalage nul, on trouve la puissance du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv X_{eff}^2 = P_x \quad (7.33)$$

Il est d'autre part évident que si les signaux sont périodiques, l'intégration se fera sur une période seulement.

La figure 7.6 montre des fonctions d'autocorrélation représentatives de quelques signaux aléatoires. On y trouve successivement trois signaux dont les puissances sont les mêmes, à savoir $0.2 [V_{eff}^2]$:

- *un bruit blanc gaussien* : son caractère non prévisible est manifeste et il est confirmé par l'étroitesse du pic de la fac.
- *un bruit à large bande* : ce signal a été obtenu en filtrant passe-bas le bruit blanc. Son contenu spectral moins étendu fait qu'il est raisonnablement possible de prévoir une valeur future pas trop éloignée. Une mesure de cet horizon de prévision est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de la fac.
- *un bruit à bande étroite* : ce signal a été obtenu en filtrant le bruit blanc à l'aide d'un filtre passe-bande. Son contenu fréquentiel étroit se manifeste par un comportement oscillant de manière assez régulière. Cette pseudo-périodicité est encore plus facile à déterminer à l'aide de sa fac : elle se mesure par la distance séparant le pic central du premier pic latéral.

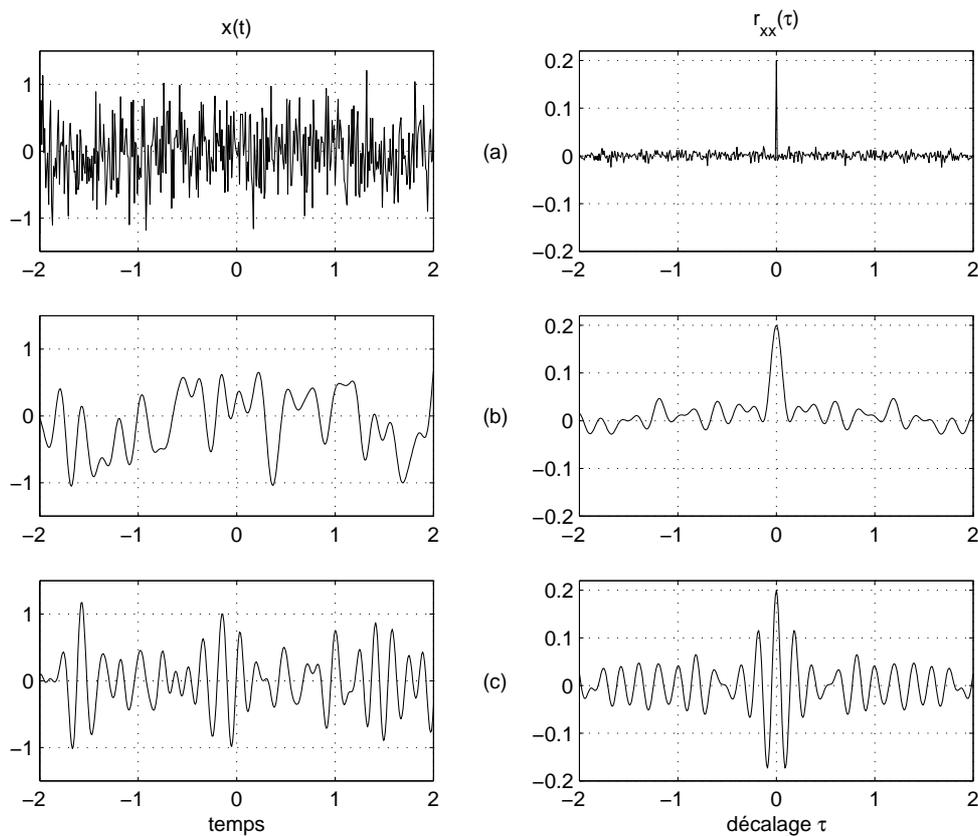


FIG. 7.6: Quelques signaux et leur fonction d'autocorrélation

7.3.3 Propriétés de l'autocorrélation

On rappellera tout d'abord que la fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux. On montre alors aisément que la fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

1. Lorsque le décalage temporel est nul ($\tau = 0$), la fac est égale à l'énergie du signal pour les signaux à énergie finie :

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (7.34)$$

ou, à la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie :

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv P_x$$

2. Comme la correspondance entre les deux signaux ne peut pas être aussi forte que lorsque les signaux se superposent exactement cela entraîne que la fac est maximum pour un décalage nul. On a donc :

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau) \quad (7.35)$$

3. La fac est une fonction paire :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) \quad (7.36)$$

4. La fac d'un bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est une impulsion de Dirac. En effet, le bruit blanc étant formé d'une multitude de fréquences possédant la même puissance, il en résulte un signal variant si rapidement que sa valeur présente est indépendante des valeurs passées et que sa valeur est non nulle pour $\tau = 0$ seulement. On a donc :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (7.37)$$

où σ^2 est la variance du signal aléatoire ; c'est également, comme on l'a vu plus haut, la puissance du signal aléatoire.

5. La fac d'un signal périodique quelconque est une fonction périodique paire. Considérons comme exemple le signal $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega(t + \tau) + \alpha) dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (7.38)$$

On remarque ainsi que l'amplitude de cette fac est la puissance $A^2/2$ du signal $x(t)$ et que la fac ne nous donne aucune information sur la phase α du signal.

6. Dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, il est possible de retrouver la fac du signal non perturbé. Considérant $y(t) = x(t) + n(t)$, on a en effet :

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) + n(t)) (x(t + \tau) + n(t + \tau)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) x(t + \tau) + n(t) n(t + \tau) \dots \\ &\quad \dots + x(t) n(t + \tau) + n(t) x(t + \tau)) dt \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \quad (7.39)$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ et le bruit $n(t)$ ne sont pas corrélés, on a bien entendu $r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$; ce qui donne finalement :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (7.40)$$

De plus, comme généralement la fac $r_{nn}(\tau)$ du bruit tend rapidement vers 0, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

Une illustration de cette dernière propriété (figure 7.7) montre comment l'autocorrélation permet d'extraire un signal noyé dans un bruit blanc. Dans cette figure, le signal est une sinusoïde d'amplitude 1 volt et le bruit blanc possède une valeur efficace de 5 volt.

Le signal extrait est reconnaissable mais encore perturbé par du bruit. Comme ce bruit résiduel diminue avec la racine carrée du nombre d'échantillon, on voit qu'on peut diminuer le bruit en augmentant le nombre d'échantillons enregistrés.

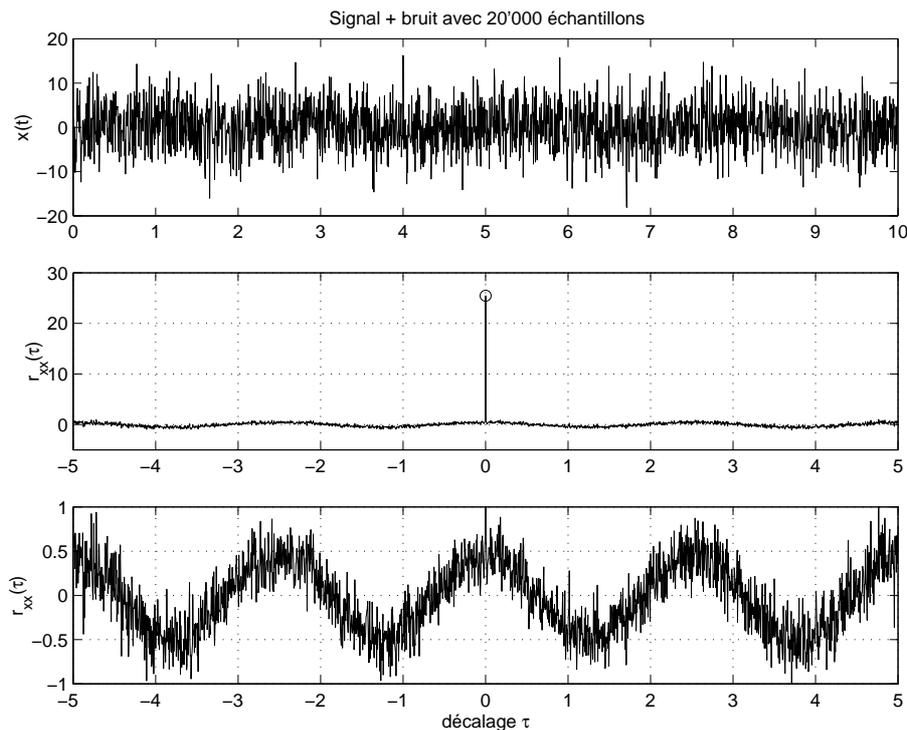


FIG. 7.7: Extraction d'un signal avec l'aide de l'autocorrélation

7.3.4 Propriétés de l'intercorrélation

Comme pour la fonction d'autocorrélation, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions d'intercorrélation :

1. En général la fic n'est ni paire, ni impaire.

2. Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation.
3. Comme le fait de retarder $y(t)$ par rapport à $x(t)$ d'une valeur τ équivaut à avancer le signal $x(t)$ par rapport à $y(t)$, on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \quad (7.41)$$

4. Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique.

7.3.5 Calcul numérique de la corrélation

Le calcul numérique d'une corrélation se fait en remplaçant l'intégrale par la somme du produit des valeurs échantillonnées avec une période constante unité.

Dans le cas où l'on a suffisamment de points à disposition, on peut calculer la somme sur N points sans atteindre les limites des signaux enregistrés. On a alors :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+k], \quad k_{min} \leq k \leq k_{max} \quad (7.42)$$

Comme on l'a vu plus haut (équ. (7.28)), le calcul de l'intercorrélation peut également se faire dans le domaine fréquentiel qui, pour les signaux numériques, se fait en utilisant la transformation de Fourier discrète. On obtient alors

$$R_{xy}[jk] = \frac{1}{N} X^*[jk] \cdot Y[jk]$$

Dans le cas où l'on souhaite utiliser toutes les valeurs à disposition, le nombre de points intervenant dans la somme diminue au fur et à mesure que le décalage augmente. Pour éviter de biaiser le résultat de la corrélation, on la calcule alors comme suit :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N - |k|} \sum_{n=0}^{N-|k|} x[n] y[n+k], \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (7.43)$$

Mais alors, on voit bien que, k augmentant, le nombre de points à disposition $N - |k|$ diminue. Ce qui, statistiquement, rend le résultat de l'intercorrélation plus incertain dans les extrémités de la fonction (voir figure 7.9b).

7.4 Rapport signal sur bruit SNR

Comme on va le voir plus loin, les fonctions de corrélation sont très puissantes pour extraire un signal $x(t)$ masqué par un bruit $n(t)$. Afin de chiffrer précisément la

qualité (mauvaise ou non) d'un signal, on utilise la notion de rapport signal/bruit (*Signal to Noise Ratio*) définie comme suit :

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_x}{P_n} \right) = 20 \log \left(\frac{X_{eff}}{N_{eff}} \right) \quad [dB] \quad (7.44)$$

Un SNR égal à 0 dB, signifie que la puissance P_n du bruit est égale à celle du signal P_x ou, de manière équivalente, que $X_{eff} = N_{eff}$.

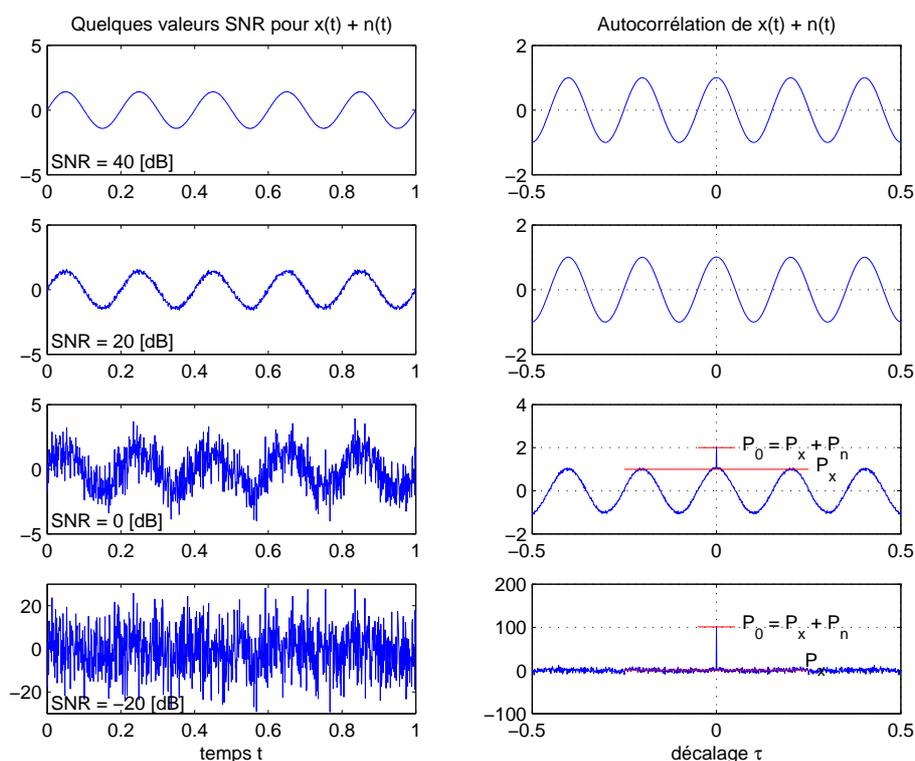


FIG. 7.8: Illustrations de quelques valeurs SNR

La colonne gauche de la figure 7.8 montre un signal sinusoïdal auquel est ajouté un bruit de plus en plus fort. Même si visuellement on observe qu'un SNR de 40dB est presque indétectable, il est important de savoir qu'en pratique il est fréquent d'exiger une qualité de signaux dont les SNR sont supérieurs à 60dB, voire 96dB en haute-fidélité audio. Malheureusement, il n'est pas rare de devoir traiter des signaux dont le SNR est inférieur à 0dB et dans ces cas là, comme on le verra, les fonctions de corrélation sont extrêmement utiles.

Enfin, comme on l'a vu dans la section précédente, les fonctions d'intercorrélation sont nulles dans le cas de signaux indépendants, non corrélés. Ainsi, dans le cas d'un bruit $n(t)$ indépendant ajouté à un signal $x(t)$, la fonction d'autocorrélation de la somme des deux vaut-elle

$$r_{x+n}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (7.45)$$

On voit alors que la puissance de deux signaux indépendants est égale à la somme des puissances individuelles car

$$r_{x+n}(0) = P_{tot} = r_{xx}(0) + r_{nn}(0) = P_x + P_n \quad (7.46)$$

Ce qui permet parfois, lorsque le signal $x(t)$ est périodique, d'estimer les deux puissances et d'en déduire la valeur du SNR comme le montre la colonne de droite de la figure 7.8.

7.5 Exemples de corrélation

La fonction d'intercorrélation est très souvent utilisée pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation. Dans ce but, le signal émis est choisi de manière à ce que le pic de sa fonction d'autocorrélation soit très bien défini. Les signaux le plus souvent utilisés sont les signaux chirp (à fréquence variable au cours du temps) et les séquences binaires pseudo-aléatoires.

7.5.1 Autocorrélation d'un signal chirp

Le signal chirp est un signal sinusoïdal dont la fréquence (ou la pulsation) varie linéairement avec le temps. Il est défini comme suit

$$x(t) = A \sin(\theta(t) + \alpha)$$

avec

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

$$\omega(t) = \omega_{min} + \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{t_{max}} t \quad 0 \leq t \leq t_{max}$$

Sa fonction d'autocorrélation possède un maximum très bien défini correspondant à la puissance du signal qui vaut $A^2/2$ (figure 7.9a).

7.5.2 Autocorrélation d'une SBPA

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est une succession de valeurs binaires (généralement ± 1) dont la distribution temporelle possède un caractère aléatoire pendant une certaine durée et qui ensuite se répète périodiquement. Sa fonction d'autocorrélation possède également un pic très bien défini égal à la puissance A^2 du signal (figure 7.9b).

7.6 Trois applications de la corrélation

7.6.1 Le radar

Comme exemple illustratif, imaginons le principe du radar avec lequel on désire détecter la présence ou non d'un avion puis connaître la distance à laquelle il se trouve.

7.6 Trois applications de la corrélation

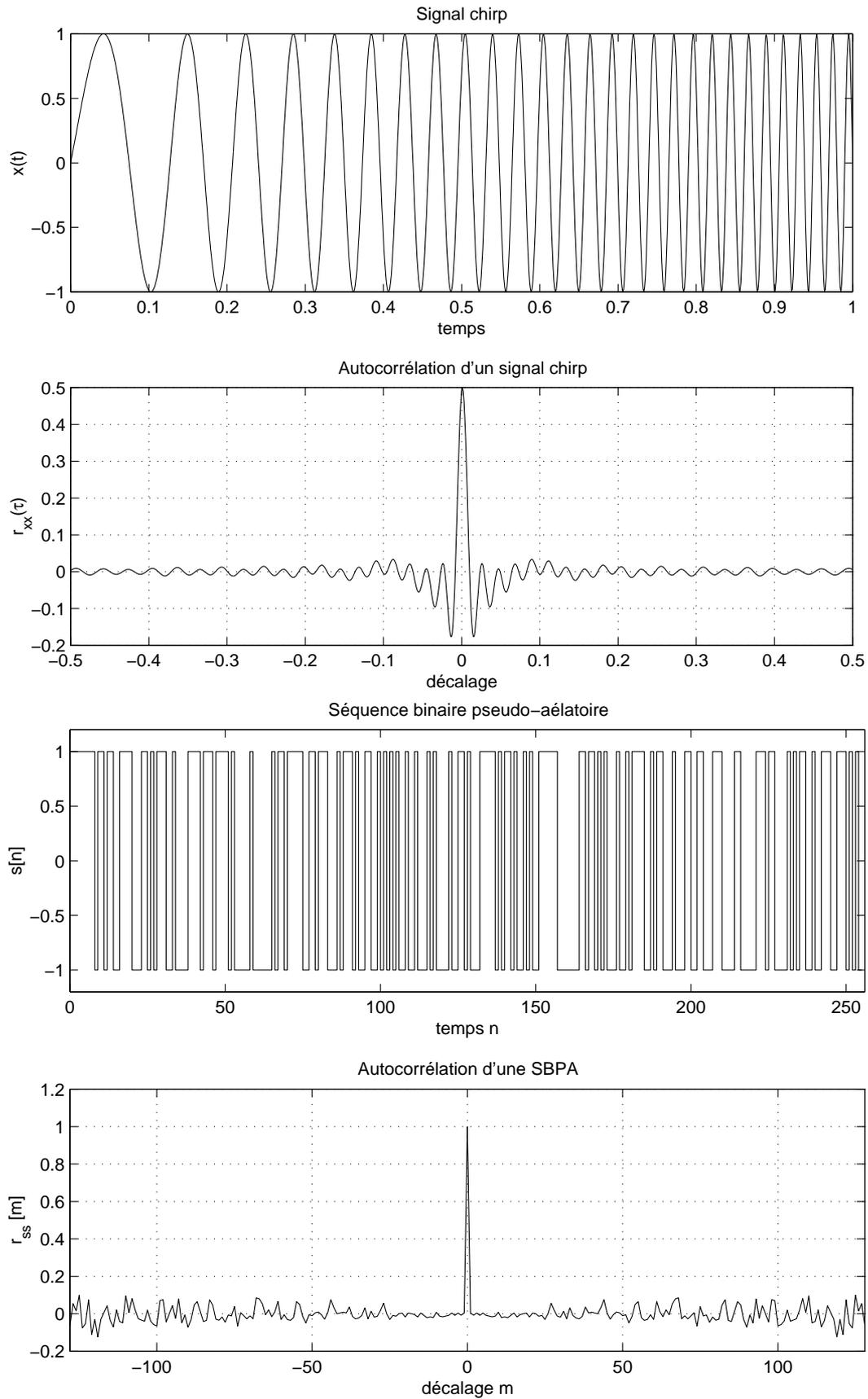


FIG. 7.9: Fonctions d'autocorrélation d'un signal chirp et d'une SBPA

7 COMPARAISON ET DESCRIPTION DES SIGNAUX

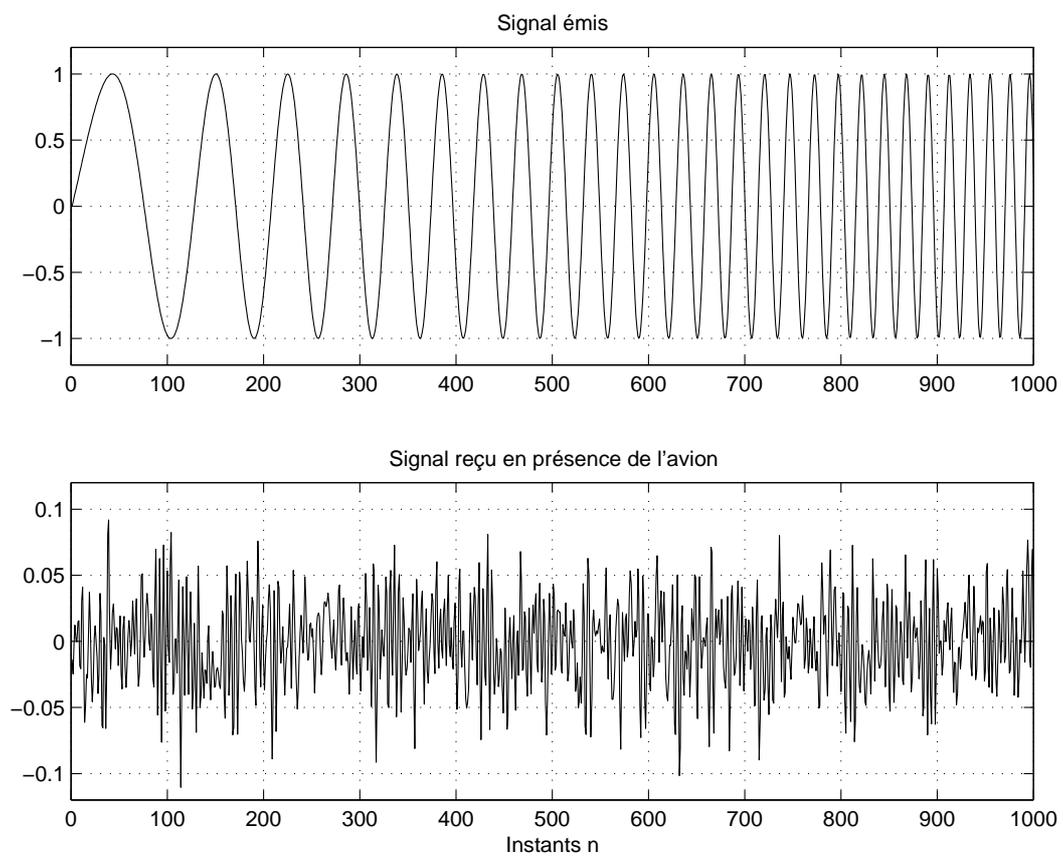


FIG. 7.10: Signaux émis et reçus par un radar

Le radar émet un signal chirp $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé par l'avion (figure 7.10). S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu $y(t)$ est constitué d'un bruit $n(t)$ seulement. De plus, il est évident que si un avion est présent, le signal $y(t)$ reçu en retour consiste en une version atténuée, retardée, et fortement bruitée du signal émis $x(t)$. Ainsi, le signal reçu peut être décrit par :

$$y(t) = Ax(t - t_d) + n(t)$$

avec :

- A = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
 - t_d = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
 - $n(t)$ = le bruit additif capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.
- Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle ne permet pas de déceler la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion (figure 7.10).

Les figures 7.11a et 7.11b illustrent le principe de l'utilisation d'un signal chirp pour détecter un avion et mesurer sa distance. Considérons les deux situations suivantes :

1. **Absence d'un avion** : Le signal reçu $y(t)$ est fortement atténué et perturbé. Seule une intercorrélacion entre $x(t)$ et $y(t)$ permet de savoir si un avion est présent ou non. Dans ce dernier cas, aucun pic bien distinct n'apparaît dans le graphe (figure 7.11a).
2. **Présence d'un avion** : Ici, l'intercorrélacion fait apparaître un pic très étroit se dégageant nettement au-dessus du bruit de fond (figure 7.11b). On notera que ce pic est légèrement décalé vers la droite par rapport à la position centrale ; ce décalage correspond au temps d'aller et retour du signal émis. Une fois ce temps déterminé, on peut calculer la distance de l'avion par rapport au radar.

7.6.2 La mesure d'un débit

On présente ici un débitmètre industriel réalisé par l'Institut d'Automatisation Industrielle de la heig-vd. Le principe, de même que sa réalisation, en est très simple.

Une caméra fournit régulièrement des images d'un flux de granulés (figure 7.12). En effectuant la comparaison par intercorrélacion de deux images successives, on obtient un point lumineux se situant aux coordonnées du déplacement $\Delta y(t)$. Connaissant la section A du conduit, on peut calculer le débit au cours du temps :

$$Q(t) = A \cdot \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

La seule difficulté de cette mesure réside dans le temps nécessaire pour calculer l'intercorrélacion en temps réel. En effet, si l'on imagine que l'on dispose d'images de 100x400 pixels, on doit traiter 40'000 pixels par intercorrélacion ; ce qui entraîne un nombre d'opérations valant environ

$$N_{op} \simeq N_{pxl}^2 = 16 \cdot 10^8$$

7 COMPARAISON ET DESCRIPTION DES SIGNAUX

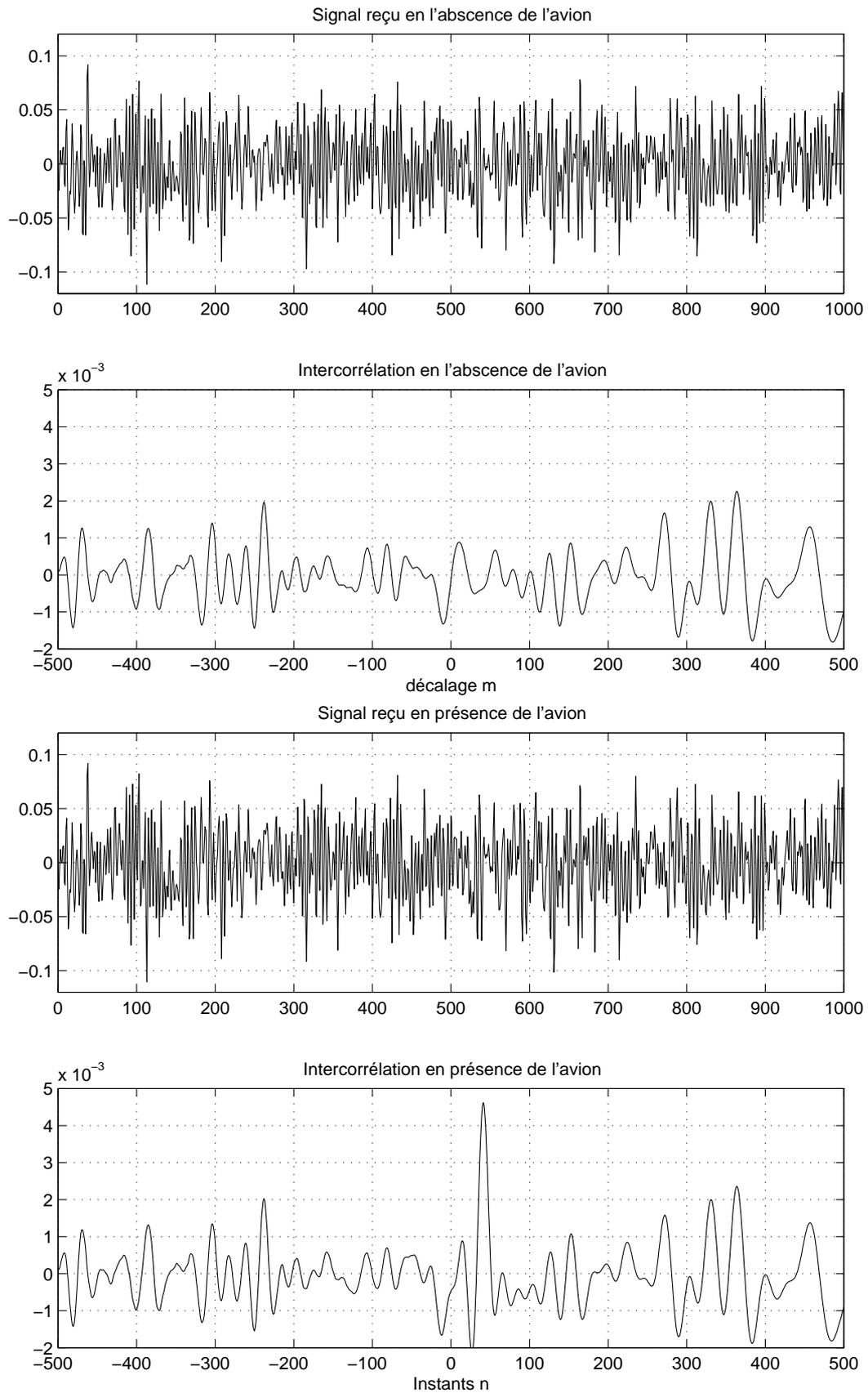


FIG. 7.11: a) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit
b) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit corrélé

7.6 Trois applications de la corrélation

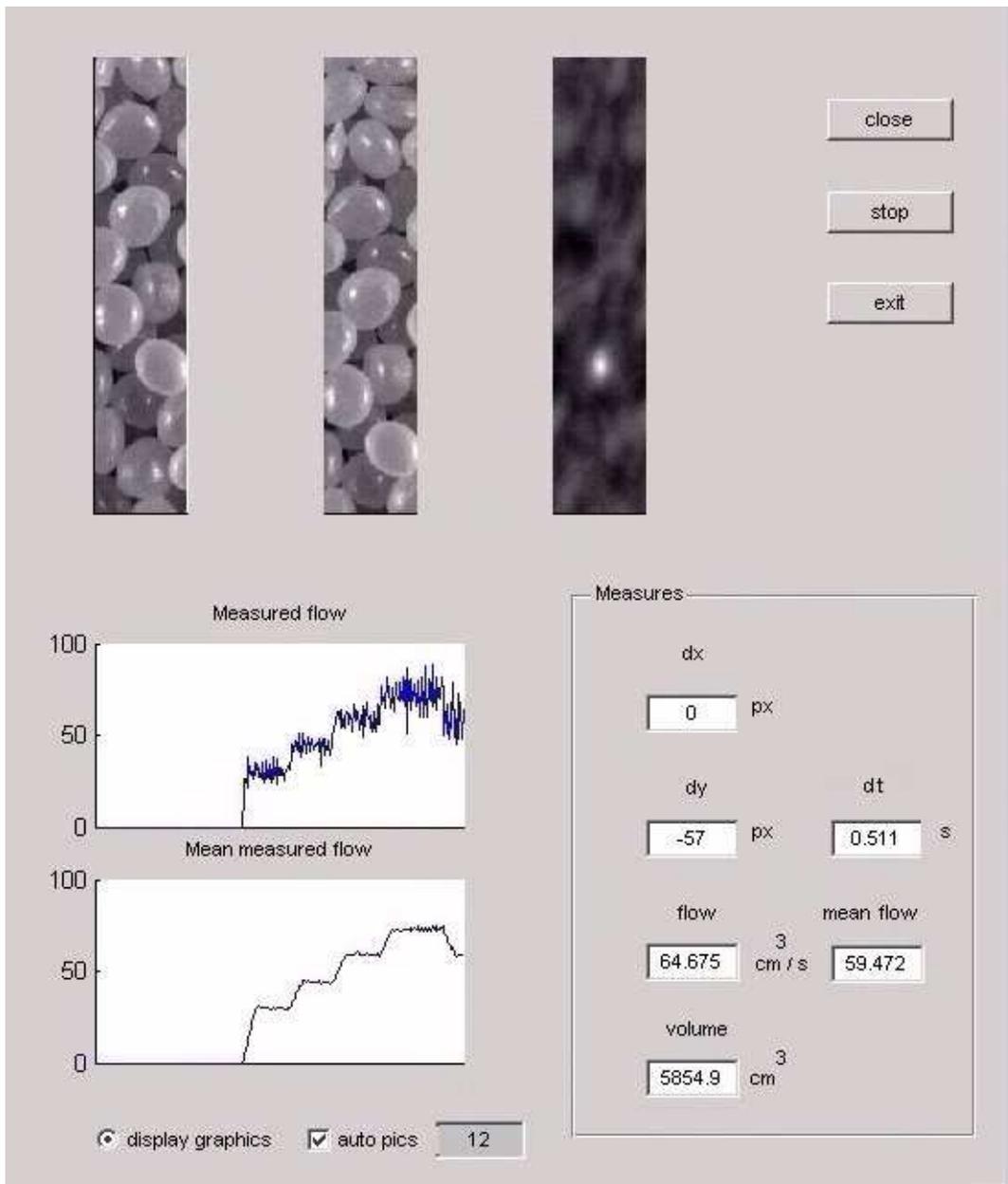


FIG. 7.12: Interface du débitmètre de granulés

Même avec un DSP très performant ($T_{clock} \simeq 10$ ns), il n'est pas possible de fournir une information en moins d'une seconde. Par contre, en utilisant la FFT on peut espérer fournir des résultats dans le temps imparti car celle-ci demande beaucoup moins d'opérations

$$N_{op} \simeq N_{pxl} \log_2(N_{pxl}) \simeq 40 \cdot 10^3 \cdot 15 = 6 \cdot 10^5$$

L'algorithme de calcul est alors le suivant

- 1) acquisition de image1
- 2) acquisition de image2
- 3) FFT bidimensionnelle de image1 et image2 => IMG1 et IMG2
- 4) calcul de $R_{xy} = \text{conj}(\text{IMG1}) * \text{IMG2}$
- 5) FFT inverse pour obtenir rxy
- 6) recherche des coordonnées du maximum d'intensité

Une fois ces calculs effectués, il reste encore suffisamment de temps pour calculer le débit actuel, lisser cette valeur, afficher les images, etc (figure 7.12).

7.6.3 La mesure du rythme cardiaque

On s'intéresse ici à la mesure automatique des pulsations cardiaques à l'aide de moyens simples : un stéthoscope muni d'une capsule microphonique et la carte-son d'un PC permettant d'enregistrer le son caractéristique des battements cardiaques.

D'un point de vue analytique, ces pulsations de très basse-fréquence (environ une pulsation par seconde) sont modulées par un souffle basse-fréquence situé aux environs de 100Hz. C'est ce qui rend le son audible puisque l'oreille humaine n'entend pas les sons inférieurs à 20Hz. Comme le rythme cardiaque est périodique, on peut espérer, grâce à l'autocorrélation, éliminer le bruit environnant et faire apparaître clairement la période du rythme cardiaque.

Cependant, à cause des perturbations liées à la mesure, les choses ne sont pas aussi simples et, très vite, on se rend compte que la recherche de l'enveloppe du signal mesuré sera bien plus fructueuse. Les différentes étapes à parcourir pour obtenir le rythme cardiaque avec un bon taux de réussite sont alors les suivantes.

Après acquisition du signal $x(t)$ à l'aide de la carte son d'un PC ($f_e = 8$ kHz) et sa sauvegarde dans un fichier *.wav, on peut, avec Matlab, effectuer les calculs ci-dessous :

1. élimination des fréquences inintéressantes par filtrage passe-bande du signal entre 60 et 500Hz ;
2. limitation des amplitudes du signal à $3 \cdot \sigma$ où σ est la valeur efficace du signal (écart-type) ;
3. recherche de l'enveloppe du signal ; celle-ci s'obtient de manière similaire à la démodulation d'amplitude par le redressement du signal et son filtrage passe-bas ;

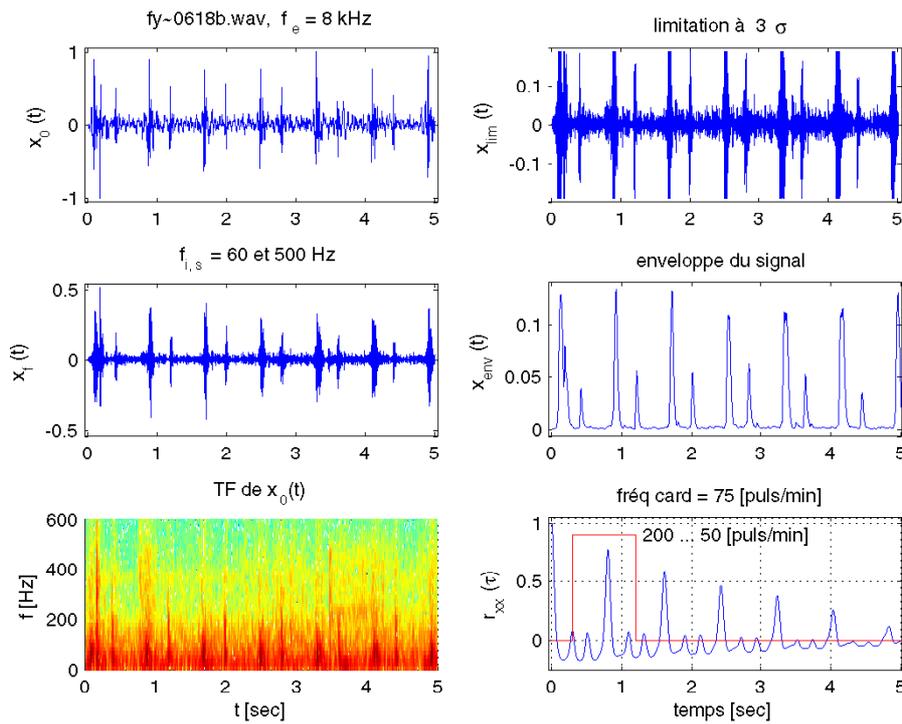


FIG. 7.13: Analyse d'un signal phonocardiographique

4. autocorrélation de l'enveloppe ;
5. recherche du maximum situé dans le domaine des pulsations cardiaques ordinaires ; pour des pulsations comprises entre 50 et 200 puls/min, le premier pic se trouvera entre 1.2 et 0.3 secondes.

La figure 7.13 illustre ces différentes étapes et elle montre, à l'évidence, combien l'autocorrélation est puissante pour extraire une information noyée dans du bruit.

7.7 Description des signaux aléatoires

Par définition, les signaux aléatoires ne peuvent pas être décrits analytiquement. On peut cependant tenter de les classer dans une des trois catégories types qui sont :

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (figure 7.14a) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles (figure 7.14b) ;
- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes variables (figure 7.14c).

Comme aucune description analytique n'est possible pour les signaux aléatoires, on tente d'en extraire des moyennes temporelles en utilisant leurs fonctions d'autocorrélation (fac) illustrées à la figure 7.15. On en déduit que la fac du premier signal est extrêmement étroite ; on la modélise par une impulsion de Dirac. La deuxième fac rappelle une fonction en sinus cardinal. Enfin, la troisième peut être modélisée par une exponentielle décroissante symétrique.

7 COMPARAISON ET DESCRIPTION DES SIGNAUX

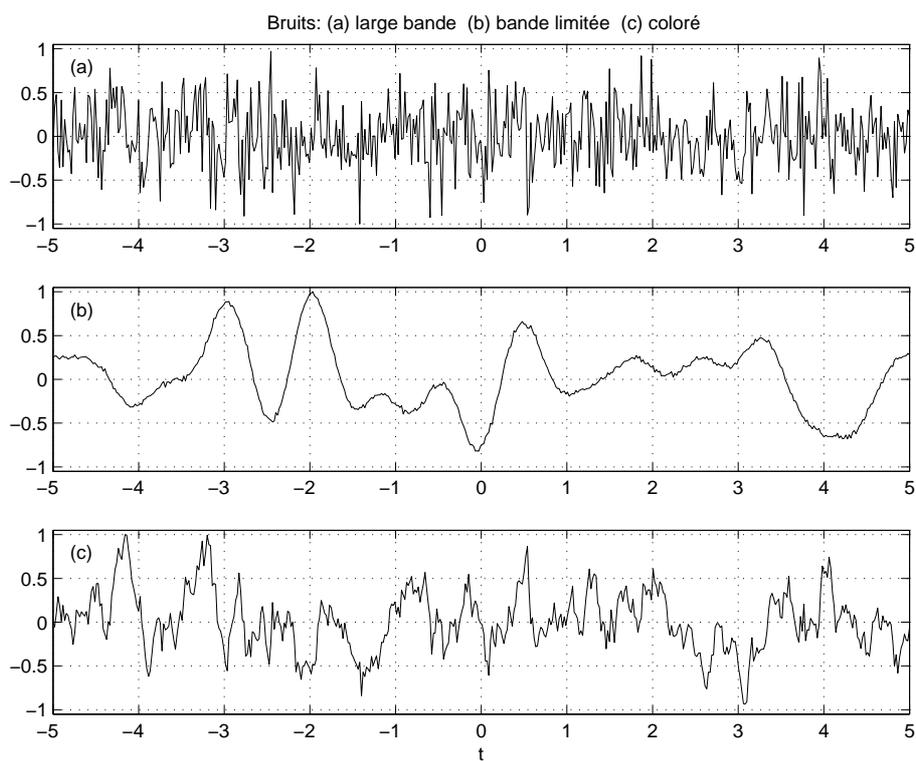


FIG. 7.14: Trois signaux aléatoires types

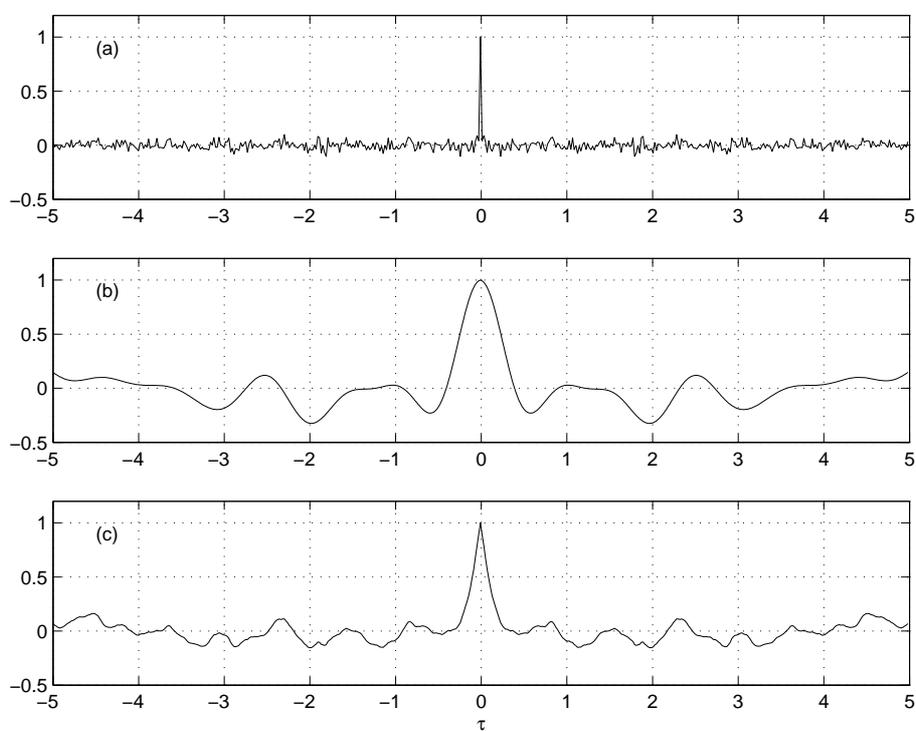


FIG. 7.15: Fonctions d'autocorrélation des trois bruits types

On définit alors la densité spectrale de puissance $R_{xx}(jf)$ comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$:

$$R_{xx}(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad [V^2 \text{ sec}] = [V^2/\text{Hz}]$$

L'observation de la densité spectrale de puissance (figure 7.16a) des trois signaux permet de tirer quelques propriétés et de définir des modèles représentant aussi bien que possible chacune des trois densités spectrales de puissance (figure 7.16b).

Le bruit blanc à densité spectrale constante et bande infinie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$ et sa densité spectrale de puissance est constante. Il est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = A^2 \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (7.47)$$

dont la fac est une impulsion de Dirac :

$$r_{xx}(\tau) = A^2 \cdot \delta(\tau) \quad [V^2] \quad (7.48)$$

Le théorème de Parseval nous dit alors que sa puissance est infinie. Comme cela n'est pas possible, on préfère travailler avec un modèle plus réaliste, le bruit à densité spectrale constante et à bande limitée

Le bruit à densité spectrale constante et bande limitée Il contient toutes les fréquences de $-f_{max}$ à $+f_{max}$. Sa puissance finie est souvent désignée par la variance statistique σ_x^2 qui n'est autre que le carré de la valeur efficace X_{eff}^2 du signal. Ce bruit est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2f_{max}} & \text{si } -f_{max} < f < +f_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (7.49)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(2\pi f_{max}\tau)}{2\pi f_{max}\tau} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (7.50)$$

Le bruit coloré à puissance finie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$. Mais sa puissance σ_x^2 est finie car son contenu spectral diminue assez rapidement avec la fréquence. Un modèle souvent utilisé est le suivant :

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (7.51)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-a|\tau|} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (7.52)$$

avec

$$a = 2\pi f_c \quad [1/\text{sec}] \quad (7.53)$$

7 COMPARAISON ET DESCRIPTION DES SIGNAUX

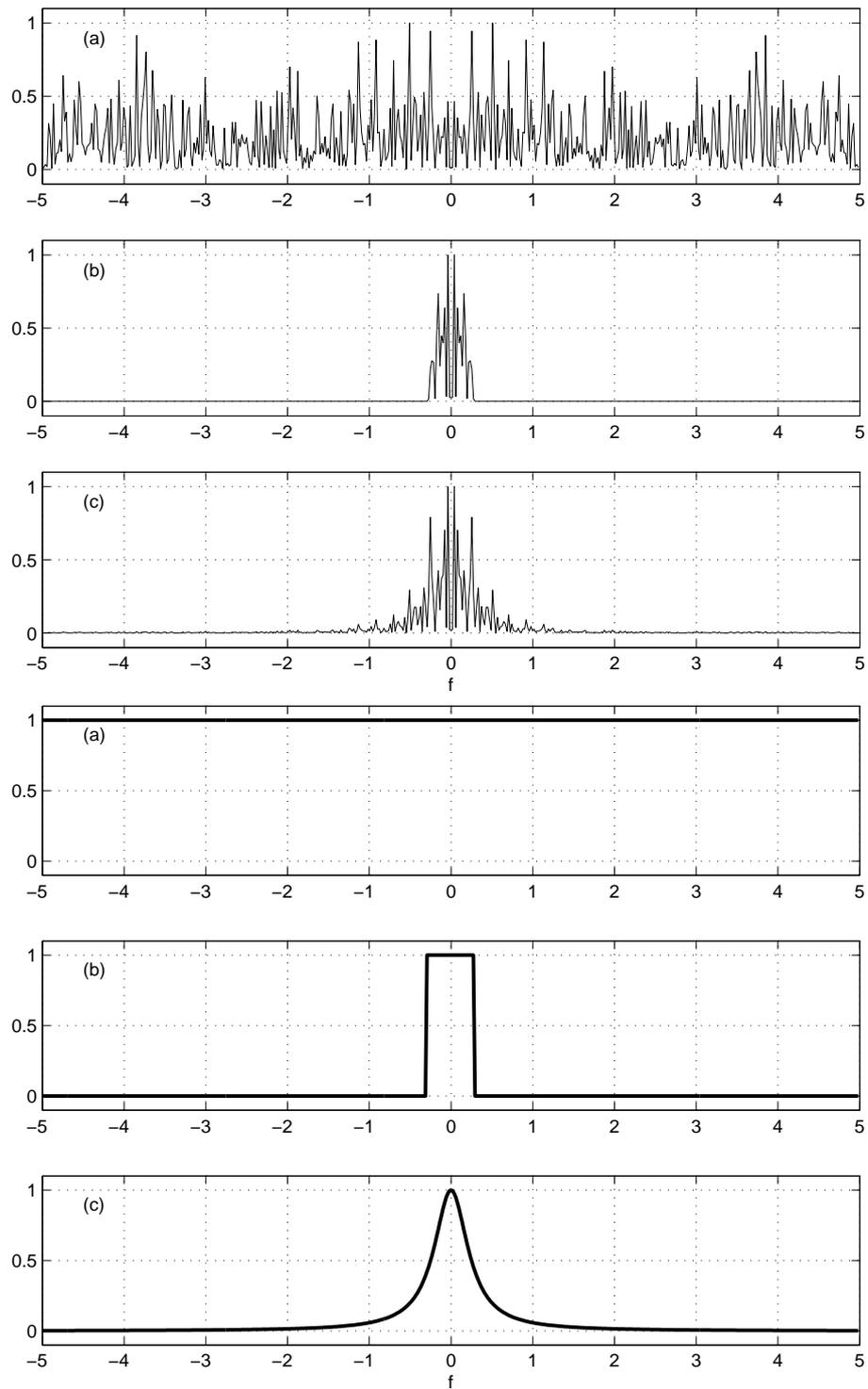


FIG. 7.16: a) Densités spectrales de puissance des trois bruits types
b) Trois modèles simples pour les représenter

7.7.1 Tension équivalente de bruit

Il est intéressant de relever que, pour les composants semiconducteurs, la donnée de la densité spectrale de puissance $R(f)$ est remplacée par une *tension équivalente de bruit* qui n'est autre que la racine carrée de la densité spectrale de puissance :

$$e_n(f) \equiv \sqrt{R(f)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (7.54)$$

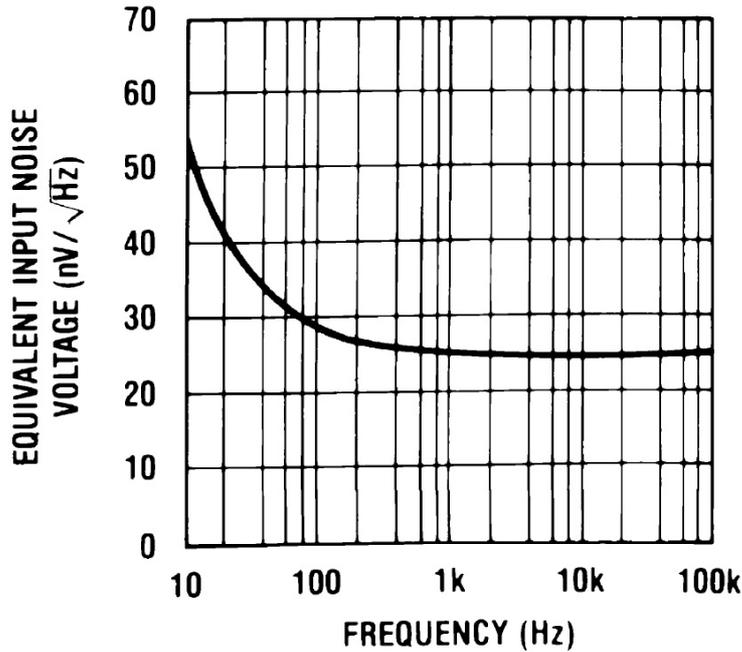


FIG. 7.17: Tension équivalente de bruit à l'entrée d'un LF 411

Par exemple, les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel LF411 (fig. 7.17) montrent que, dans les basses fréquences ($f < 30 \text{ Hz}$), le spectre du bruit décroît à raison de 10 [dB] par décade environ (flicker noise = bruit de grenaille) et qu'il reste pratiquement constant au delà de 300 [Hz]. Il vaut alors :

$$e_n \cong 25 \left[\frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad f > 300 \text{ [Hz]}$$

Connaissant cette valeur, on peut ainsi estimer la valeur efficace du bruit dans un domaine de fréquences donné. S'intéressant, par exemple, au domaine de fréquences

$$1 \text{ kHz} < f < 100 \text{ kHz}$$

la puissance du bruit vaut

$$P_n = \int_{f_1}^{f_2} e_n^2(f) df \simeq e_n^2 \cdot \Delta f = 625 \cdot 10^{-18} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot 99 \text{ kHz} = 6.2 \cdot 10^{-11} [\text{V}_{eff}^2]$$

Ce qui correspond à une tension efficace de bruit d'environ $8 \mu\text{V}_{eff}$ présente à l'entrée de l'amplificateur opérationnel.

7.8 Systèmes linéaires et densités spectrales

Il est très fréquent que l'on doive étudier des signaux reliés entre-eux par le passage au travers d'un système linéaire, par exemple un filtre. Celui-ci étant décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(jf)$, les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont alors reliés entre eux par le produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (7.55)$$

On s'intéresse ici à préciser, en particulier aux niveaux des unités, quelles sont les relations temporelles et fréquentielles entre des signaux à énergie finie ou à puissance finie.

7.8.1 Signaux à énergie finie

Ce sont les signaux dont la TF existe car ils sont intégrables en valeur absolue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (7.56)$$

Il s'agit généralement de signaux temporaires ou à décroissance rapide. On définit alors les **densités spectrales d'amplitude** (DSA) des signaux $x(t)$ et $y(t)$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

$$Y(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

et l'on a

$$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (7.57)$$

Pour ces signaux, les fonctions de corrélation se calculent comme suit

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad [\text{V sec}] \quad (7.58)$$

et on peut montrer que les relations suivantes sont vraies :

$$R_{xx}(f) = X^*(jf) \cdot X(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.59)$$

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) \cdot Y(jf) = |X(jf)|^2 \cdot H(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.60)$$

$$R_{yy}(f) = |H(jf)|^2 \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (7.61)$$

7.8.2 Signaux à puissance finie

La TF de ces signaux n'existe pas car leur énergie est infinie. Il s'agit généralement de signaux aléatoires permanents. On les modélise alors par leur fonction d'autocorrélation

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad [\text{V}^2] \quad (7.62)$$

et on définit leur **densité spectrale de puissance** (DSP) $R_{xx}(f)$ comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$R_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.63)$$

Lorsque les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont reliés entre eux par une opération de filtrage linéaire, le produit de convolution relie également les fonctions de corrélation entre elles et l'on a :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) r_{xx}(\tau - \theta) d\theta \quad [\text{V}^2] \quad (7.64)$$

$$R_{xy}(jf) = TF(r_{xy}(\tau)) = H(jf) \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (7.65)$$

où $R_{xy}(jf)$ est la **densité interspectrale de puissance**.

Le tableau 7.1 réunit les relations existant entre les signaux, les fonctions de corrélation et les densités spectrales d'amplitudes (DSA) ou de puissance (DSP).

	Domaine temporel	DSA
Énergie finie	signaux $x(t), y(t)$	$TF(x(t), y(t))$
[unités]	[V]	[V/Hz]
entrée	$x(t)$	$X(jf)$
système	$h(t)$	$H(jf)$
sortie	$y(t)$	$Y(jf)$
relations	$y(t) = h(t) \otimes x(t)$	$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf)$
Puissance finie	Corrélation	DSP
[unités]	[V ²]	[V ² /Hz]
entrée	$r_{xx}(\tau)$	$R_{xx}(f)$
système	$h(\tau)$	$H(jf)$
sortie	$r_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(jf)$
relations	$r_{xy}(\tau) = h(\tau) \otimes r_{xx}(\tau)$	$R_{xy}(jf) = H(jf) \cdot R_{xx}(f)$
	————	$R_{yy}(f) = H(jf) ^2 \cdot R_{xx}(f)$

TAB. 7.1: Relations temporelles et fréquentielles

7.9 Signaux, spectres et statistique

La page suivante, tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2], illustre les propriétés temporelles, spectrales et statistiques de quelques signaux. Comme on l'a déjà dit plus

7 COMPARAISON ET DESCRIPTION DES SIGNAUX

haut, ces descriptions ne sont que des points de vue différents d'une même réalité : le signal temporel $x(t)$. Ces points de vue sont complémentaires et c'est le but du traitement des signaux de les relier entre eux et d'en tirer efficacement le maximum d'information.

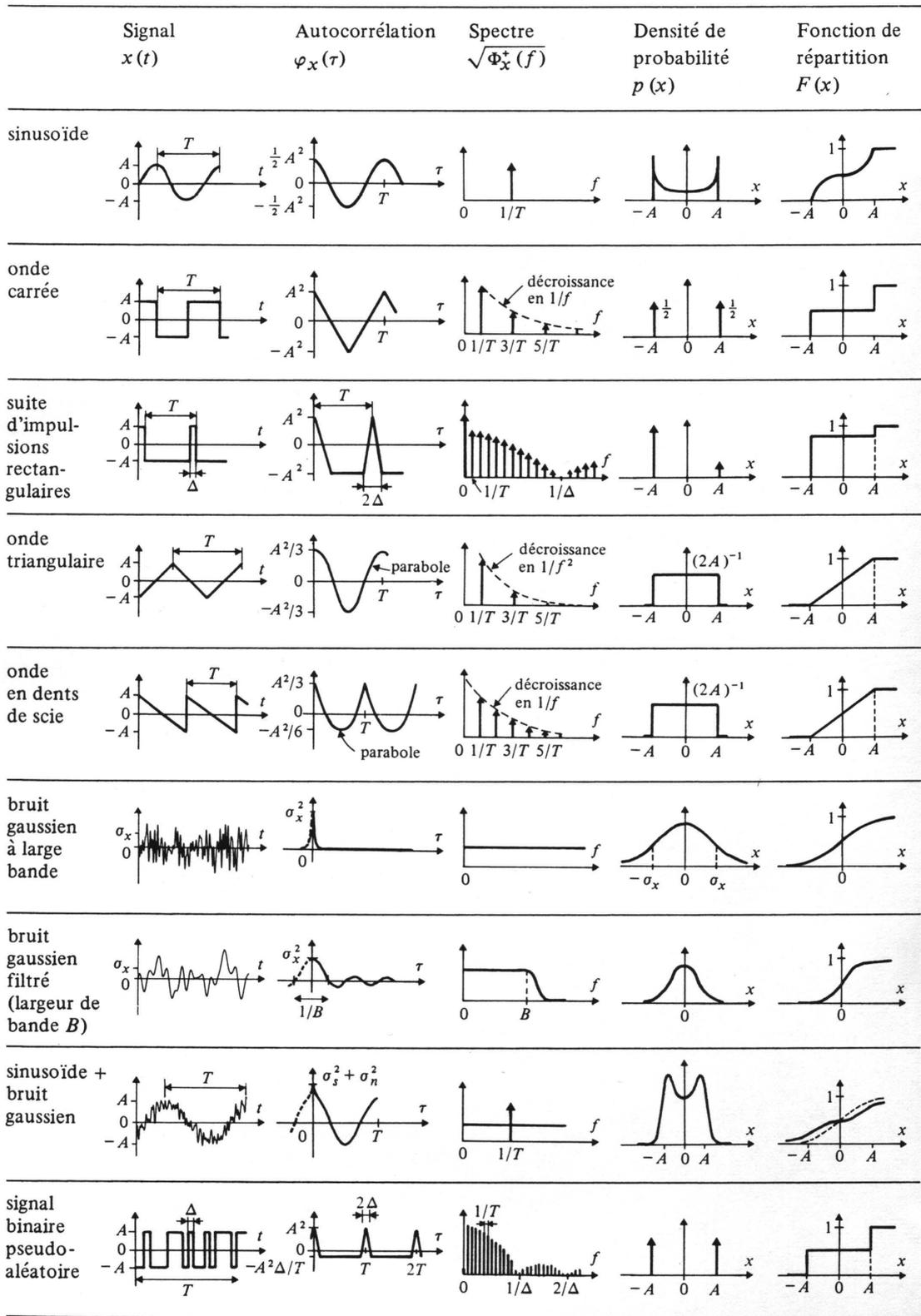


FIG. 7.18: Descriptions temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques [2]

7.10 Quelques exemples

Exemple 1 : Signal temporaire

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at)\epsilon(t)$ à un filtre passe-bande idéal. On demande :

1. Dessinez la réponse fréquentielle du filtre.
2. Esquissez les densités spectrales d'amplitude $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
3. Que valent les densités spectrales d'énergie $S_1(f)$ et $S_2(f)$?
4. Calculez les énergies W_1 et W_2 des signaux d'entrée et de sortie.
5. A.N. : $U_0 = 10$ [V], $a = 24'000$ [1/sec], $f_1 = 4$ [kHz], $f_2 = 6$ [kHz]

Solution :

Exemple 2 : Signal aléatoire permanent

Un opérateur vous informe qu'il a mesuré à la sortie d'un amplificateur un bruit large bande dont la valeur efficace vaut $U_{1,eff} = 0.01 [V_{eff}]$.

1. Quelle est la puissance P_1 de ce bruit ? L'information apportée par l'opérateur est-elle significative et suffisante ?
2. Après discussion, celui-ci précise que cette mesure a été effectuée avec un voltmètre à vraie valeur efficace dont la bande passante est de 100kHz. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance correspondant.
3. Esquissez $R_1(f)$ et calculez sa valeur.
4. La sortie de cet amplificateur est branchée sur un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est fixée à 1 kHz. Esquissez la densité spectrale de puissance $R_2(f)$ du bruit après le filtre.
5. Quelle valeur efficace $U_{2,eff}$ mesurerez-vous après le filtre ?

Solution :

Exemple 3 : Signal aléatoire permanent

À la sortie d'un amplificateur dont la bande passante est de 100 [kHz], on mesure un bruit de 10 [mV_{eff}]. On filtre ce bruit avec un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1.6$ [k Ω] et $C = 100$ [nF].

1. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance $R_1(f)$ du bruit de sortie de l'amplificateur et calculez sa valeur.
2. Calculez la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
3. Esquissez sur un même diagramme les densités spectrales de puissance $R_1(f)$ et $R_2(f)$ présentes à l'entrée et à la sortie du filtre RC.
4. Quelle sera la valeur efficace de la tension à la sortie du filtre RC ?

Solution :

Exemple 4 : Signal temporaire

On applique une impulsion de tension d'amplitude E et de largeur Δt à un filtre passe-bande LC-R caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et son facteur de qualité Q_0 . Admettant que la largeur de l'impulsion est beaucoup plus petite que les temps caractéristiques du filtre :

1. Esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ainsi que $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
2. Calculez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$.
3. Calculez l'énergie W_1 du signal d'entrée.
4. Calculez l'énergie W_2 du signal de sortie du filtre.
5. A.N. : $E = 10$ [V], $\Delta t = 10$ [μ sec], $f_0 = 1$ [kHz], $Q_0 = 10$.

Solution :

7.11 Exercices

Correl 0

Considérant deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ définis comme suit :

n	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0

calculez et représentez la fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+m)$$

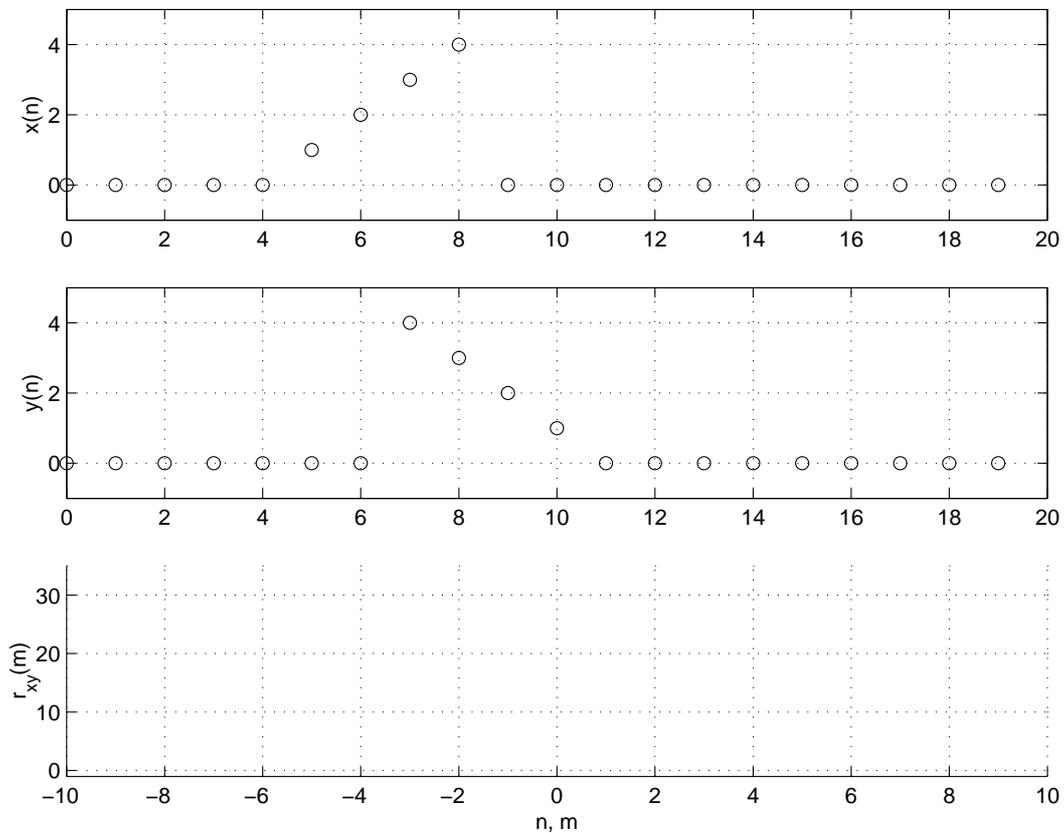


FIG. 7.19: Exercice Corr 0

Correl 1 Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes $\tau = 0, \pm\Delta t, \pm 2\Delta t$;
3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Correl 2 Considérant les 3 signaux suivants :

- une exponentielle décroissante $x(t)$ d'amplitude A et de constante de temps τ_1 ,
- une impulsion rectangulaire $y(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt ,
- une impulsion triangulaire $z(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2\Delta t$,

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux;
2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple ; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

Correl 3 Calculez la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $h(t)$ de l'exercice Corr 3. Avant de vous lancer dans les calculs, imaginez où se situera le maximum de la fonction. Esquissez le résultat de l'intercorrélation.

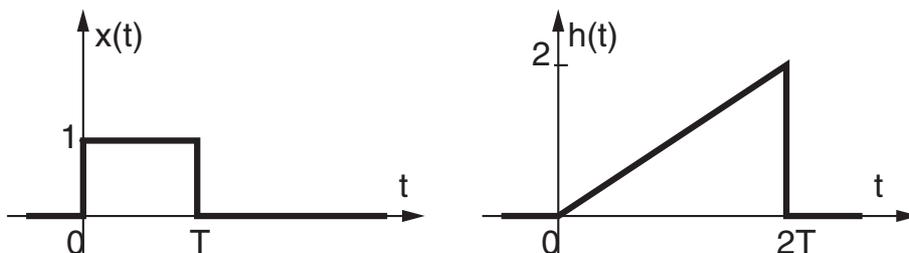


FIG. 7.20: Exercice Corr 3

Correl 4 On souhaite connaître la fonction d'intercorrélation des signaux $h_2(t)$ et $h_1(t)$ de l'exercice Corr 4 :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

Pour cela :

1. imaginez tout d'abord l'endroit où se situera le maximum de la fic ;
2. montrez que, pour les points particuliers suivants $\tau = \{-2\Delta t, -\Delta t, 0, +\Delta t\}$, on a, respectivement, $h_{21}(\tau) = \{0, A^2 \frac{\Delta t}{3}, A^2 \frac{\Delta t}{6}, 0\}$;
3. pourquoi, comme il est précisé dans la remarque ci-dessous, le calcul est-il plus simple lorsque τ est compris entre 0 et Δt ?
4. que pensez-vous des résultats graphiques obtenus avec Matlab (figure 7.21) ?

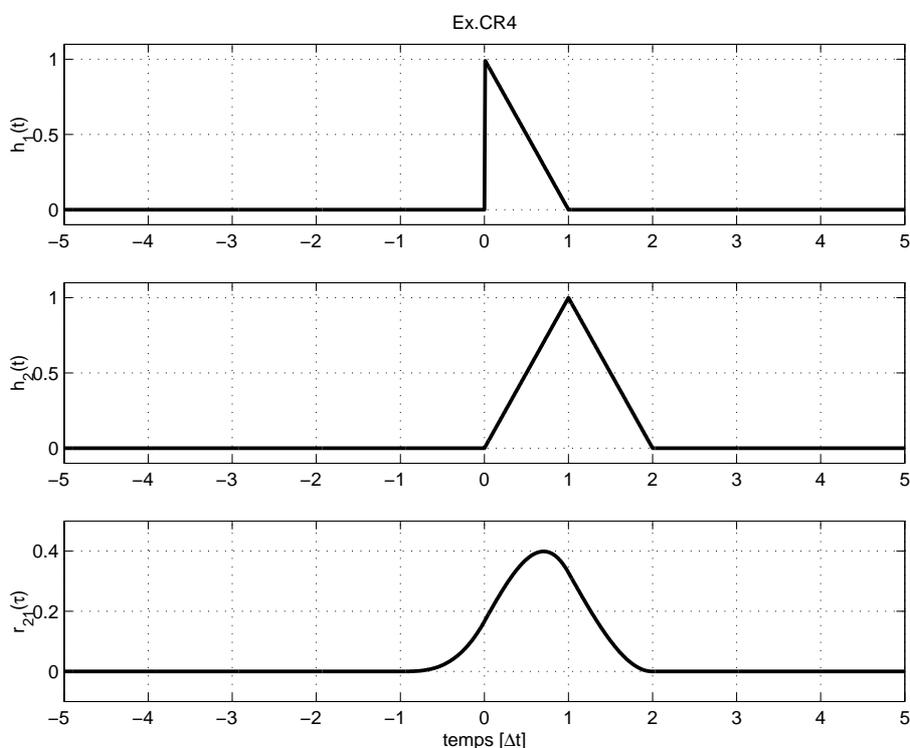


FIG. 7.21: Exercice Corr 4

Remarque Pour donner une idée de ce que représente l'approche analytique, voici le calcul de la partie la plus simple correspondant au décalage avancé de $h_1(t + \tau)$ avec τ compris entre 0 et Δt .

Comme l'on a :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

il faut commencer par décrire les 2 fonctions suivantes :

$$h_2(t) = \frac{A}{\Delta t} t \quad h_1(t + \tau) = A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t} \right)$$

valables pour $0 < t < \Delta t$, respectivement, $-\tau < t < \Delta t - \tau$.

Puis, tenant compte des parties nulles, il vient :

$$\begin{aligned}
 r_{21}(\tau) &= \int_0^{\Delta t - \tau} h_2(t) h_1(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^{\Delta t - \tau} \frac{A}{\Delta t} t A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t - \tau} \left(t - \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{\tau t}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\Delta t} - \frac{\tau t^2}{2\Delta t}\right) \Big|_0^{\Delta t - \tau} \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) - \frac{(\Delta t - \tau)^3}{3\Delta t}\right) \\
 &= A^2 \frac{(\Delta t + \tau)^2}{6 \Delta t^2} (\Delta t - \tau)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier les 2 valeurs suivantes :

$$r_{21}(\tau = 0) = A^2 \frac{\Delta t}{6} \quad r_{21}(\tau = \Delta t) = 0$$

SAL 1 Sachant qu'un signal aléatoire $x(t)$ décrit par sa fac

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 2\pi f_c$$

possède la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

on demande de calculer sa puissance de deux manières différentes. Que vaut-elle ?

Réponse : $P_x = \sigma_x^2$

SAL 2 Sachant qu'un bruit $x(t)$ dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = 10^{-4} [\text{V}^2] \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 1000 [\text{sec}^{-1}]$$

passé au travers d'un filtre passe-bande **idéal** caractérisé par ses deux fréquences de coupure $f_i = 100 [\text{Hz}]$ et $f_s = 200 [\text{Hz}]$, on demande de calculer les valeurs efficaces des signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$.

Réponse : $U_{x,eff} = 10 \text{ mV}$, $U_{y,eff} = 3.3 \text{ mV}$

SAL 3 On considère un bruit large-bande $x(t)$ dont la densité spectrale de puissance est constante et vaut

$$R_{xx}(f) = R_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$$

Sachant que le signal $x(t)$ passe au travers d'un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ nF}$, calculez la valeur efficace du bruit $y(t)$ en sortie du filtre.

Réponse : $P_y = \pi f_c R_0$, $U_{y,eff} = 700 \text{ mV}$

SAL 4 Idem SAL 3, mais avec un filtre CR passe-haut. Au vu du résultat obtenu, quel est le problème ? Que pensez-vous de $R_{xx}(f)$?

Rappel : $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \text{atan}(x)$

SAL 5 On considère un bruit $x(t)$ de puissance moyenne $P_x = 10^{-2} \text{ V}_{eff}^2$. Admettant que sa densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ puisse être décrite par une fonction triangulaire de hauteur R_0 et de base $2f_0 = 20 \text{ kHz}$, calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = P_x/f_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$

SAL 6 Admettant qu'un signal aléatoire de puissance P_x est décrit par la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} R_0 \cdot \left(\frac{|f|-f_0}{f_0}\right)^2 & \text{si } -f_0 < f < +f_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = \frac{3}{2} P_x/f_0$

SAL 7 On admet qu'un signal $x(t)$ possède une densité spectrale de la forme

$$R_{xx}(f) = R_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \quad -\infty < f < +\infty$$

Sachant que la tension efficace du signal $x(t)$ vaut U_{eff} , calculez R_0 .

Réponse : $R_0 = P_x/(\pi f_0)$

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970