

heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Département Technologies Industrielles

Unité SES Analyse des signaux analogiques

Quelques corrigés
d'exercices

F. Mudry

1 Signaux périodiques

Voir également les corrigés manuscrits annexés.

SF 4 Le premier signal est une SIR d'amplitude $A = 10\text{ V}$, de période $T = 10\text{ msec}$, de largeur $\Delta t = 2\text{ msec}$ et décalé de $t_d = -\Delta t/2 = -1\text{ msec}$. Son spectre vaut donc

$$X_1(jk) = X_0(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t_d) \text{ avec } X_0(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{(k\pi f_0 \Delta t)}$$

$$|X_1(jk)| = A \frac{\Delta t}{T} \left| \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{(k\pi f_0 \Delta t)} \right| = 2\text{ V} \left| \frac{\sin(k\pi/5)}{(k\pi/5)} \right|$$

$$\angle X_1(jk) = (0 \text{ ou } \pm \pi) + 2\pi k f_0 t_d = (0 \text{ ou } \pm \pi) - k\pi/5$$

Le deuxième signal est une SIR abaissée de 3 V , d'amplitude $A = 9\text{ V}$, de période $T = 10\text{ msec}$, de largeur $\Delta t = 5\text{ msec}$ et décalé de $t_d = -\Delta t/2 = -2.5\text{ msec}$. Pour $k \neq 0$, son spectre vaut donc

$$|X_2(jk)| = A \frac{\Delta t}{T} \left| \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{(k\pi f_0 \Delta t)} \right| = 4.5\text{ V} \left| \frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi/2)} \right|$$

$$\angle X_2(jk) = (0 \text{ ou } \pm \pi) + 2\pi k f_0 t_d = (0 \text{ ou } \pm \pi) - k\pi/2$$

Comme on a soustrait une tension continue de 3 V à la SIR, la composante DC vaut

$$X_2(0) = 4.5 - 3 = 1.5\text{ V}$$

Les spectres sont présentés dans la figure 1.

SF 7 Puisque $X(jk) = 0$ pour $|k| > 1$, on en déduit que le signal $x(t)$ est constitué d'une composante DC et de la fondamentale. Celle-ci est obligatoirement une sinusoïde car le signal est impair. On a donc

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(2\pi f_0 t) \text{ avec } f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\text{ msec}} = 500\text{ Hz}$$

Comme sa puissance vaut 1, on doit avoir

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} A_1^2 = 1$$

Parmi l'infinité de solutions, on peut en choisir deux

$$P = 0 + \frac{1}{2} A_1^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = \sqrt{2} \end{cases}$$
$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} A_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1/\sqrt{2} \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

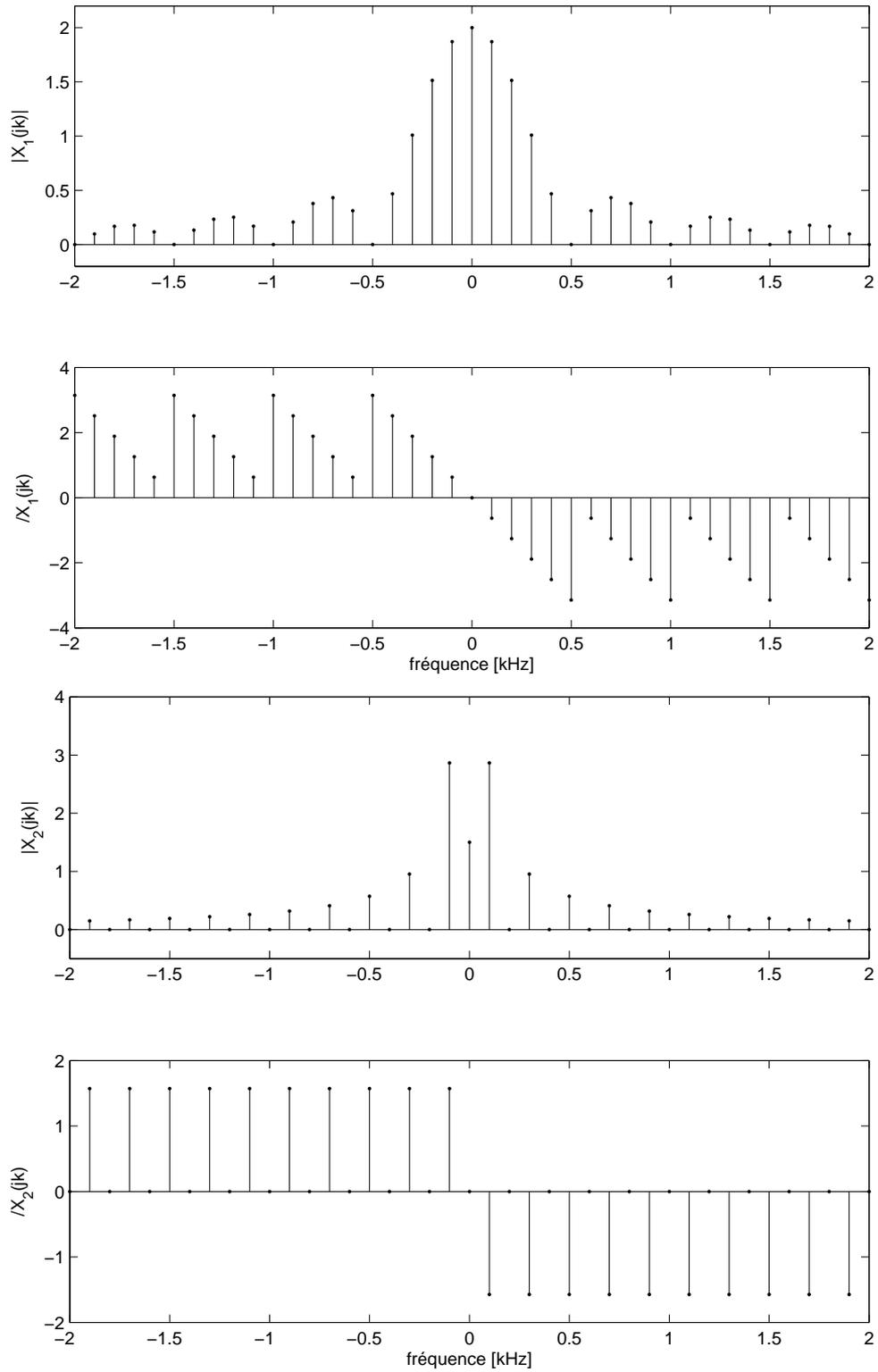


FIG. 1: Ex SF 4

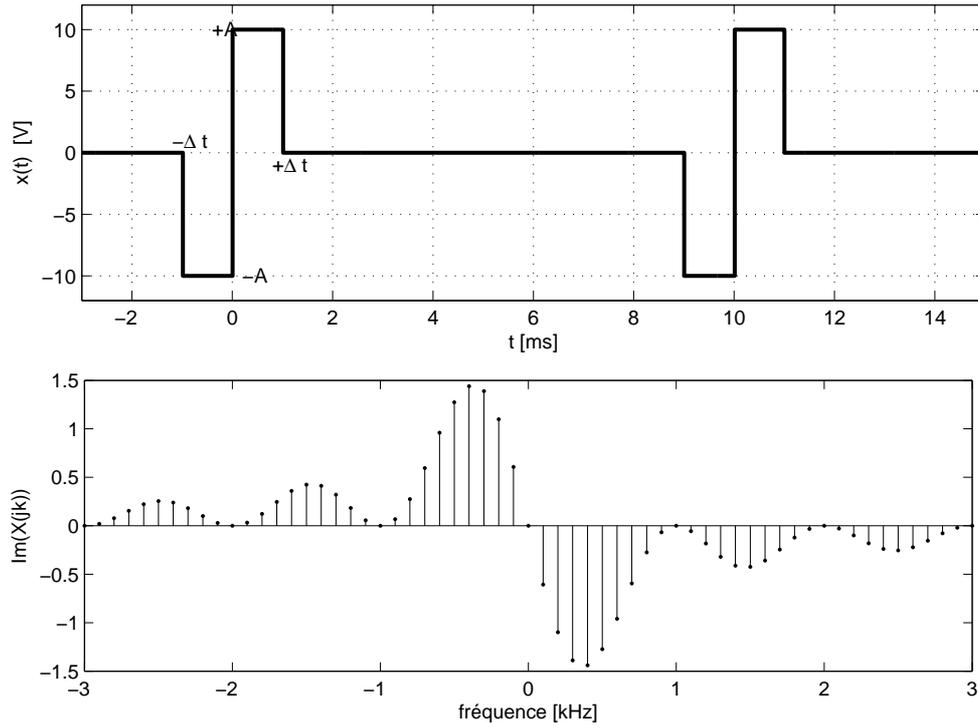


FIG. 2: Ex SF 10

SF 10

1. Le spectre de ce signal impair est purement imaginaire.
2. On observe que $x(t)$ est la différences de deux SIR $x_0(t)$ décalées de $\pm\Delta/2$; on a donc $x(t) = x_0(t - \frac{\Delta t}{2}) - x_0(t + \frac{\Delta t}{2})$. En utilisant le théorème du décalage, on obtient

$$\begin{aligned}
 X(jk) &= X_0(jk) \cdot \exp\left(-j2k\pi f_0 \frac{\Delta t}{2}\right) - X_0(jk) \cdot \exp\left(+j2k\pi f_0 \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 &= X_0(jk) \cdot \left[\exp\left(-j2k\pi f_0 \frac{\Delta t}{2}\right) - \exp\left(+j2k\pi f_0 \frac{\Delta t}{2}\right) \right] \\
 &= X_0(jk) \cdot (-2j) \sin\left(2k\pi f_0 \frac{\Delta t}{2}\right) \\
 &= X_0(jk) \cdot (-2j) \sin(k\pi f_0 \Delta t)
 \end{aligned}$$

Comme

$$X_0(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{(k\pi f_0 \Delta t)}$$

il vient

$$X(jk) = -j 2A \frac{\Delta t}{T} \frac{(\sin(k\pi f_0 \Delta t))^2}{(k\pi f_0 \Delta t)}$$

Le module et la phase du spectre valent donc

$$\begin{aligned}
 |X(jk)| &= 2A \frac{\Delta t}{T} \left| \frac{(\sin(k\pi f_0 \Delta t))^2}{(k\pi f_0 \Delta t)} \right| \\
 \angle X(jk) &= \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ +\pi/2 & \text{si } k < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. La puissance de ce signal vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} A^2 dt = 2A^2 \frac{\Delta t}{T}$$

4. Comme le spectre est purement imaginaire, on trace simplement sa partie imaginaire (figure 2).

SF25 Comme le signal sinusoïdal passe au travers d'un filtre linéaire, le signal de sortie est une sinusoïde non déformée. Son TDH est donc nul.

SF26 On constate que, pratiquement, les composantes spectrales non nulles sont celles d'ordre impair. On peut ainsi négliger les composantes paires. On a donc

$$TDH = \frac{\sqrt{\sum_{k>1} A_k^2}}{A_1} = 1.6\%$$

$$X_{eff} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} A_k^2} = 4.57 V_{eff}$$

C SF 2

On a : $x(t) = [1 + \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6})] \cos(10\pi f_0 t)$, $f_0 = 1 \text{ kHz}$

d'où : $x(t) = [1 + \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\pi/6} + e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\pi/6})] \cdot \frac{1}{2}(e^{j10\pi f_0 t} + e^{-j10\pi f_0 t})$

$$= \frac{1}{2}(e^{j10\pi f_0 t} + e^{-j10\pi f_0 t}) + \frac{1}{4}(e^{j2\pi f_0 t} e^{j\pi/6} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\pi/6})(e^{j10\pi f_0 t} + e^{-j10\pi f_0 t})$$

$$= \frac{1}{2}e^{j10\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j10\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{j\pi/6}e^{j12\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j\pi/6}e^{-j12\pi f_0 t}$$

$$+ \frac{1}{4}e^{j\pi/6}e^{-j8\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j\pi/6}e^{j8\pi f_0 t}$$

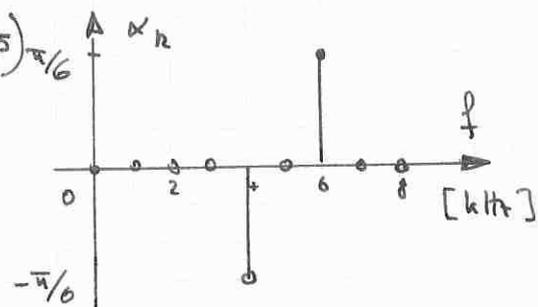
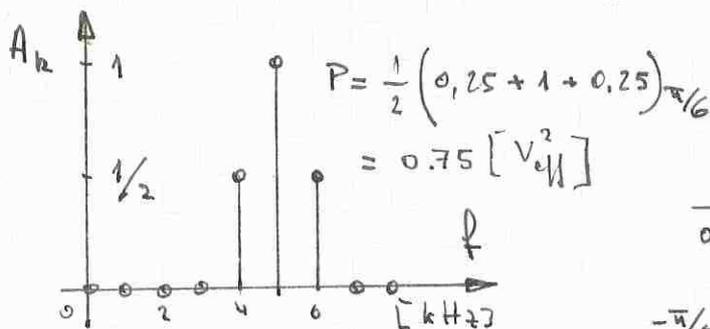
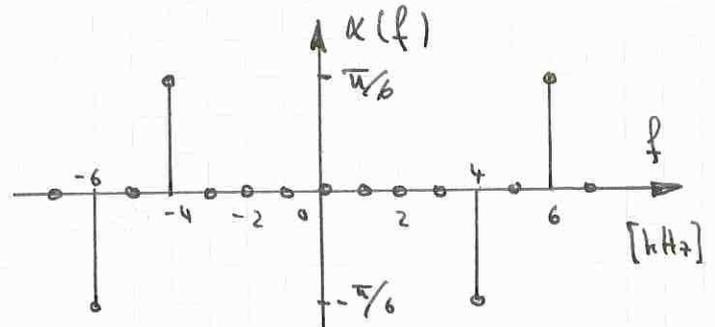
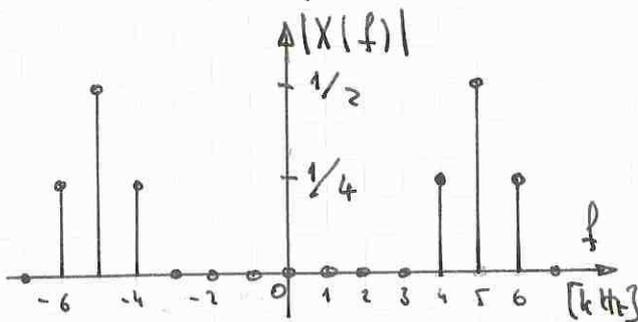
$$= \frac{1}{4}e^{-j\pi/6}e^{-j6 \cdot 2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{+j\pi/6}e^{+j6 \cdot 2\pi f_0 t}$$

$$+ \frac{1}{2}e^{-j5 \cdot 2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{+j5 \cdot 2\pi f_0 t}$$

$$+ \frac{1}{4}e^{+j\pi/6}e^{-j4 \cdot 2\pi f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j\pi/6}e^{+j4 \cdot 2\pi f_0 t}$$

Les coefficients non-nuls sont donc :

$$X(\pm j4) = \frac{1}{4} e^{\mp j\pi/6} ; X(\pm j5) = \frac{1}{2} ; X(\pm j6) = \frac{1}{4} e^{\pm j\pi/6}$$



CSF3 :

$$\text{On a un que } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk) e^{+j(2\pi k f_0 t)} \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)$$

$$\text{avec } A_0 = X(0) ; A_k = 2 |X(jk)| ; k \geq 1$$

$$\alpha_k = \angle X(jk)$$

Pour cet exercice, on a :

$$A_0 = 2 ; A_k = 0 \text{ si } k > 2$$

$$A_1 = 2 \sqrt{9+4} = 2\sqrt{13} ; \alpha_1 = \text{atg} \frac{+2}{-3} = +2,5536 \text{ rad}$$

$$A_2 = 2 \sqrt{1+9} = 2\sqrt{10} ; \alpha_2 = \text{atg} \frac{+3}{+1} = +1,249 \text{ rad}$$

d'où :

$$x(t) = 2\sqrt{13} \cos(2\pi f_0 t + 2,5536) + \\ + 2\sqrt{10} \cos(4\pi f_0 t + 1,249) + 2$$

$$X_{dc} = A_0 = 2 \Rightarrow X_{dc}^2 \equiv P_{dc} = 4 [V_{dc}^2]$$

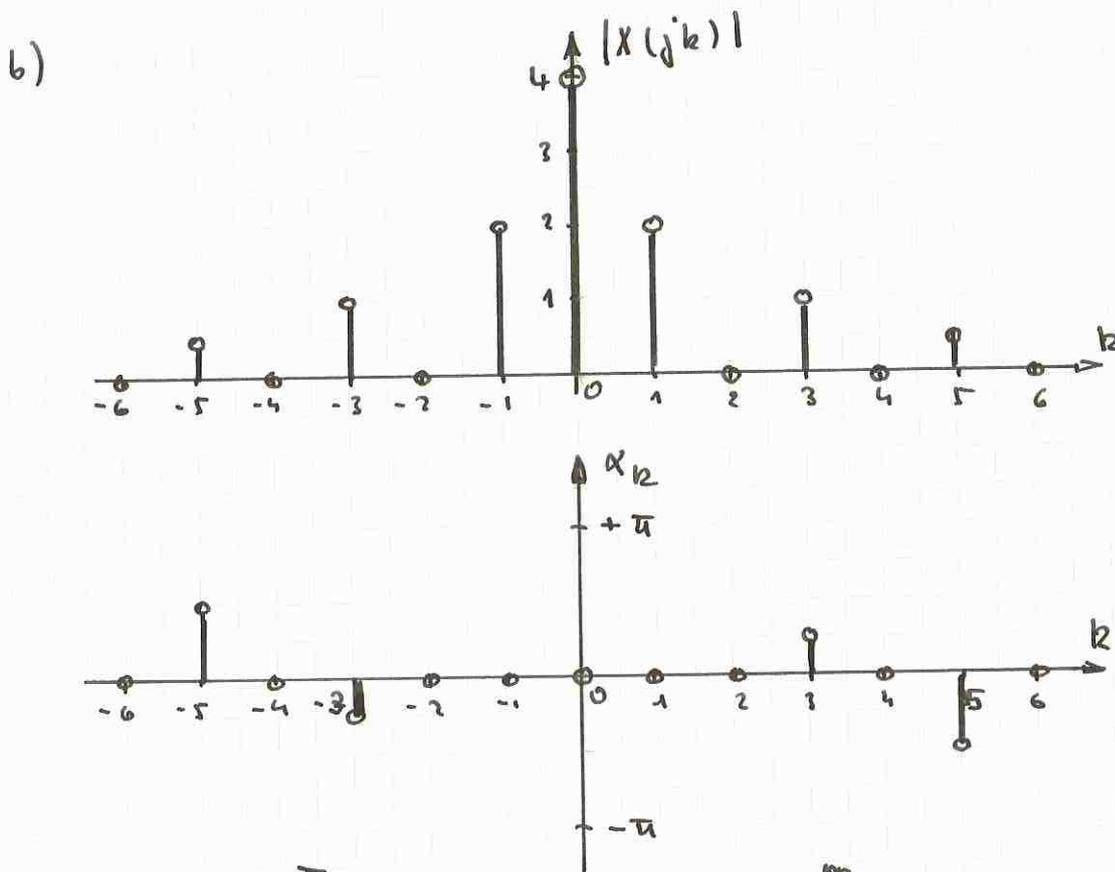
$$X_{ac}^2 \equiv P_{ac} = \frac{1}{2} (4 \cdot 13 + 4 \cdot 10) = 46 [V_{ac}^2]$$

$$\Rightarrow X_{ac} = \sqrt{46} [V_{ac}]$$

$$P = P_{dc} + P_{ac} = 50 [V_{eff}^2]$$

c 5 F 5

$$\begin{aligned}
 a) \quad x(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k\bar{\omega} f_0 t + \alpha_k) \\
 &= 4 + 4 \cdot \cos(1 \cdot 2\bar{\omega} f_0 t + 0) \\
 &\quad + 2 \cdot \cos(2 \cdot 2\bar{\omega} f_0 t + \bar{\omega}/4) \\
 &\quad + 1 \cdot \cos(5 \cdot 2\bar{\omega} f_0 t - \bar{\omega}/2)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 c) \quad P &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \\
 &= 4^2 + \frac{1}{2} (4^2 + 2^2 + 1^2) = 26,5 \quad [V_{eff}^2] \quad \text{si } [x(t)] = V
 \end{aligned}$$

d) la valeur efficace est définie par :

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{P}$$

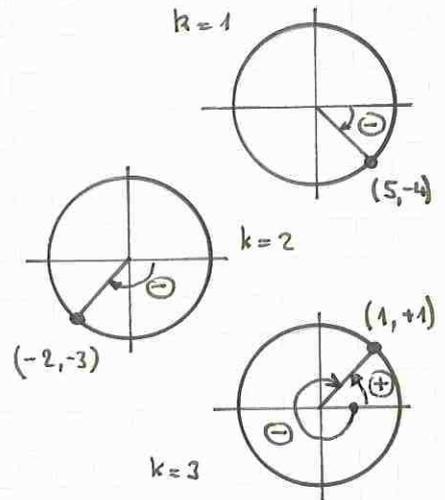
$$\text{d'où } X_{eff} = \sqrt{26,5} \approx 5,15 [V_{eff}]$$

C S F 6 :

Dans les 3 cas, $f_0 = \frac{1}{T} = 1 \text{ kHz}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{a) } x_1(t) &= 1 + 5 \cos(2\pi f_0 t) + 4 \sin(2\pi f_0 t) \\ &\quad - 2 \cos(4\pi f_0 t) + 3 \sin(4\pi f_0 t) \\ &\quad + 1 \cos(6\pi f_0 t) - 1 \sin(6\pi f_0 t) \\ \Rightarrow x_1(t) &= 1 + \sqrt{41} \cos(2\pi f_0 t - 0,675) \\ &\quad + \sqrt{13} \cos(4\pi f_0 t - 2,16) \\ &\quad + \sqrt{2} \cos(6\pi f_0 t + \pi/4) \end{aligned}$$

$$P_{x1} = 1 + 1/2(41 + 13 + 2) = 29 \text{ [V}^2\text{]}$$



$$\text{b) } x_2(t) = 1 + 3 \cos(2\pi f_0 t - \pi/3) + 2 \cos(6\pi f_0 t + \pi/2)$$

$$P_{x2} = 1 + 1/2(9 + 4) = 14.5 \text{ [V}^2\text{]}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x_3(t) &= 5 + (4 + 3j)e^{+j2\pi f_0 t} + (4 - 2j)e^{-j2\pi f_0 t} \\ &\quad + (-2 - j)e^{+j6\pi f_0 t} + (-2 + j)e^{-j6\pi f_0 t} \end{aligned}$$

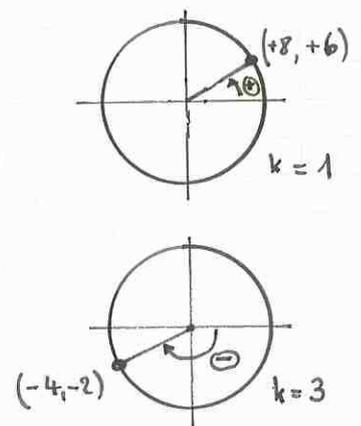
$$\begin{aligned} &= 5 + 4(e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \\ &\quad + 3j(e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) \\ &\quad - 2(e^{+j6\pi f_0 t} + e^{-j6\pi f_0 t}) \\ &\quad - j(e^{+j6\pi f_0 t} - e^{-j6\pi f_0 t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5 + 2 \cdot 4 \cdot \cos(2\pi f_0 t) - 2 \cdot 3 \cdot \sin(2\pi f_0 t) \\ &\quad - 2 \cdot 2 \cos(6\pi f_0 t) + 2 \cdot 1 \cdot \sin(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5 + 8 \cos(2\pi f_0 t) - 6 \sin(2\pi f_0 t) \\ &\quad - 4 \cos(6\pi f_0 t) + 2 \sin(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_3(t) &= 5 + 10 \cos(2\pi f_0 t + 0,643) \\ &\quad + \sqrt{20} \cos(6\pi f_0 t - 2,68) \end{aligned}$$

$$P_{x3} = 25 + 1/2(100 + 20) = 85 \text{ [V}^2\text{]}$$



C SF8 :

$$a) x(t) = 2 + \sin(\omega_0 t) + 0.25 \cos(3 \cdot \omega_0 t) \quad (i)$$

$$= 2 + \cos(\omega_0 t - \pi/2) + 0.25 \cos(3 \cdot \omega_0 t) \quad (ii)$$

$$= 2 + \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] + \frac{0.25}{2} [e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}]$$

$$= +0.125 e^{-j3\omega_0 t} + j0.5 e^{-j\omega_0 t} + 2 + j0.5 e^{j\omega_0 t} + 0.125 e^{j3\omega_0 t} \quad (iii)$$

$$b) (i) \Rightarrow a_0/2 = 2 \Rightarrow a_0 = 4$$

$$a_1 = 0 \quad b_1 = 1$$

$$a_2 = 0 \quad b_2 = 0$$

$$a_3 = 0.25 \quad b_3 = 0$$

$$(ii) \Rightarrow A_0 = 2$$

$$A_1 = 1 \quad \alpha_1 = -\pi/2$$

$$A_2 = 0 \quad \alpha_2 = 0$$

$$A_3 = 0.25 \quad \alpha_3 = 0$$

$$(iii) \Rightarrow X(j0) = 2$$

$$X(\pm j1) = \mp j0.5 = 0.5 e^{\mp j\pi/2}$$

$$X(\pm j2) = 0 = 0$$

$$X(\pm j3) = +0.125 = 0.125 e^{j0}$$

$$c) P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 4 + \frac{1}{2} (1^2 + 0.25^2) = 4.53125$$

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum A_n^2 = 4 + \frac{1}{2} (1^2 + 0.25^2) = 4.53125$$

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} |X(jk)|^2 = (0.125^2 \cdot 2 + 0.5^2 \cdot 2 + 2^2) = 4.53125$$

$$d) P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T 4 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T (0.25)^2 \cos^2(3\omega_0 t) dt$$

$$= 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} (0.25)^2 = 4.53125$$

CSF9: SIR décalé de $t_d = +T/4$

b) Soit $X_0(jk) \equiv$ spectre de la
SIR centrée

$X(jk) \equiv$ spectre de $x(t)$

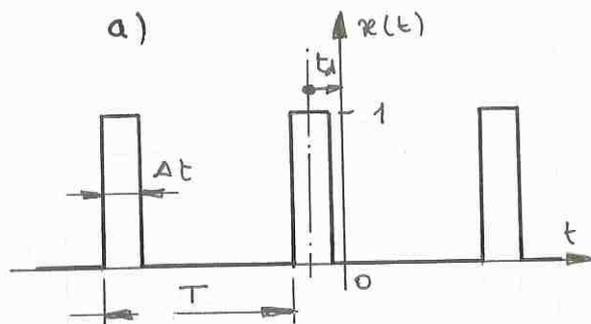
Comme $x(t) =$ SIR décalé de $+T/4$

$$= x_0(t + t_d) = x_0(t + T/4),$$

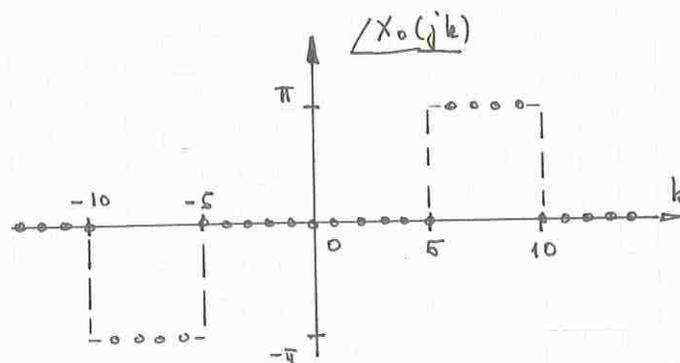
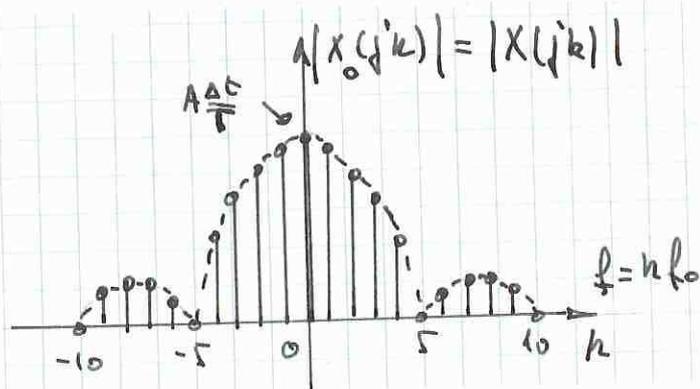
On obtient: $X(jk) = X_0(jk) \exp(+j2k\pi f_0 T/4)$

avec: $X_0(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin k\pi f_0 \Delta t}{k\pi f_0 \Delta t} = 0.4 \cdot \frac{\sin k\pi/5}{k\pi/5}$

$$\exp(+j2k\pi f_0 T/4) = \exp(+jk\pi/2)$$

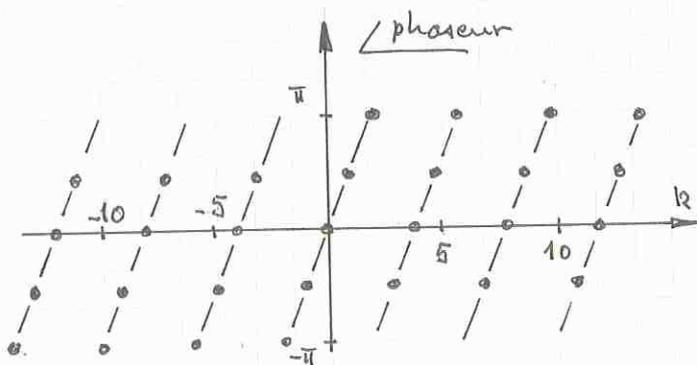


$$P = A^2 \Delta t / T = 0.8 \text{ [V}^2\text{]}$$

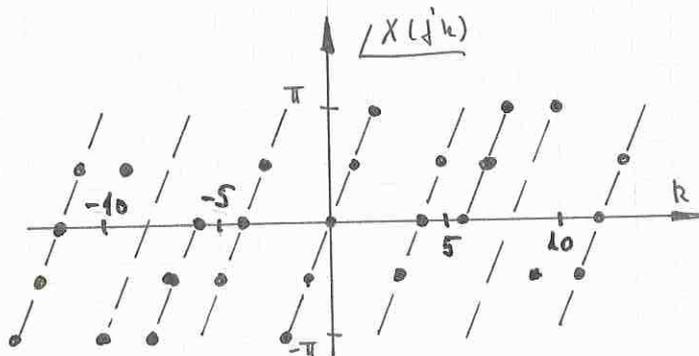


Le spectre d'amplitude $|X(jk)|$
est le même que celui de $X_0(jk)$.

Pour contre le spectre de phase
est la somme de $\angle X_0(jk)$
avec $+k\pi/2$.



On verra que le traçage
de la phase se fait
modulo 2π entre $\pm\pi$.



C SF 11

Sait $x(t)_T$ possédant les coefficients exponentiels

$$X(jk) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

et $y(t)_T$ possédant les coefficients

$$Y(jk) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T y(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

Comme $y(t) = x(t - T_r)$, il vient :

$$Y(jk) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t - T_r) \exp(-jk\omega_0 t) dt$$

Effectuons le changement de variable :

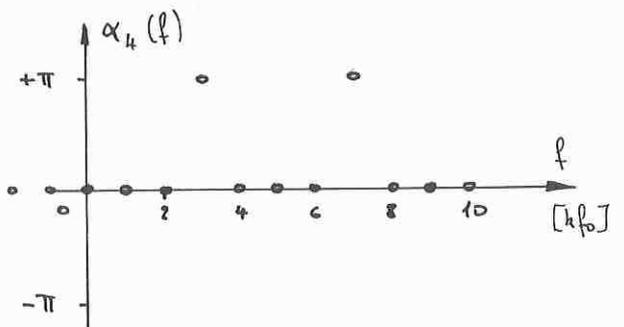
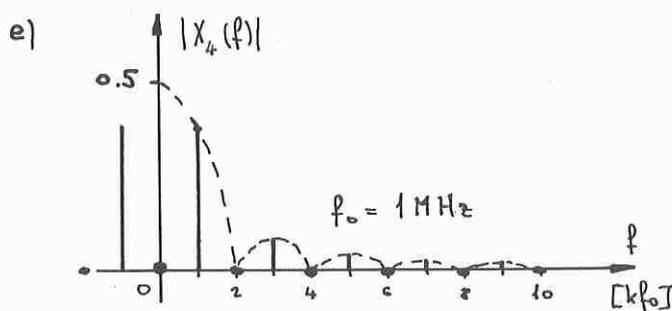
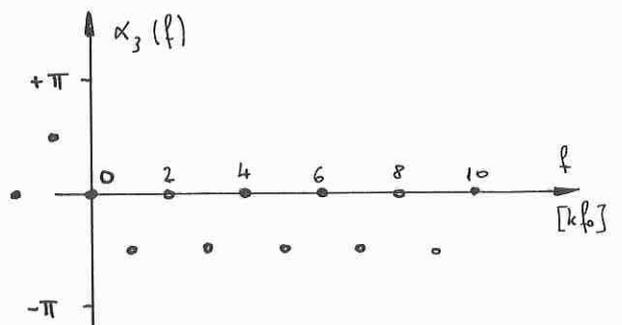
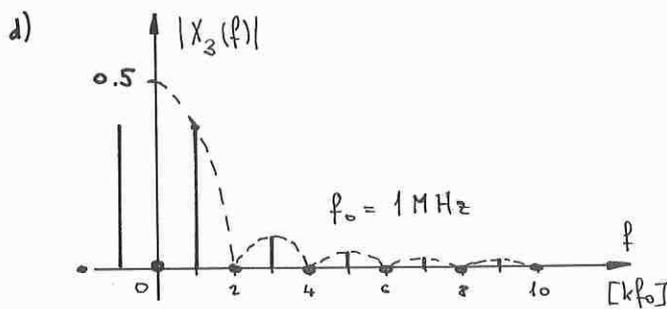
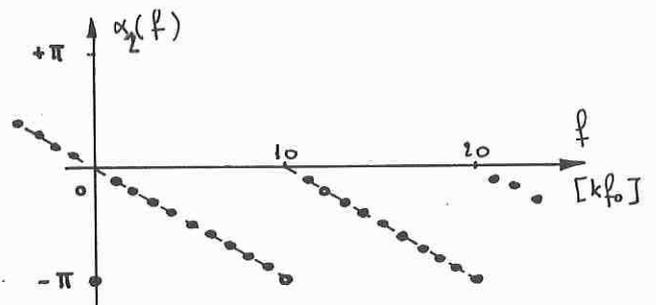
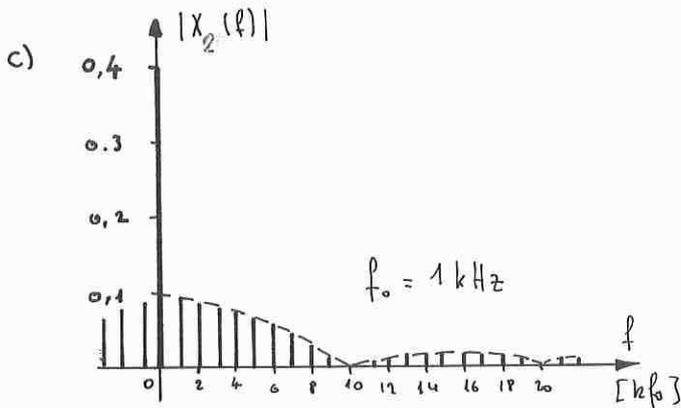
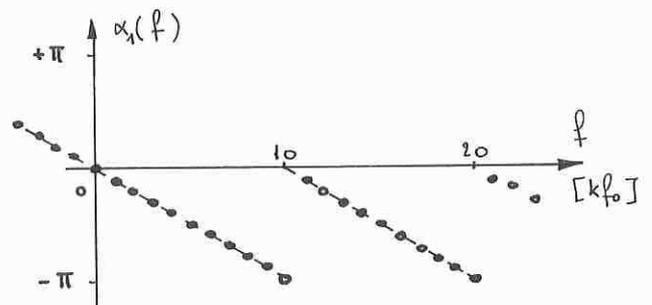
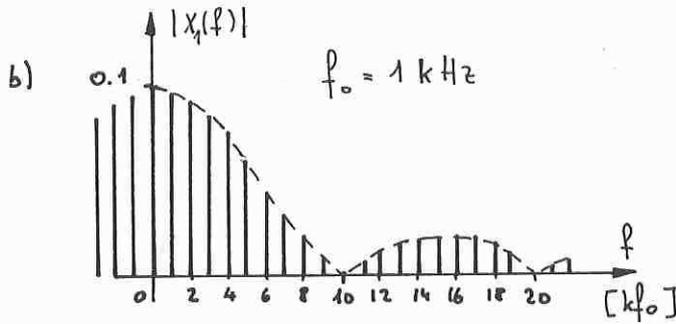
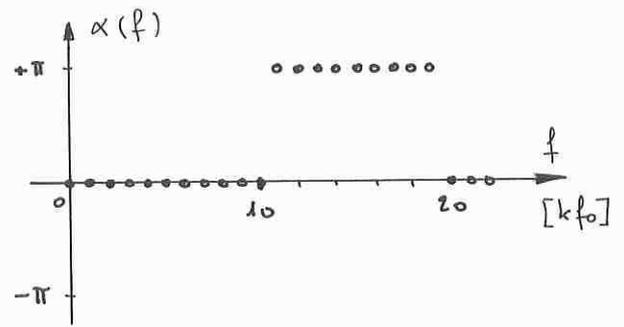
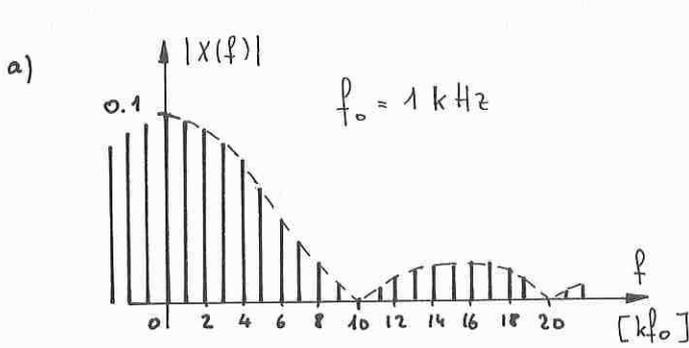
$$\begin{aligned} \theta = t - T_r & \Rightarrow \begin{array}{l} t_{\text{inf}} = 0 \rightarrow \theta_{\text{inf}} = -T_r \\ t_{\text{sup}} = T \rightarrow \theta_{\text{sup}} = T - T_r \end{array} \\ d\theta = dt & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(jk) &= \frac{1}{T} \int_{-T_r}^{T-T_r} x(\theta) \exp(-jk\omega_0 (\theta + T_r)) d\theta \\ &= \exp(-jk\omega_0 T_r) \frac{1}{T} \int_{-T_r}^{T-T_r} x(\theta) \exp(-jk\omega_0 \theta) d\theta \\ &= \exp(-jk\omega_0 T_r) \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(\theta) \exp(-jk\omega_0 \theta) d\theta}_{\equiv X(jk)} \end{aligned}$$

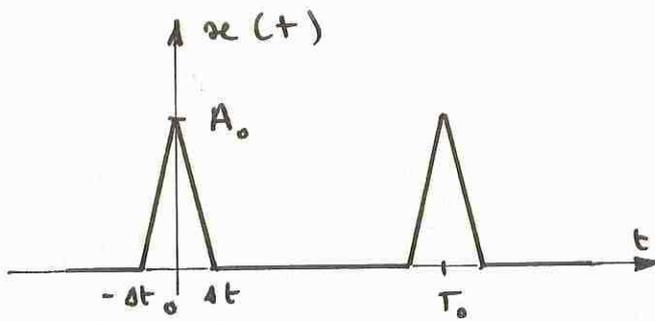
$$\rightarrow Y(jk) = \exp(-jk\omega_0 T_r) \cdot X(jk)$$

$$|Y(jk)| = |X(jk)| \angle -k\omega_0 T_r$$

C SF 12:

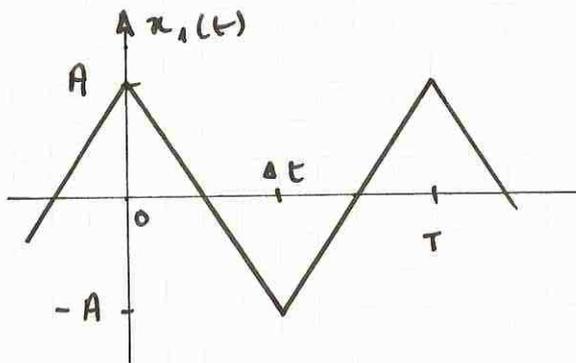


C S F 13: (SIT)



$$\text{alors } X(jk) = A_0 \frac{\Delta t}{T_0} \left[\frac{\sin k\pi f_0 \Delta t}{k\pi f_0 \Delta t} \right]^2$$
$$-\infty < k < +\infty$$

Un signal $x_1(t)$ triangulaire symétrique d'amplitude $A = 5V$ et de période $T = 1\text{ms}$ possède les caractéristiques suivantes avec $x(t)$:



$$2A = A_0$$

$$\Delta t = T/2$$

$$X(0) = 0 \quad (\text{pas de composante DC})$$

On en déduit donc que :

$$X(jk) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ 2A \frac{1}{2} \left[\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \right]^2 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(jk) = A \frac{1}{(k\pi/2)^2} \quad \text{si } k \text{ impair}$$

$$X(jk) = 0 \quad \text{si } k \text{ pair}$$

cx SF 14.1

$$X_{\text{eff}}^2 \equiv P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

$$1) P_1 = \frac{1}{T} \int_{-2\Delta t}^0 A^2 dt = + \frac{2\Delta t}{T} A^2$$

$$2) x_2(t) = A e^{+(t-T)/\tau} \Rightarrow x_2^2(t) = A^2 e^{+2(t-T)/\tau}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 e^{+2(t-T)/\tau} dt = \frac{A^2}{T} e^{-2T/\tau} \int_0^T e^{+2t/\tau} dt$$

$$= \frac{A^2}{T} e^{-2T/\tau} \frac{e^{+2t/\tau}}{2/\tau} \Big|_0^T = \frac{A^2 \tau}{2 T} \left[1 - e^{-2T/\tau} \right]$$

$$\approx \frac{A^2 \tau}{2 T} \quad \text{si } \tau \ll T \quad (\Rightarrow 2T > 5\tau)$$

$$3) x_3(t) = A e^{-|t|/\tau} = \begin{cases} A e^{+t/\tau} & \text{si } t < 0 \\ A e^{-t/\tau} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_3 = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^0 e^{+2t/\tau} dt + \frac{A^2}{T} \int_0^{T/2} e^{-2t/\tau} dt$$

$$= \frac{A^2}{T} \left[\frac{\tau}{2} (1 - e^{-T/2\tau}) + \left(\frac{-\tau}{2} \right) (e^{-T/2\tau} - 1) \right]$$

$$= \frac{A^2 \tau}{2 T} \left[1 - 2e^{-T/2\tau} + 1 \right] = A^2 \frac{\tau}{T} \left[1 - e^{-T/2\tau} \right]$$

$$\approx A^2 \frac{\tau}{T} \quad \text{si } \tau \ll T \quad (\Rightarrow T > 5\tau)$$

$$4) x_4(t) = -\frac{A}{\Delta t} (t - \Delta t) \quad \text{si } 0 \leq t \leq \Delta t$$

$$\Rightarrow P_4 = \frac{A^2}{\Delta t^2} \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} (t - \Delta t)^2 dt = \frac{A^2}{\Delta t^2} \frac{1}{3T} \left[(t - \Delta t)^3 \right]_0^{\Delta t} =$$

$$= \frac{A^2}{\Delta t^2} \cdot \frac{1}{3T} \cdot (0 + \Delta t^3) =$$

$$= \frac{A^2}{3} \frac{\Delta t}{T}$$

Une SIExp possède le spectre $X_0(jk) = A \frac{\sigma}{T} \frac{1}{1 + j \cdot 2k\bar{u}f_0\sigma}$

i) le signal $x_2(t)$ est tel que :

$$x_2(t) = x_0(-t),$$

$$\text{d'où } X_2(jk) = X_0^*(jk) = A \frac{\sigma}{T} \frac{1}{1 - j \cdot 2k\bar{u}f_0\sigma}$$

ii) le signal $x_2(t)$ est tel que

$$x_2(t) = x_0(t) + x_0(-t)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } X_2(jk) &= X_0(jk) + X_0^*(jk) \\ &= 2 \operatorname{Re}(X_0(jk)) \end{aligned}$$

$$= 2A \frac{\sigma}{T} \frac{1}{1 + (2k\bar{u}f_0\sigma)^2}$$

CSF15:

a) On a: $X(jk) = A\eta \frac{\sin k\pi\eta}{k\pi\eta}$ avec $\eta = \Delta t/T = f_0 \Delta t = 1/5$
 $= 2 \frac{\sin k\pi/5}{k\pi/5}$, $-\infty < k < +\infty$, $f_0 = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$
 $1/\Delta t = 50 \text{ kHz}$

la puissance de chaque raie spectrale vaut $P_k = |X(jk)|^2$.
 Comme le 1^{er} lobe s'arrête en $k = \pm 1/\eta = \pm 5$, la puissance comprise dans celui-ci vaut:

$$P_{\pm 5} = \sum_{-5}^{+5} |X(jk)|^2 = X^2(0) + 2 \sum_{k=1}^5 |X(jk)|^2$$

$$= A^2 \eta^2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^5 \left(\frac{\sin k\pi\eta}{k\pi\eta} \right)^2 \right]$$

$$= 4 [V^2] \cdot [1 + 2 \cdot 1.757] = 18,057 V^2 \approx 90\% P_{\text{tot}}$$

alors que $P_{\text{tot}} = \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} A^2 dt = A^2 \eta = 20 V^2$

b) On a $Y(jk) = H(jf) \cdot X(jk)$ avec $f = k f_0$. Donc:

i) $f = 10 \text{ kHz}$, $k = 1$, $f_c = 10 \text{ kHz}$

$$\Rightarrow Y(j1) = \frac{1}{1 + j \frac{10k}{10k}} \cdot 2 \frac{\sin \pi/5}{\pi/5} = 1,323 [V] \angle -\pi/4$$

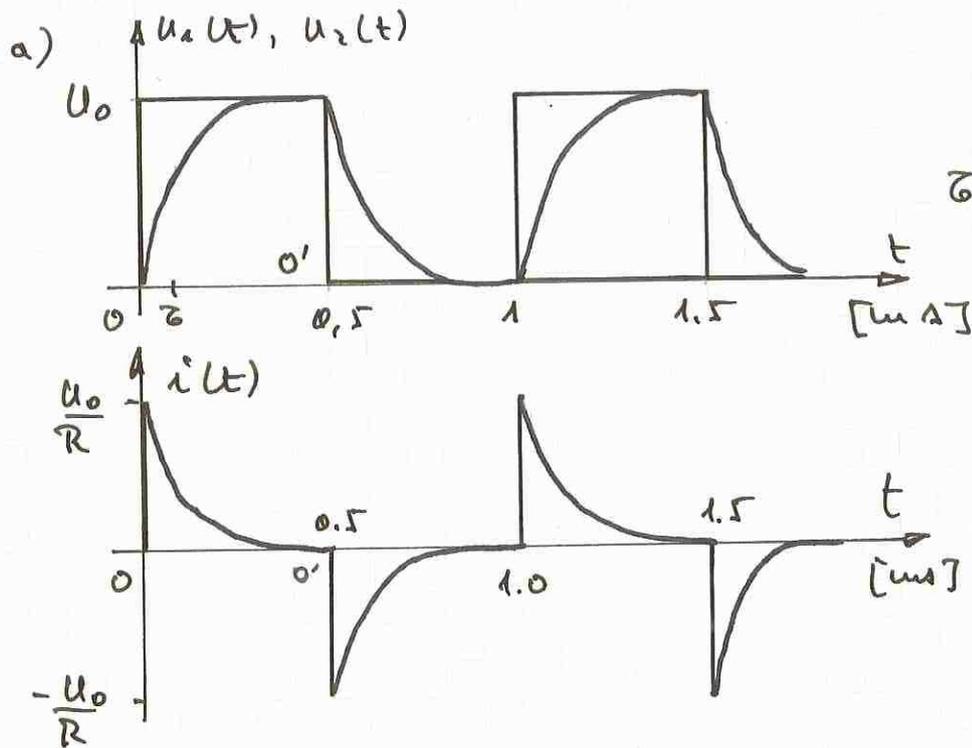
ii) $f = 40 \text{ kHz}$, $k = 4$

$$\Rightarrow Y(j4) = \frac{1}{1 + j \frac{40k}{10k}} \cdot 2 \frac{\sin 4\pi/5}{4\pi/5} = 0,113 [V] \angle -1.32$$

iii) $f = 150 \text{ kHz} = 3 \cdot \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow$ la fonction $\frac{\sin x}{x}$ passe par zéro

$$\Rightarrow X(j15) = 0 \Rightarrow Y(j15) = 0 [V] \angle 0$$

C S F 16 :



$$f_0 = 1 \text{ kHz}$$

$$\tau = RC = 10^{-4} \text{ sec}$$

$$RC \rightarrow \text{filtre passe-bas} \Rightarrow U_{2dc} = U_{1dc} = U_0 \frac{\Delta t}{T} = \underline{\underline{10 \text{ V}}}$$

b1) On a :

$$U_1^2 = U_{1dc}^2 + U_{1ac}^2$$

$$U_0^2 \frac{\Delta t}{T} = \left(U_0 \frac{\Delta t}{T} \right)^2 + U_{1ac}^2 \Rightarrow U_{1ac}^2 = 200 \text{ V}^2 - 100 \text{ V}^2 = \underline{\underline{100 \text{ V}^2}}$$

$$= 20^2 \frac{1}{2} = \underline{\underline{200 \text{ V}^2}}$$

$$\Rightarrow U_1 = 14.14 \text{ V}_{\text{eff}}$$

$$U_{1dc} = 10 \text{ V}_{\text{eff}}, \quad U_{1ac} = 10 \text{ V}_{\text{eff}}$$

b2) Le calcul de U_2^2 peut se faire de 2 manières :

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_2^2(t) dt = \overset{\text{Parseval}}{\underset{f}{\parallel}} \frac{1}{T} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |U_2(jk)|^2$$

avec $U_2(jk) = H(j\omega) \cdot U_1(jk)$

$$= \frac{1}{1 + j2k\bar{u}f_0 RC} \cdot U_0 \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin k\bar{u}f_0 \Delta t}{k\bar{u}f_0 \Delta t} \cdot e^{-j2k\bar{u}f_0 \frac{\Delta t}{2}}$$

$$\Rightarrow |U_2(jk)|^2 = \frac{(U_0/\varepsilon)^2}{1 + (2k\bar{u}/\tau_0)^2} \cdot \frac{1}{(k\bar{u}/2)^2} \quad \text{si } k \text{ impair}$$

$$|U_2(0)|^2 = U_{2dc}^2 = 100 V^2$$

$$|U_2(jk)| = 0 \quad \text{si } k \text{ pair } \neq 0$$

.....

Dans l'espace temps, on a:

$$u_2(t) = \begin{cases} U_0 (1 - e^{-t/\tau}) & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ U_0 e^{-t'/\tau} & \text{si } 0' \leq t' < T/2 \end{cases}$$

donc:

$$U_2^2 = P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T u_2^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 dt + \\ + \frac{1}{T} \int_{0'}^{T/2} U_0^2 e^{-2t'/\tau} dt'$$

$$\Rightarrow U_2^2 = \frac{U_0^2}{T} \int_0^{T/2} (1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}) dt +$$

$$+ \frac{U_0^2}{T} \int_0^T e^{-2t'/\tau} dt'$$

$$= \frac{U_0^2}{T} \left[\frac{T}{2} + 2\tau (e^{-T/2\tau} - 1) - \frac{\tau}{2} (e^{-T/\tau} - 1) - \right. \\ \left. - \frac{\tau}{2} (e^{-T/\tau} - 1) \right]$$

négl.

négligeable

$$\begin{aligned} \text{d'où : } U_2^2 &= U_{0T}^2 \left[\frac{T}{2} - 2\tau + \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} \right] = U_0^2 \frac{T/2 - \tau}{T} \\ &= U_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = 0,4 U_0^2 = \underline{\underline{160 V^2}} \end{aligned}$$

Comme : $U_2^2 = U_{2dc}^2 + U_{2ac}^2$, il vient

$$U_{2ac}^2 = 160 V^2 - 100 V^2 = 60 V^2$$

d'où : $U_2 = 12,6 V_{\text{eff}}$ $U_{2dc} = 10 V_{\text{eff}}$ $U_{2ac} = 7,75 V_{\text{eff}}$

b3) Dans l'espace temps, on a :

$$i(t) = \begin{cases} U_0/R e^{-t/\tau} & \text{si } 0 \leq t < T/2 \\ -U_0/R e^{-t'/\tau} & \text{si } 0 \leq t' < T/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I^2 &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \frac{U_0^2}{R^2} \int_0^{T/2} e^{-2t/\tau} dt + \\ &\quad + \frac{1}{T} \frac{U_0^2}{R^2} \int_0^{T/2} e^{-2t'/\tau} dt' \\ &= \frac{2}{T} \frac{U_0^2}{R^2} \int_0^{T/2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{2}{T} \frac{U_0^2}{R^2} \underbrace{\left(1 - e^{-T/\tau} \right)}_{\text{veff.}} \cdot \frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

d'où $I^2 = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{U_0^2}{R^2} = \frac{40 V^2}{R^2} = 40 \cdot 10^{-6} A^2$

Comme $I_{dc} = 0$, il vient $I_{ac}^2 = I^2$

d'où $I_{ac} = \underline{\underline{6,3 mA_{\text{eff}}}}$

CSF 21:

$$\begin{aligned} \text{Ou a: } u_2(t) &= \alpha A \sin \omega_0 t + \beta A^2 \sin^2 \omega_0 t \\ &= \alpha A \sin \omega_0 t + \beta \frac{A^2}{2} (1 - \cos 2\omega_0 t) \\ &= \frac{\beta}{2} A^2 + \alpha A \sin \omega_0 t - \frac{\beta}{2} A^2 \cos 2\omega_0 t \end{aligned}$$

$$\text{A.N. } \rightarrow = 10 [1 + \sin \omega_0 t - \cos 2\omega_0 t]$$

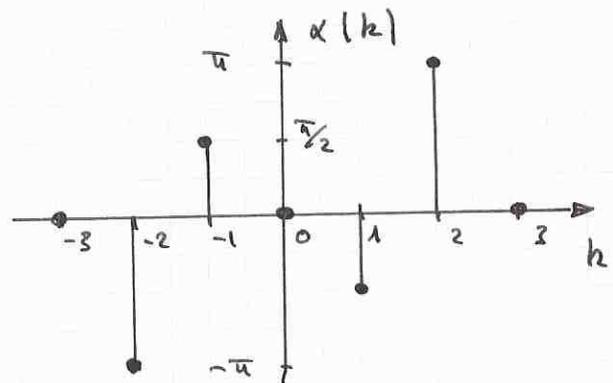
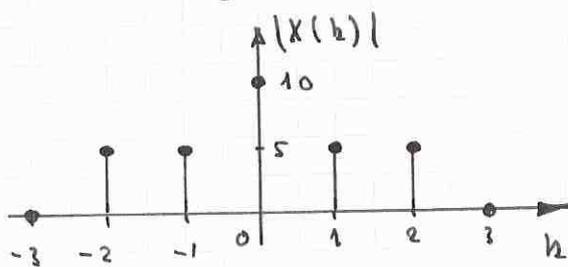
a) Pour obtenir les composantes spectrales, il suffit de passer à la représentation exponentielle :

$$u_2(t) = 10 \left[1 + \frac{1}{2j} e^{+j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{2} e^{+j2\omega_0 t} - \frac{1}{2} e^{-j2\omega_0 t} \right]$$

$$\text{d'où : } U_2(\pm j2) = -10/2 = 5 e^{\pm j\pi}$$

$$U_2(\pm j1) = \pm \frac{10}{2j} = \pm 5 e^{-j\pi/2} = 5 e^{\mp j\pi/2}$$

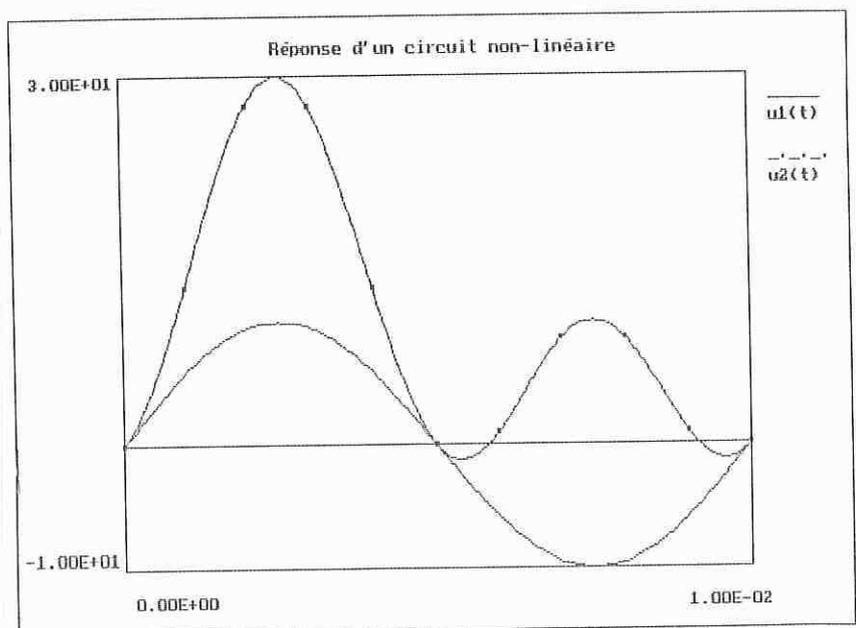
$$U_2(0) = 10$$



$$b) P_{u_1} = \frac{A^2}{2} = 50 \text{ V}^2; \quad P_{u_2} = \frac{\beta^2 A^4}{4} + \frac{\alpha^2 A^2}{2} + \frac{\beta^2 A^4}{4} = 200 \text{ V}^2$$

$$\begin{aligned} c) \quad (TDH)^2 &= \frac{X^2(2) + X^2(3) + \dots}{X^2(1)} \\ &= \frac{X^2(2)}{X^2(1)} \\ &= \frac{5^2}{5^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow TDH = 100\%$$



a) Signal $x_1(t)$ = suite d'impulsions impaires (SII)

$$P_{e1} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} A_1^2 dt = A_1^2 \frac{2\Delta t}{T} = \frac{8}{5} = \underline{\underline{1.6 V^2}}$$

Comme on ne connaît pas l'expression temporelle du signal de sortie du filtre, on doit calculer P_{s1} dans l'espace des fréquences limitées à $f_c = 4,5 \text{ kHz} = 4,5 f_0 \Rightarrow |k| \leq 4$

On a vu à l'exercice SF10, que le spectre d'une SII est donné par :

$$X_1(jk) = -j \frac{2A}{T} \frac{\Delta t}{k\pi f_0 \Delta t} \frac{\sin^2(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t}, \quad -\infty \leq k \leq +\infty$$

donc :

$$Y_1(jk) = \begin{cases} X_1(jk), & -4 \leq k \leq +4 \\ 0 & \text{si } |k| > 4 \end{cases}$$

La puissance du signal de sortie vaut donc :

$$\begin{aligned} P_{s1} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |Y_1(jk)|^2 = \underbrace{X_1^2(0)}_0 + 2 \sum_{k=1}^4 |X_1(jk)|^2 \\ &= 2 \left(\frac{2A}{T} \Delta t \right)^2 \sum_{k=1}^4 \frac{\sin^4(k\pi/5)}{(k\pi/5)^2} = \\ &= 2 \cdot 16/25 [0,302 + 0,518 + 0,230 + 0,0189] = \underline{\underline{1,368 V^2}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$P_{s1}/P_{e1} = \frac{1,368 V^2}{1,60 V^2} = 85,5\%$$

b) Signal $x_2(t)$ = suite d'exponentielles croissantes :

$$\begin{aligned} P_{e2} &= \frac{1}{T} \int_0^T x_2^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 e^{2(t-T)/\tau} dt = \\ &= \frac{A^2}{T} e^{-2T/\tau} \int_0^T e^{+2t/\tau} dt = \frac{A^2}{T} e^{-2T/\tau} \cdot \frac{\tau}{2} e^{+2t/\tau} \Big|_0^T \\ &= \frac{A^2}{T} \frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} \left[e^{2T/\tau} - 1 \right] = \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{T} \left[1 - \underbrace{e^{-2T/\tau}}_{\ll 1} \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P_{e2} \approx \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{T} = \frac{25V^2}{2} \frac{0.1\mu s}{1\mu s} = \underline{\underline{1,25 V^2}}$$

Ici également, il nous faut connaître le spectre $Y_2(jk)$ qui est le même que celui de $X_2(jk)$ et $|k| \leq 4$.

L'observation de $x_2(t)$ montre que $x_2(t) = x_0(-t) =$ repliement d'une suite d'expan. amorties. On a donc :

$$X_2(jk) = \text{TF}(x_0(-t)) = X_0^*(jk) = \left[A \frac{\tau}{T} \frac{1}{1 + j2k\tau f_0 \tau} \right]^*$$

d'où :

$$X_2(jk) = A \frac{\tau}{T} \frac{1}{1 - j2k\tau f_0 \tau} = 0,5 \frac{1}{1 - j2k\tau/10}$$

La puissance du signal de sortie vaut donc :

$$\begin{aligned} P_{s2} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |Y_2(jk)|^2 = X_2^2(0) + 2 \sum_{k=1}^4 |X_2(jk)|^2 \\ &= A^2 \frac{\tau^2}{T^2} + 2 A^2 \frac{\tau^2}{T^2} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{1 + (2k\tau f_0 \tau)^2} \\ &= \left(A \frac{\tau}{T} \right)^2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{1 + (k\tau/5)^2} \right] \approx \underline{\underline{0,98 V^2}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P_{s2}/P_{e2} = \frac{0,98V^2}{1,25V^2} = 78,4\%$$

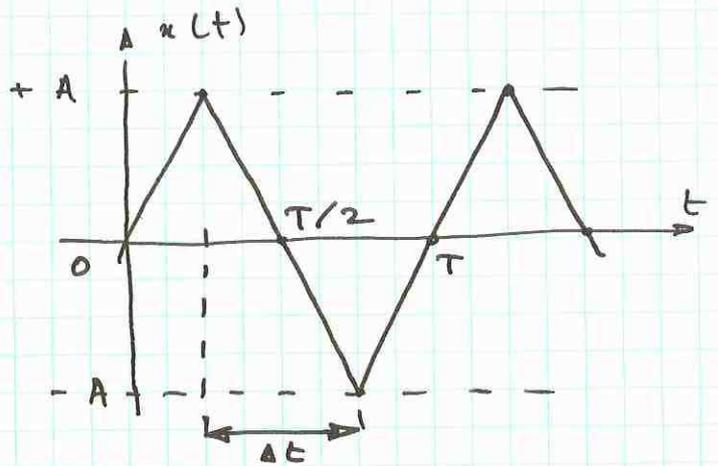
CSF 24 :

a) Signal triangulaire :

$$X(jk) = 2A \frac{\Delta t}{T} \left[\frac{\sin k\pi \Delta t}{k\pi \Delta t} \right]^2$$

avec $\Delta t/T = 1/2$

$$\Rightarrow X(jk) = A \left[\frac{\sin k\pi/2}{k\pi/2} \right]^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 4A/(k\pi)^2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$



b) Taux de distorsion :

$$TDH^2 = \frac{\sum_{k \geq 1} |X(jk)|^2}{|X(j1)|^2} = \sum_{k \geq 1 \text{ impair}} \left[\frac{4A}{(k\pi)^2} \right]^2 / \left[\frac{4A}{\pi} \right]^2$$

$$= \sum_{k \geq 1, \text{ impair}} 1/k^4 = \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

$$\approx 1,466 \cdot 10^{-2} = \left(\underline{\underline{12,1\%}} \right)^2$$

↑ $k=23$

Meux : $TDH^2 = \frac{P_{\text{tot}} - P_1}{P_1} = \frac{P_{\text{tot}}}{P_1} - 1$

avec $P_{\text{tot}} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \left(4A \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{A^2}{3}$

$$P_1 = 2 |X(j1)|^2 = 2 \left[\frac{4A}{\pi} \right]^2 = \frac{32A^2}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow TDH^2 = \frac{A^2}{3} \cdot \frac{\pi^4}{32A^2} - 1 = \frac{\pi^4}{96} - 1 =$$

$$= 1,468 \cdot 10^{-2} = \left(\underline{\underline{12,1\%}} \right)^2$$

2 Signaux non périodiques

Voir également les corrigés manuscrits annexés.

TF 6

		fréquence	temps
1		la partie réelle de $X(jf)$ est nulle	le signal $x(t)$ est impair
2		la partie imaginaire de $X(jf)$ est nulle	le signal $x(t)$ est pair
1.	3	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est réel	en décalant $x(t)$ de t_0 , on obtient un signal pair
	4	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est imaginaire	en décalant $x(t)$ de t_0 , on obtient un signal impair
	5	$X(jf)$ est continu	le signal $x(t)$ est non périodique

Signaux	a	b	c	d	e	f
2. Propriétés	2, 4	3, 5	4	1, 5	2, 5	1, 5
t_0	± 0.5	-2	-0.5			

3. Un signal périodique constitué de deux triangles différents.

TF 7

1. On sait que le spectre d'un signal triangulaire centré $x_0(t)$ est un sinus cardinal à la puissance 2; son spectre de phase est donc nul. Comme le signal proposé est constitué de deux triangles, son spectre de phase ne dépend que du décalage par rapport à l'origine $t_d = -1$ msec. On a donc

$$\angle X(jf) = \angle X_0(jf) + 2\pi f t_d = 0 - 2\pi 10^{-3} \cdot f \text{ [rad]}$$

2. On a vu que

$$X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1 \cdot 2 \text{ msec} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ [sec]}$$

3. De même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df = x(t=0) = 1 \text{ [V]}$$

4. Grâce au théorème de Parseval, on sait que

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

avec

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = 4 \int_0^{t=0.001} \left(\frac{1}{1\text{msec}} t \right)^2 dt \\ &= 4 \cdot 10^6 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{0.001} \\ &= \frac{4}{3} 10^{-3} [\text{V}^2 \text{sec}] \end{aligned}$$

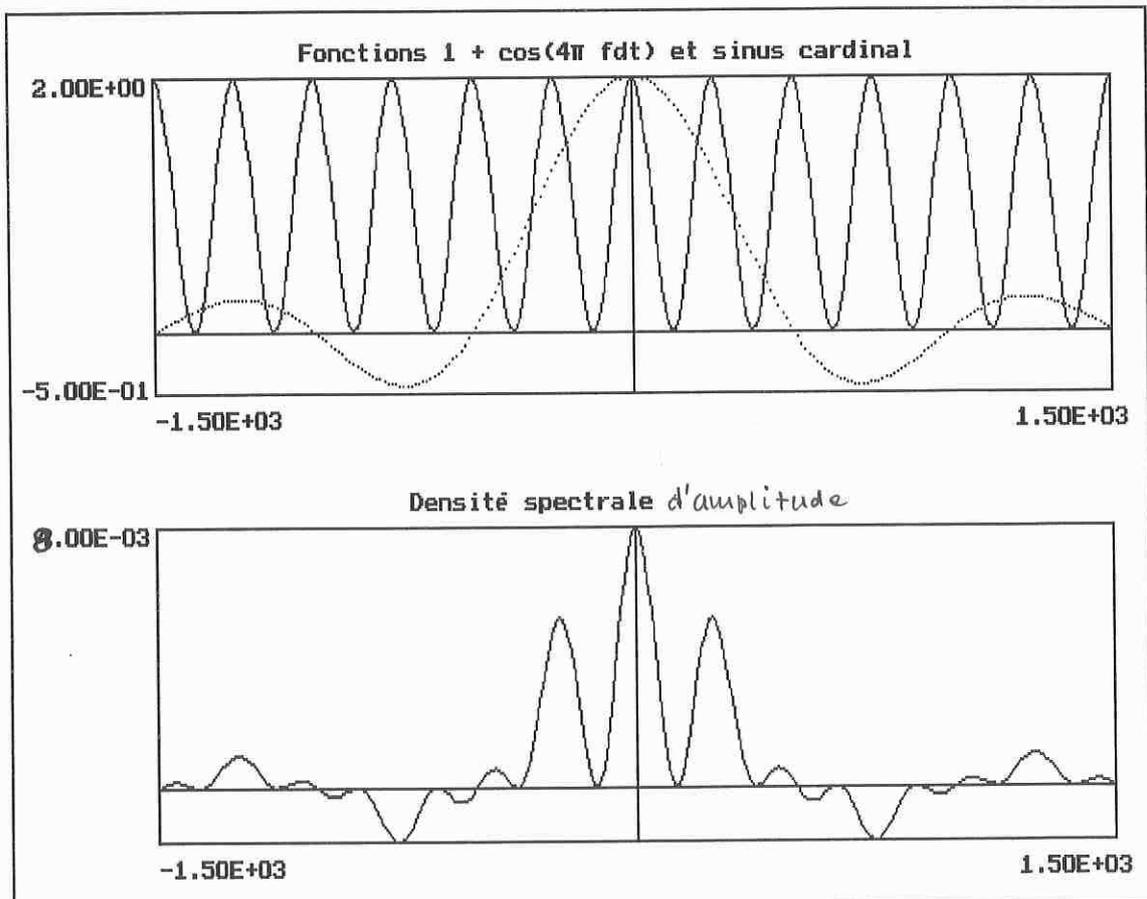
CTFA :

En utilisant $X_0(jf) = A \Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t}$ (SIR) et le théorème du décalage, on obtient :

$$X(jf) = A \Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \left[e^{+j4\pi f \Delta t} + 2 + e^{-j4\pi f \Delta t} \right]; \quad t_d = 2 \Delta t$$
$$= 2 A \Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \left[1 + \cos(4\pi f \Delta t) \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = 1 \\ \Delta t = 2 \mu\text{s} \end{cases}$$

Pour esquisser $X(jf)$, on notera que la fonction sinc passe par 0 en $k/\Delta t$, c.-à-d. tous les multiples de 500 Hz et que la fonction $\cos(4\pi f \Delta t) = \cos(2\pi f 2\Delta t)$ est oscillante avec une période $F = \frac{1}{2\Delta t} = 250 \text{ Hz}$.

Attention: l'oscillation a lieu dans le domaine des fréquences et pas dans l'espace temps!



CTF2:

En comparant $x(t)$ et $y(t)$, on voit que l'on a:

$$y(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

donc
$$Y(jf) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{X(jf)}{j\pi f} + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \right]$$

Comme $x(t)$ provient de la différence de 2 impulsions décalées, on a également:

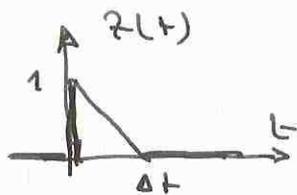
$$\begin{aligned} X(jf) &= +A\Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} e^{+j\pi f \Delta t/2} \\ &\quad - A\Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} e^{-j\pi f \Delta t/2}; \quad A = 1 \\ &= A\Delta t \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \cdot 2j \cdot \sin \pi f \Delta t \end{aligned}$$

et
$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$

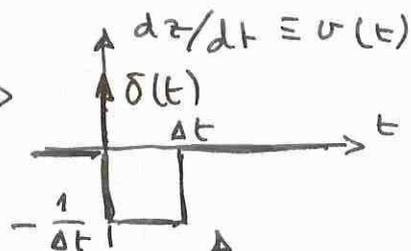
donc:
$$\begin{aligned} Y(jf) &= A\Delta t \frac{1}{\Delta t} \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \cdot \frac{2j}{j\pi f} \cdot \sin \pi f \Delta t \\ &= A\Delta t \left[\frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \right]^2 \end{aligned}$$

CTF3 :

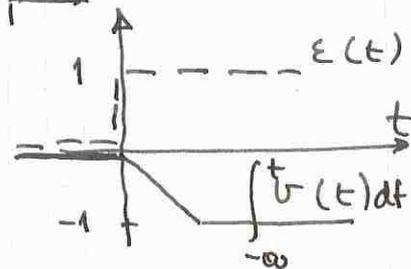
a) On voit que



⇒



$$\text{donc : } z(t) = \int_{-\infty}^t v(t) dt + \varepsilon(t)$$



En utilisant les propriétés de la TF, il vient :

$$z(jf) = \frac{V(jf)}{j\omega f} + \frac{1}{2} V(0) \delta(f) + \frac{1}{j\omega f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

avec $V(jf) = -1 \cdot \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} e^{-j\pi f \frac{\Delta t}{2}}$ et $V(0) = -1$

$$\text{donc } z(jf) = \frac{1}{j\omega f} \left[1 - \frac{\sin \pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} \cdot e^{-j\pi f \Delta t} \right] \quad (1)$$

b) On voit que $y(t) = z(t) + z(-t)$

$$\text{donc } Y(jf) = z(jf) + z^*(jf) = 2 z_r(jf)$$

Concl : si on connaît $Y(jf)$, on peut en déduire $z_r(jf)$, mais pas $z_i(jf)$.

c) On a : $z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) dt = \Delta t / 2$. Partant de (1), on peut calculer $z(jf) |_{f \rightarrow 0}$ en considérant

f petit, on a : $\sin \pi f \Delta t \approx \pi f \Delta t$; $\exp(-j\pi f \Delta t) \approx 1 - j\pi f \Delta t$

donc :

$$z(jf) |_{f \rightarrow 0} = \frac{1}{j\omega f} \left[1 - \frac{\pi f \Delta t}{\pi f \Delta t} (1 - j\pi f \Delta t) \right] = \frac{\Delta t}{2}$$

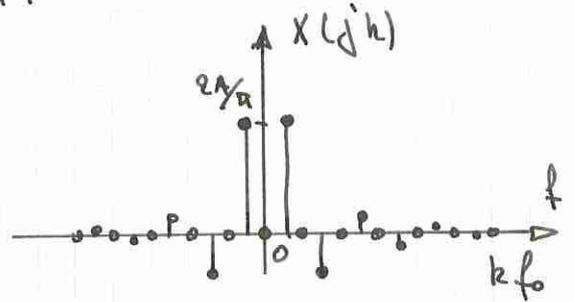
(c.q.f.d)

CTF4:

$$\text{On a: } x(t) \xleftrightarrow{SF} X(jk) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ + \left| \frac{2A}{k\pi} \right| & \text{si } k = \pm 1, \pm 5, \pm 9 \dots \\ - \left| \frac{2A}{k\pi} \right| & \text{si } k = \pm 3, \pm 7, \pm 11 \dots \end{cases}$$

donc :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(jk)}_{\text{coefficient}} e^{+j2k\pi f_0 t}$$



$$\downarrow \text{TF} \quad \downarrow \text{TF}$$
$$X(jf) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(jk) \cdot \delta(f - kf_0)$$

Concl: en SF : chaque phaseur est représenté par une raie spectrale d'ampl. $\left| \frac{2A}{k\pi} \right|$

en TF : chaque phaseur est représenté par un Dirac d'"amplitude" $\left| \frac{2A}{k\pi} \right|$

X

CTF5:

$$\text{on a: } X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{+at} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} dt =$$
$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-at} dt = 2 \frac{e^{-at}}{-a} \Big|_0^{\infty} = 2/a = X(jf=0)$$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df = 2 \int_0^{\infty} \frac{2a df}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{4a}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{df}{\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + f^2}$$
$$= \frac{4a}{(2\pi)^2} \cdot \frac{2\pi}{a} \cdot \arctg \frac{f}{(a/2\pi)} \Big|_0^{\infty} = \frac{8\pi}{4\pi^2} \cdot (\pi/2 - 0)$$
$$= 1 = x(t=0)$$

(c.q.f.d)

CTF 8:

$$\text{On a } \mathcal{F}(Ax(t)) = AX(jf) = \frac{A \cdot \bar{\omega} f_0}{(a + j\bar{\omega} f)^2 + (\bar{\omega} f_0)^2}$$

Comme $\lim_{a \rightarrow 0} Ax(t) = y(t)$, il vient :

$$Y(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} AX(jf) = \frac{A \cdot \bar{\omega} f_0}{(\bar{\omega} f_0)^2 - (\bar{\omega} f)^2} \in \mathbb{R}, \forall f \neq \pm f_0$$

Ce résultat réel ne nous donne aucune information sur la partie imaginaire $Y_i(jf)$ qui peut être non-nulle. On peut la trouver en écrivant

$$A \sin(\bar{\omega} f_0 t) = A \sin(\bar{\omega} f_0 t) \cdot \mathcal{E}(t) - A \sin(-\bar{\omega} f_0 t) \cdot \mathcal{E}(t) = y(t) - y(-t)$$

$$\text{avec } \mathcal{E}(t) = \text{font unité} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En transformant les 2 membres de cette équation, il vient :

$$A \frac{j}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)] = Y(jf) - Y^*(jf) = 2 \text{Im}(Y(jf))$$

$$\Rightarrow \text{Im}(Y(jf)) = A \frac{j}{4} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)] \neq 0$$

Ainsi la transformée d'une sinusoïde démarant au temps $t=0$ vaut-elle :

$$Y(jf) = A \left[\frac{\bar{\omega} f_0}{(\bar{\omega} f_0)^2 - (\bar{\omega} f)^2} + \frac{j}{4} (\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)) \right]$$

CTF 9:

$$\text{On a : } U_1(jf) = \frac{U_0}{a + j2\pi f \tau} , \text{ avec } a = \frac{1}{\tau_a} = 100 \text{ sec}^{-1}$$

le circuit RC possède la transmittance :

$$H(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{1 + j2\pi f \tau} ; \tau = 10^{-3} \text{ sec}$$

donc :

$$\begin{aligned} U_2(jf) &= \frac{U_0}{a + j2\pi f \tau} \cdot \frac{1}{1 + j2\pi f \tau} \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{U_0}{a + j2\pi f \tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} \end{aligned}$$

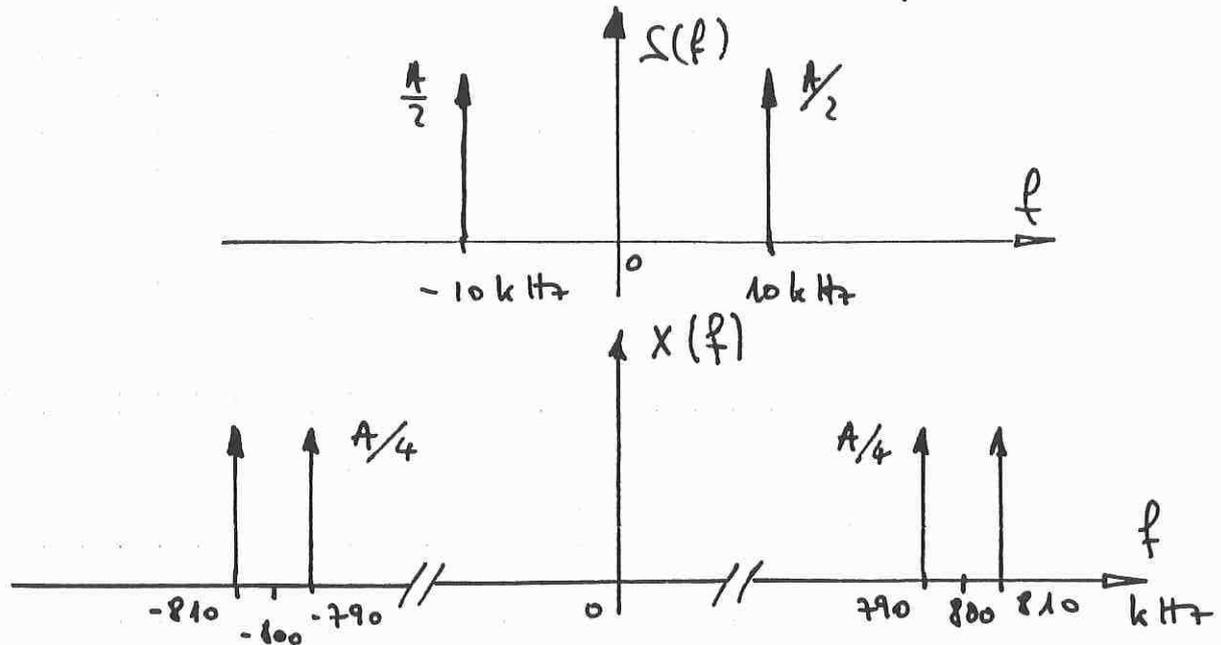
dont la TF inverse vaut :

$$\begin{aligned} U_2(t) &= \frac{U_0}{\tau} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} - a} \left(e^{-at} - e^{-t/\tau} \right) \\ &= \frac{U_0}{1 - a\tau} \left(e^{-at} - e^{-t/\tau} \right) \\ &= \frac{U_0}{1 - 0.1} \left(e^{-100t} - e^{-1000t} \right) \end{aligned}$$

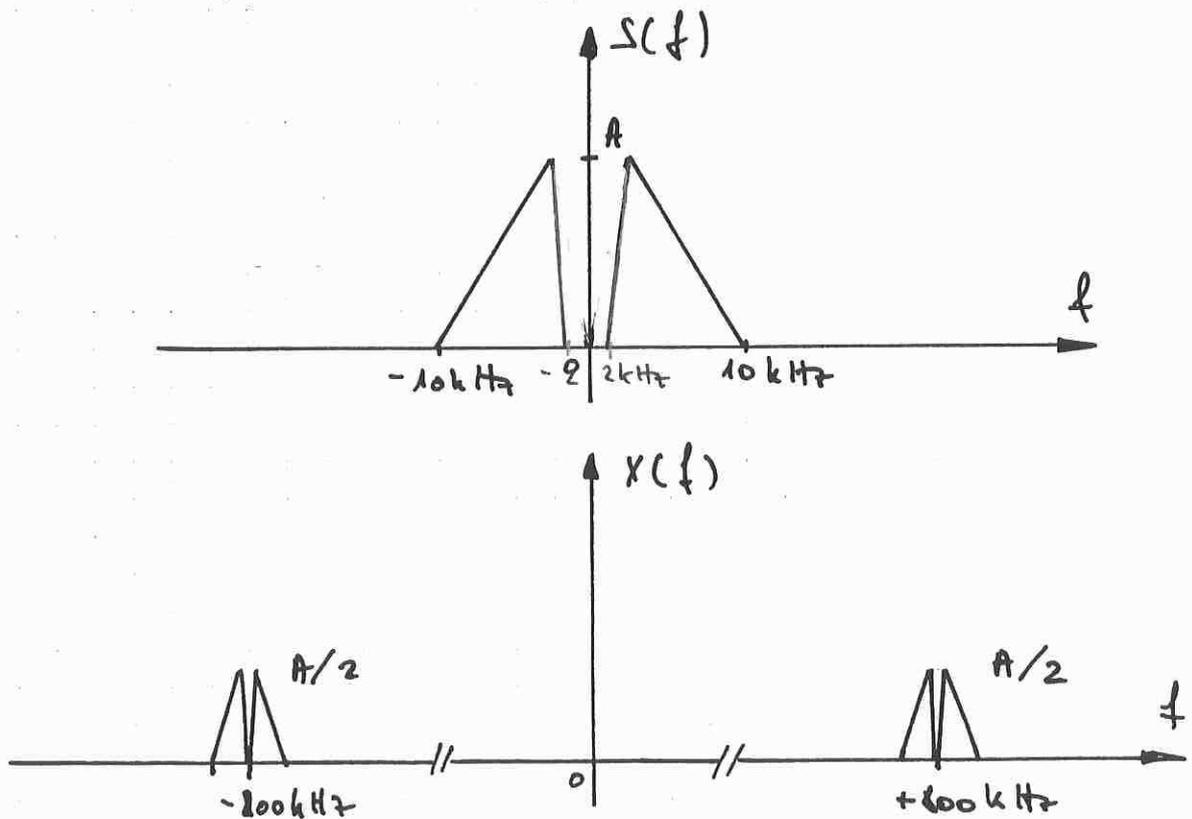
CTF 10:

Soit $x(t) = m(t) \cdot s(t) = A \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_1 t$
 $= \frac{A}{2} \sin(\omega_0 + \omega_1) t + \frac{A}{2} \sin(\omega_0 - \omega_1) t$

a) $s(t) = A \cos \omega_1 t$, $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 10 \text{ kHz}$

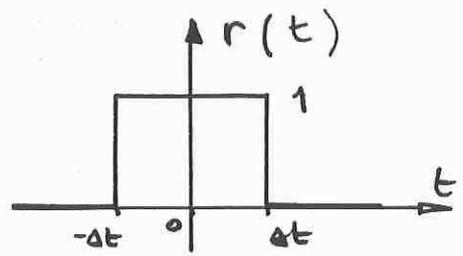


b) $s(t)$ possède un spectre continu:



CTF 11 :

Soit $r(t)$ la fonction

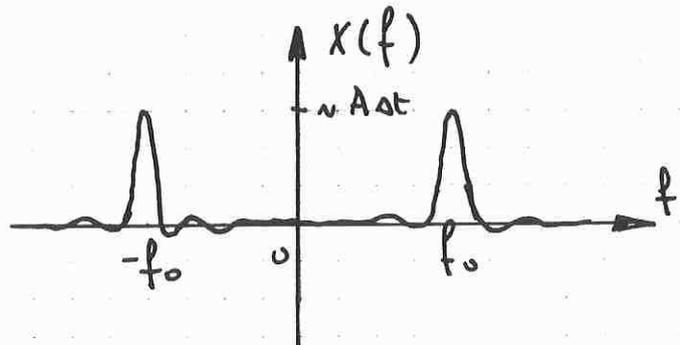
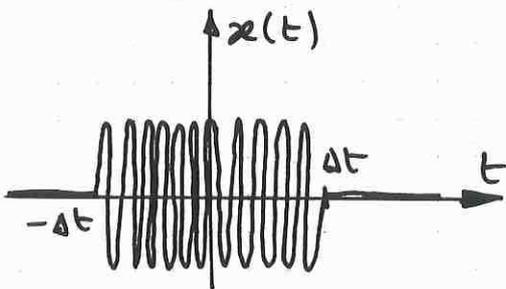


$$\begin{aligned} \text{alors } x(t) &= A r(t) \cdot \cos \omega_0 t \\ &= \frac{A}{2} r(t) [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } X(j\omega) = \frac{A}{2} [R(j(\omega - \omega_0)) + R(j(\omega + \omega_0))]$$

$$\text{avec } R(j\omega) = \mathcal{F}(r(t)) = 2\Delta t \frac{\sin(\omega \Delta t)}{\omega \Delta t}$$

l'expression de $X(j\omega)$ signifie que l'observation d'une cosinussoïde pendant une durée finie $2\Delta t$ transforme les deux pics de Dirac correspondant à cette cosinussoïde en 2 fonctions sinc/x centrées en $+f_0$ et $-f_0$:



CTF 13:

$$\text{On a: } \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}; \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{donc: } \operatorname{sgn}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(-t)$$

$$\text{d'où: } \mathcal{S}(j\omega) = \mathcal{E}(j\omega) - \mathcal{E}^*(j\omega)$$

Que vaut la différence d'une fonction complexe et de son conjugué? On a:

$$(a + jb) - (a + jb)^* = (a + jb) - (a - jb) = +2jb$$

$$\text{Donc: } \mathcal{S}(j\omega) = j2 \operatorname{Im}(\mathcal{E}(j\omega))$$

$$\text{avec: } \mathcal{E}(j\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{j2\omega} = \frac{1}{2} \delta(\omega) - j \frac{1}{2\omega}$$

$$\text{d'où: } \underline{\mathcal{S}(j\omega)} = j \left(\frac{-2}{2\omega} \right) = \underline{+\frac{1}{j\omega}}$$

*

CTF 14:

$$\text{On a: } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

$$\text{avec: } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \cdot H(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{+j\omega(t-\tau)} d\omega}_{h(t-\tau) \text{ par définition de la TF}} d\tau \cdot d\tau$$

$$\text{d'où } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

CTF 15:

b) On a:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(jf) e^{j2\pi f t} df \\
 &= \int_{-f_c}^{f_c} 1 \cdot e^{j2\pi f t} df = \\
 &= \frac{1}{j2\pi t} \left[e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t} \right] \\
 &= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t}
 \end{aligned}$$

$$u_1(t) = 2f_c \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \Rightarrow \text{sinus cardinal}$$

*

CTF 16:

b) On a:

$$U(jf) = U_1(j(f-f_0)) + U_1(j(f+f_0))$$

alors:

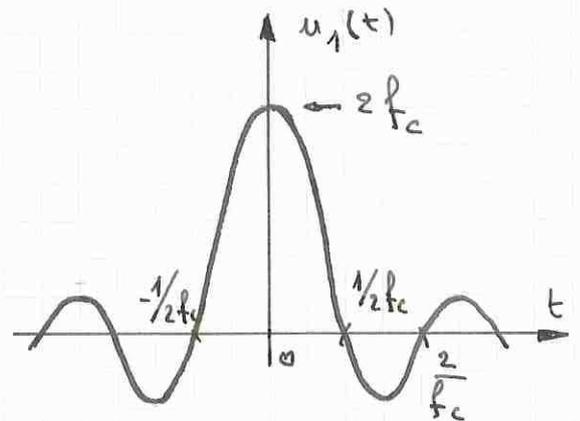
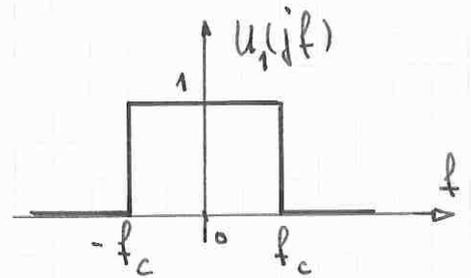
$$u(t) = U_1(t) e^{j2\pi f_0 t} + U_1(t) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= U_1(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t)$$

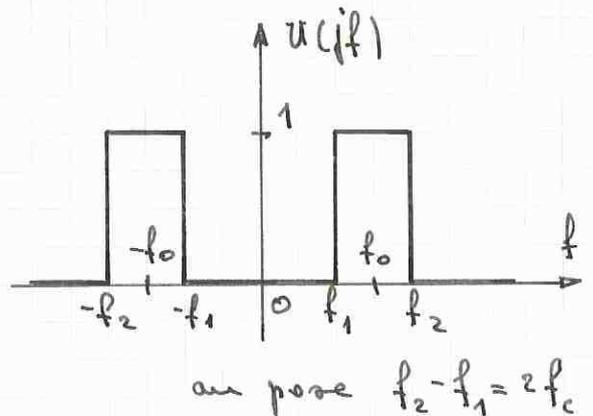
$$= 2f_c \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \cdot 2 \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } f_c &= \frac{1}{2} (f_2 - f_1) = 50 \text{ Hz} \\
 f_0 &= 150 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

a)



a)



$$\text{Energie} = W = \int |U(jf)|^2 df = 2 \cdot 1 \cdot (f_2 - f_1) = 200 \text{ [V/Hz]}^2 \cdot \text{Hz} = 200 \text{ [V}^2 \cdot \text{sec]}$$

CTF 17:

On a: $U(jf) = I(jf) Z(jf)$

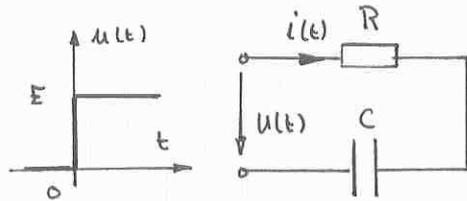
$$\Rightarrow I(jf) = \frac{U(jf)}{R + \frac{1}{j\omega f C}}$$

$$= \frac{j\omega f C}{1 + j\omega f RC} \cdot \left[\frac{E}{2} \delta(0) + \frac{E}{j\omega f} \right]$$

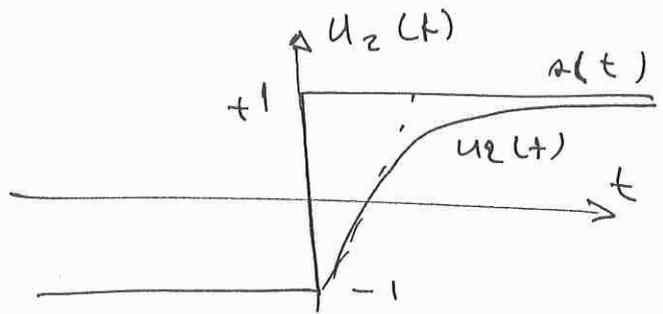
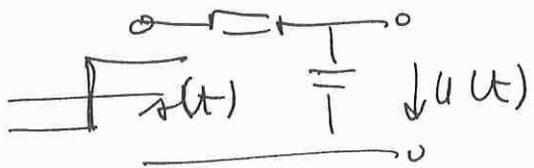
d'au $I(jf) = \underbrace{\frac{j\omega f C}{1 + j\omega f RC} E \delta(0)}_{= 0, \forall f} + \frac{j\omega f C}{1 + j\omega f RC} \cdot \frac{E}{j\omega f}$

donc: $I(jf) = \frac{EC}{1 + j\omega f RC} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{1/RC + j\omega f}$

TF⁻¹: $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} \varepsilon(t)$



CTF 18 :



ona: $U(jf) = \frac{1}{1+j2\pi fRC} S(jf)$

avec $S(jf) = \frac{2}{j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f}$

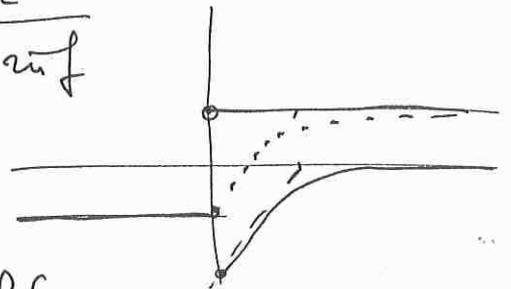
donc: $U(jf) = \frac{1}{1+j2\pi fRC} \cdot \frac{2}{j2\pi f} = \frac{A}{1+j2\pi fRC} + \frac{B}{j2\pi f}$
 $= \frac{j2\pi f(A+BRC) + B}{(1+j2\pi fRC)(j2\pi f)}$

$\Rightarrow A+BRC = 0$ et $B=2 \Rightarrow A = -2RC$

d'où $U(jf) = \frac{-2RC}{1+j2\pi fRC} + \frac{2}{j2\pi f}$
 $= \frac{-2}{1/RC + j2\pi f} + \frac{2}{j2\pi f}$

Par TFI, il vient :

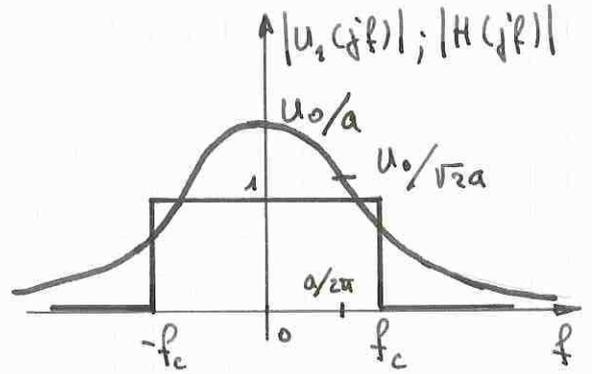
$u(t) = \text{sgn}(t) - 2e^{-t/RC} \mathcal{E}(t)$



CTF 20:

a) U_{in} : $U_1(jf) = \frac{U_0}{a + j2\pi f}$

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



done $U_2(jf) = H(jf) \cdot U_1(jf)$

$$= \begin{cases} U_1(jf) & \text{si } -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) U_{in} : $W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |U_1(jf)|^2 df$

$$= \int_0^{\infty} (U_0 e^{-at})^2 dt = \frac{U_0^2}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} = \frac{U_0^2}{2a}$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |U_2(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(t)^2 dt ; U_2(t) \text{ pas connu.}$$

$$\approx \int_{-f_c}^{+f_c} \frac{U_0^2 df}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (*) = \frac{U_0^2}{2\pi a} \operatorname{atg}\left(\frac{2\pi f}{a}\right) \Big|_{-f_c}^{+f_c}$$

$$= \frac{U_0^2}{2\pi a} \cdot 2 \operatorname{atg}\left(\frac{2\pi f_c}{a}\right) = W_1 \cdot \frac{2}{\pi} \operatorname{atg}\left(\frac{2\pi f_c}{a}\right)$$

AN: $W_1 = \frac{U_0^2}{2a} = \frac{100 V^2}{2 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 0.05 V^2/s$

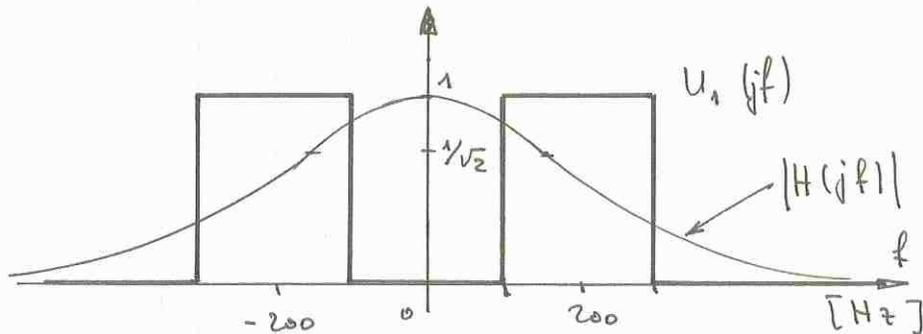
$$W_2 = \frac{U_0^2}{2a} \frac{2}{\pi} \operatorname{atg}\left(\frac{2\pi f_c}{a}\right) = \begin{cases} 0.9 \cdot W_1 & \text{si } f_c = 1000 \text{ Hz} \\ 0.5 W_1 & \text{si } f_c = \frac{a}{2\pi} \approx 160 \text{ Hz} \end{cases}$$

(*) $\int_{-f_c}^{+f_c} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-f_c}^{+f_c} \frac{df}{(a/2\pi)^2 + f^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{a}\right) \operatorname{atg}\left(\frac{f}{a/2\pi}\right) \Big|_{-f_c}^{+f_c}$

CTFU :

a) $H(jf) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC} = \frac{1}{1 + jf/f_c}$ avec $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \approx 160 \text{ Hz}$

b)



c) $E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |U_1(jf)|^2 df = 2 \int_{100}^{300} |1|^2 df = 2 \cdot 200 = \underline{\underline{400 \text{ V}^2/\text{Hz}}}$

$U_2(jf) = \frac{1}{1 + jf/f_c}$ si $|f| \in [100 \text{ Hz}, 300 \text{ Hz}]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |U_2(jf)|^2 df = 2 \int_{100}^{300} \frac{df}{1 + (f/f_c)^2} = \\ &= 2 f_c^2 \int_{100}^{300} \frac{df}{f_c^2 + f^2} = 2 f_c^2 \cdot \frac{1}{f_c} \cdot \text{atg}\left(\frac{f}{f_c}\right) \Big|_{100}^{300} \\ &= 2/f_c \left[\text{atg} \frac{300}{160} - \text{atg} \frac{100}{160} \right] = \underline{\underline{166 \text{ V}^2/\text{Hz}}} \end{aligned}$$

d) si $\tau \downarrow$, alors $f_c \nearrow$ et $E_2 \nearrow$

e) $u_2(t) = \text{TF}^{-1} [U_2(jf)]$ avec $U_2(jf) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f| \notin [100, 300] \\ \frac{1}{1 + jf/f_c} & \text{si } |f| \in [100, 300] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_2(t) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(jf) e^{+j2\pi ft} df = \\ &= \int_{-300}^{-100} \frac{e^{+j2\pi ft}}{1 + jf/f_c} df + \int_{100}^{300} \frac{e^{+j2\pi ft}}{1 + jf/f_c} df \end{aligned}$$

Rem: la primitive est une série difficile à calculer \Rightarrow utilisation de l'intégration numérique: beaucoup plus simple

CTF 22:

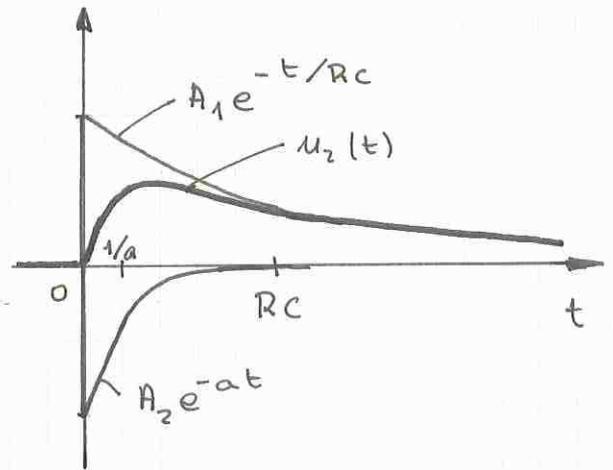
a) On a : $U_2(s) = H(s) U_1(s)$

$$\Rightarrow U_2(s) = \frac{1}{1+sRC} \cdot \frac{U_0}{s+a}$$

donc : $p_1 = -1/RC$, $p_2 = -a$

$$\Rightarrow u_2(t) = A_1 e^{-t/RC} + A_2 e^{-at}$$

avec $u_2(t=0) = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$



b) Calcul des énergies :

on a : $W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1^2(t) dt = \int_0^{\infty} U_0^2 e^{-2at} dt = \frac{U_0^2}{2a}$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |U_2(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(jf)|^2 |U_1(jf)|^2 df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2} \cdot \frac{U_0^2}{a^2+(2\pi f)^2} df$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{U_0^2 df}{(1+(2\pi fRC)^2)(a^2+(2\pi f)^2)} \quad \text{car la fonction est paire}$$

On peut décomposer la fonction en une somme de 2 fractions simples ; il vient alors :

$$W_2 = 2U_0^2 \left[\int_0^{\infty} \frac{A df}{(1+(2\pi fRC)^2)} + \int_0^{\infty} \frac{B df}{a^2+(2\pi f)^2} \right]$$

$$= 2U_0^2 \left[\frac{A}{2\pi RC} \operatorname{atg} x \Big|_0^{\infty} + \frac{B}{2\pi a} \operatorname{atg} x \Big|_0^{\infty} \right]$$

$$= 2U_0^2 \left[\frac{A}{2\pi RC} \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2\pi a} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{U_0^2}{2} \left[\frac{A}{RC} + \frac{B}{a} \right]$$

avec $A + B/a^2 = 1$ et $A + BRC^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{W_2 = 4,545 \cdot 10^{-3} \text{ J}^2 \text{ sec}}}$

CTF 22 (suite):

c) Intégration numérique:

$$\text{Pour intégrer: } W_2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{U_0^2 df}{(1+(2\pi f RC)^2)(a^2+(2\pi f)^2)}$$

il faut avoir une idée de la fréquence limite f_{lim} à choisir.

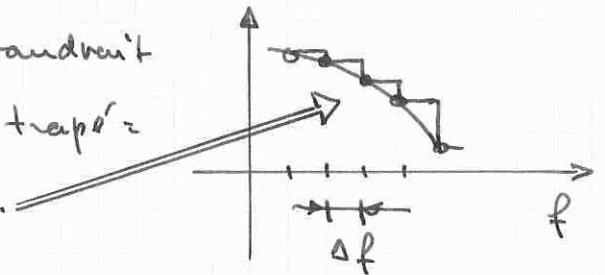
Pour cela, il suffit de calculer les fréquences caractéristiques de la fonction à intégrer. On a:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-2} \text{ sec}} = 15,9 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{a}{2\pi} = \frac{1000 \text{ sec}^{-1}}{2\pi} = 159 \text{ Hz}$$

Comme la fonction à intégrer décroît rapidement, on peut prendre $f_{lim} \approx 50 f_{max} = 50 f_2 \approx 10 \text{ kHz}$.

Mais attention; comme la fonction est décroissante les erreurs vont s'accumuler; il vaudrait mieux adopter une intégration trapézoïdale plutôt que rectangulaire.



les résultats obtenus avec le programme annexé sont les suivants:

- intégr. rectangulaire : $W_2 = 4.645 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2 \text{ sec}$
- intégr. trapézoïdale : $W_2 = 4.545 \cdot 10^{-3} \text{ V}^2 \text{ sec}$

$$\text{avec: } \left. \begin{array}{l} f_{lim} = 5000 \text{ Hz} \\ N_{points} = 5000 \end{array} \right\} \Delta f = \frac{f_{lim}}{N_{points}} = 1 \text{ Hz}$$

3 Analyse spectrale numérique

TFD 0

1. Voir correction au tableau.
2. Considérant la suite $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$, on commence par calculer son spectre discret (sa TFD) en effectuant la somme sur n

$$\begin{aligned}
 X_D[jk] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi kn/N) \\
 &= \sum_{n=0}^3 x[n] \exp(-j2\pi kn/4) \\
 &= 2 \exp(-j2\pi k \cdot 1/4) + 4 \exp(-j2\pi k \cdot 2/4) \\
 &= 2 \exp(-jk \pi/2) + 4 \exp(-jk \pi)
 \end{aligned}$$

puis on calcule les composantes spectrales pour $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
 X_D[j0] &= 2 + 4 = +6 \\
 X_D[j1] &= 2 \exp(-j \pi/2) + 4 \exp(-j \pi) = -4 - 2j \\
 X_D[j2] &= 2 \exp(-j \pi) + 4 \exp(-j 2\pi) = -2 + 4 = +2 \\
 X_D[j3] &= 2 \exp(-j 3\pi/2) + 4 \exp(-j 3\pi) = -4 + 2j
 \end{aligned}$$

Comme le spectre discret est relié aux séries de Fourier par

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{N} X_D[jk]$$

3. À ces composantes spectrales de la TFD correspondent les composantes bilatérales de la série de Fourier

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{N} X_D[jk], \quad k = 0, \dots, N - 1 = 3$$

et unilatérales A_k :

$k = 0$	$A_0 = X_{SF}[0]$	
$k = 1, \dots, N/2 - 1$	$A_k = 2 X_{SF}[jk] $	$\alpha_k = \angle X_{SF}[jk]$
$k = N/2$	$A_{N/2} = X_{SF}[jN/2] $	$\alpha_{N/2} = \angle X_{SF}[jN/2]$

On obtient ainsi

k	0	1	2	3
$X_{SF}[jk]$	1.50	$-1 - 0.5j$	0.5	$-1 + 0.5j$
$A_k \angle \alpha_k$	1.50	$2.236 \angle -2.68$	$0.5 \angle 0.00$	

On peut alors calculer le signal temporel $x(t)$ au sens de Fourier

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(4\pi f_0 t + \alpha_2) + \dots$$

Ce qui donne

$$x(t) = 1.5 + 2.236 \cos(2\pi f_0 t - 2.68) + 0.5 \cos(4\pi f_0 t)$$

Dans Matlab, les calculs ci-dessus se résument aux lignes de codes présentées dans la figure TFD0.

```

% signal x[n] et sa TFD Xd[jk]
xn = [0,2,4,0];
N = length(xn);
Xdjk = fft(xn);
nn = 0 :N-1; fk = 0 :N-1;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(N/2);
Xjku = Xdjk(1 :Ndemi+1) / N;
Ak = 2*abs(Xjku);
Ak(1) = Xjku(1); % composante DC
Ak(Ndemi) = Xjku(Ndemi); % composante de Nyquist
ak = angle(Xjku);

% paramètres temporels
Te = 1; duree = 4*Te;
Npts = 1000; tmin = -1; tmax = duree;
dt = (tmax - tmin)/Npts;
tt = tmin :dt :tmax-dt;

% signal temporel périodique
f0 = 1/duree;
xt = Ak(1)*ones(size(tt));
for k = 2 : Ndemi+1
    xt = xt + Ak(k)*cos(k*2*pi*f0*tt + ak(k));
end;

```

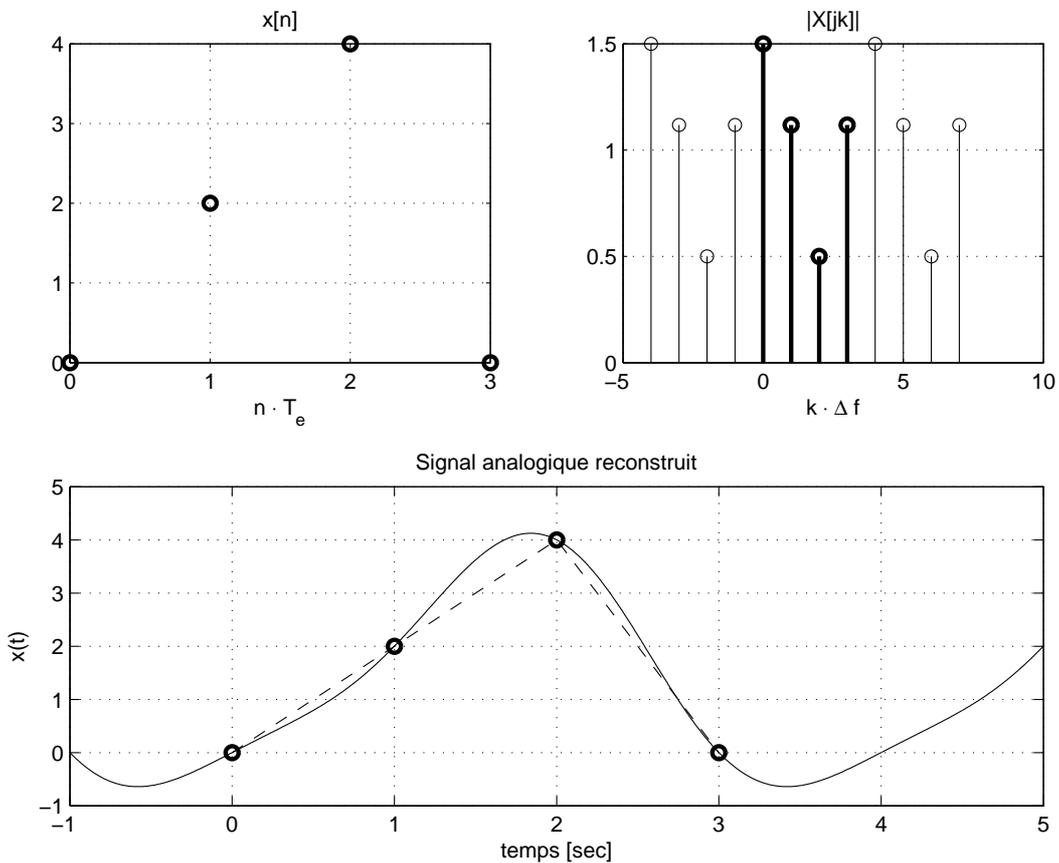


FIG. 3: Ex. TFD 0

TFD 1 :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_D[jk]$	4	$2+j$	$3+2j$	j	2	$-j$	$3-2j$	$2-j$	4	$2+j$	$3+2j$
$ X_D[jk] $	4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$	1	2	1	$\sqrt{13}$	$\sqrt{5}$	4	$\sqrt{5}$	$\sqrt{13}$
$\angle X_D[jk]$	0	0.464	0.588	1.571	0	-1.571	-0.588	-0.464	0	0.464	0.588
$f [kHz]$	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000	1.125	1.250

1. Le tableau ci-dessus donne les résultats $X_D[jk]$ provenant d'une FFT.
2. Le signal temporel $x_N[n]$ est donc discret et périodique.
3. Utilisant une des propriétés de la TF, on a

$$\begin{aligned}
 x_N[n=0] &= \frac{1}{N}x_D[0] = \frac{1}{N} \sum X_D[jk] \\
 &= \frac{1}{8} (4 + (2+j) + (3+2j) + (j) + (2) + (-j) + (3-2j) + (2-j)) \\
 &= \frac{1}{8} 16 = 2
 \end{aligned}$$

4. Sachant que $x_N[n] = \frac{1}{N} x_D[n]$, il vient

$$x_N[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_D[jk] \exp(+j2\pi n k/8)$$

TFD 2 :

1. Graphe : figure Ex TFD 2.
2. La suite de valeurs $x[n]$ est constituée de 8 points et $t_{max} = N T_e = 8 [msec]$.
3. Après déclenchement de l'acquisition par le flanc montant, on aura certainement $x[0] = x[1] = x[2] = A$ et $x[3] = 0$. D'un point de vue purement mathématique, il est plus élégant et plus correct de considérer $x[0] = A/2 = x[3]$.
4. Le domaine spectral analysé s'étend de $-f_e/2 = -500 Hz$ à $+f_e/2 = +500 Hz$ et l'incrément de fréquence vaut $\Delta f = \frac{f_e}{N} = 125 Hz$.
5. Le compteur k des fréquences varie de 0 à $N-1 = 7$. On a en particulier

$$X_D[j0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j2\pi \frac{2 \cdot 0}{N}\right) = \sum_{n=0}^2 x[n] = 3A = 15 [V]$$

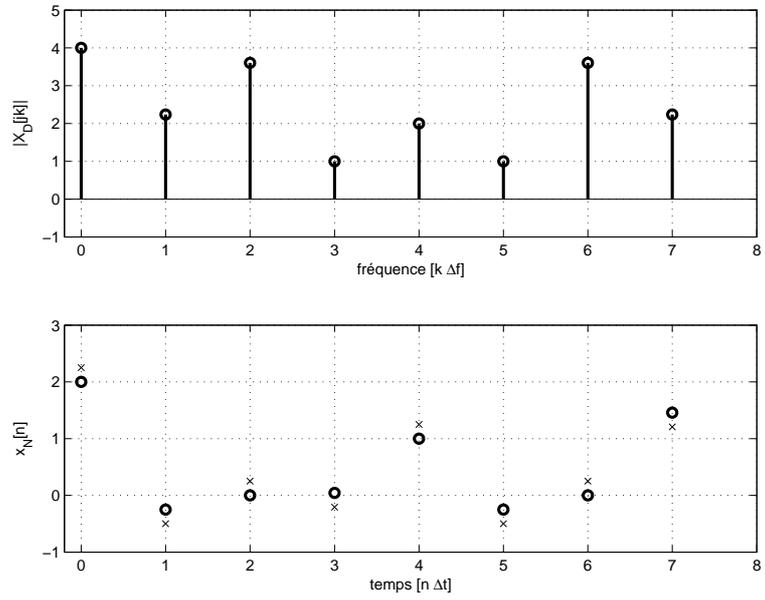


FIG. 4: Ex TFD 1

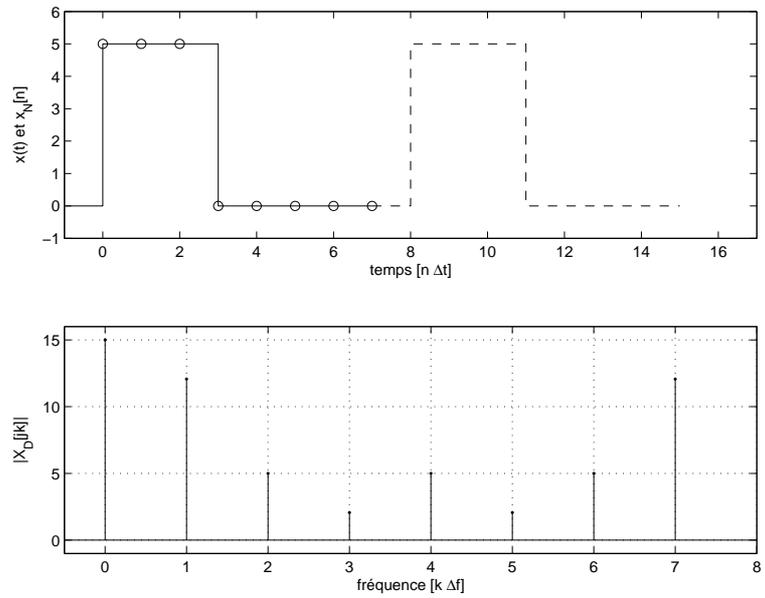


FIG. 5: Ex TFD 2

$$\begin{aligned}
 X_D[j2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j2\pi\frac{2n}{N}\right) \\
 &= A + A \exp\left(-j2\pi\frac{2 \cdot 1}{8}\right) + A \exp\left(-j2\pi\frac{2 \cdot 2}{8}\right) \\
 &= 5 + 5 \cos(\pi/2) - j5 \sin(\pi/2) + 5 \cos(\pi) - j5 \sin(\pi) \\
 &= 5 - j5 - 5 + j0 = -j5 = 5 \angle -\pi/2
 \end{aligned}$$

6. La valeur spectrale en $f = 0$, c'est-à-dire $X_D[jk = 0]$, est toujours égale à la somme des valeurs temporelles. Ce résultat est bien confirmée par le calcul au point 5.

TFD 3 :

1. Graphe : figure Ex TFD 3a.
2. Le spectre $X_D[jk]$ n'est pas indépendant de la longueur $N = 2m$ de la suite puisque l'incrément de fréquence vaut $\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{f_e}{2m}$. On a donc pour $0 \leq k \leq 2m - 1$:

$$\begin{aligned}
 X_D[jk] &= \sum_{n=-2}^{+2} x[n] \exp\left(-j2\pi\frac{n \cdot k}{2m}\right) \\
 &= 1 + 2 \cdot 1 \cos\left(\pi\frac{1 \cdot k}{m}\right) + 2 \cdot 0.5 \cos\left(\pi\frac{2 \cdot k}{m}\right)
 \end{aligned}$$

3. Si on double le nombre d'échantillons, on améliore la résolution spectrale ; c'est-à-dire que le nombre de composantes spectrales calculées entre $0 \cdots f_e$ est doublé (figure Ex TFD 3b, c et d).

TFD 4 :

1. Graphe : figure Ex TFD 4.
2. La décomposition en série de Fourier (spectre bilatéral) donne

$$X_{SF}[jk] = \begin{cases} A_1/2 = 0.5 & \text{si } k = \pm 1 \\ A_2/2 = 0.5 & \text{si } k = \pm 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En portant ces résultats dans le tableau de l'énoncé où la fréquence est centrée sur l'origine (spectre bilatéral), on obtient le tableau de la figure Ex TFD4. On voit ainsi que le résultat fourni par la FFT correspond à la relation suivante

$$X_D[jk] = N X_{SF}[jk]$$

3. Cette fois-ci, le nombre de points est $N = 32$ et la définition spectrale vaut

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} = \frac{8 \text{ kHz}}{32} = 0.25 \text{ [kHz]}$$

Comme les raies spectrales se situent en $f_0 = 1 \text{ kHz}$ et $2f_0 = 2 \text{ kHz}$, on voit quelles seront séparées par des valeurs nulles et que leur amplitude vaudra

$$X_D[jk] = N X_{SF}[jk] = 32 \cdot 0.5 = 16$$

En limitant le tableau aux raies spectrales comprises entre 0 et $f_e/2$, on a :

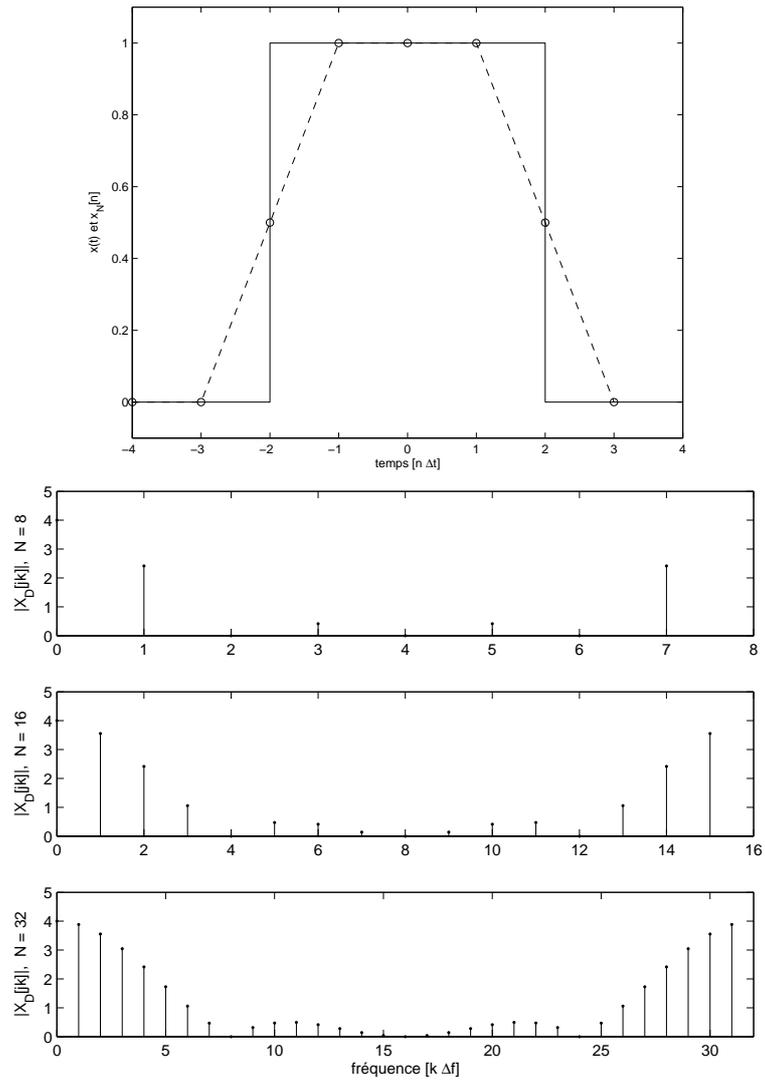


FIG. 6: Ex TFD 3

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 - 15
$f [kHz]$	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50 - 3.75
$X_D[jk]$	0	0	0	0	16	0	0	0	16	0	0

TFD 5 : On échantillonne une exponentielle décroissante où $A = 5 [V]$, $\tau = 5 [msec]$ avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 [msec]$.

1. Le tableau des transformées de Fourier donne :

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \epsilon(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(jf) = A \frac{\tau}{1 + j2\pi f\tau}$$

2. Considérant les instants $t = nT_e$, on a :

$$x[n] = x(nT_e) = A \cdot \exp(-nT_e/\tau) = A \cdot \exp(-T_e/\tau)^n = A \cdot r^n$$

$x[n] = A \cdot r^n$ est donc une suite géométrique de raison $r = \exp(-T_e/\tau) = 0.819$.

3. La TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$ vaut

$$\begin{aligned} X_e(jf) &= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \\ &= T_e \sum_{n=0}^{+\infty} A r^n \exp(-j2\pi fnT_e)^n \\ &= T_e \sum_{n=0}^{+\infty} A (r \exp(-j2\pi fT_e))^n \\ &= AT_e \frac{1}{1 - r \exp(-j2\pi fT_e)} \end{aligned}$$

4. Lorsque la suite $x[n]$ est tronquée, la somme ci-dessus ne porte que sur les N valeurs prises en compte :

$$\begin{aligned} X_{e,N}(jf) &= T_e \sum_{n=0}^{N-1} A (r \exp(-j2\pi fT_e))^n \\ &= AT_e \frac{1 - (r \exp(-j2\pi fT_e))^N}{1 - r \exp(-j2\pi fT_e)} \end{aligned}$$

5. L'axe des fréquences compris entre 0 et f_e est discrétisé en N valeurs. On a donc :

$$\Delta f = \frac{f_e}{N} \quad f = k \Delta f \quad f T_e = \frac{k}{N}$$

et

$$X_D[jk] \equiv \frac{1}{T_e} X_{e,N}(jf)|_{f=k\Delta f} = A \frac{1 - (r \exp(-j2\pi k/N))^N}{1 - r \exp(-j2\pi k/N)}$$

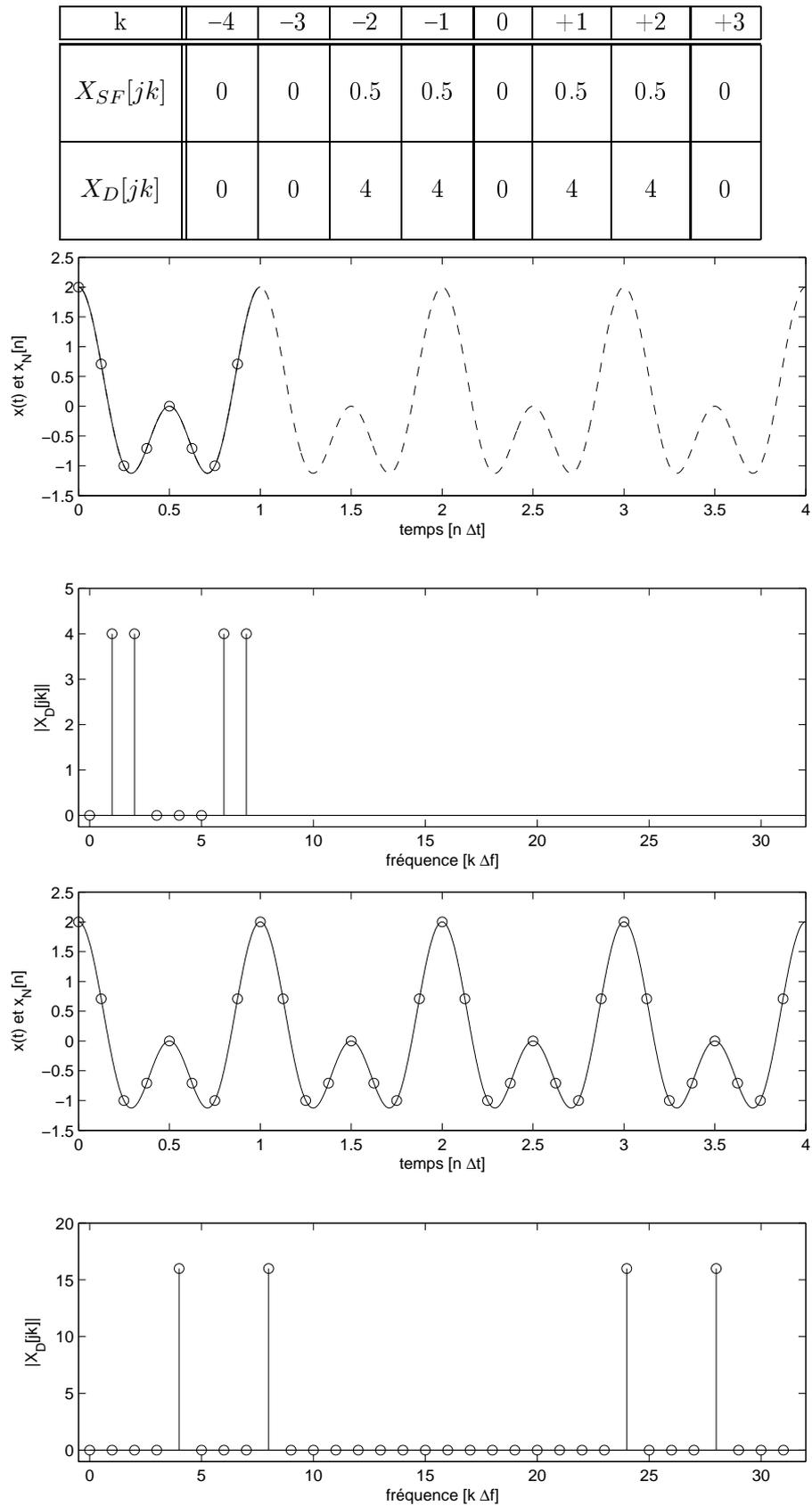


FIG. 7: Ex TFD 4

6. Pour $f = 0$, les 4 spectres ci-dessus valent donc :

$$X(jf)|_{f=0} = A\tau = 25 \cdot 10^{-3} [V \text{ sec}]$$

$$X_e(jf)|_{f=0} = AT_e \frac{1}{1-r} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1-0.819} = 27.56 \cdot 10^{-3} [V \text{ sec}]$$

$$X_{e,N}(jf)|_{f=0} = AT_e \frac{1-r^N}{1-r} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{1-0.819^{16}}{1-0.819} = 26.44 \cdot 10^{-3} [V \text{ sec}]$$

$$X_D(jk)|_{k=0} = A \frac{1-r^N}{1-r} = 5 \frac{1-0.819^{16}}{1-0.819} = 26.44 [V]$$

AnSp 1 :

N	T_e	t_{max}	Δf	f_e
40	0.5 ms	20 ms	50 Hz	2 kHz
20	1 ms	20 ms	50 Hz	1 kHz
50	0.2 ms	10 msec	100 Hz	5 kHz
100	1 ms	100 ms	10 Hz	1 kHz
50	1 ms	50 ms	20 Hz	1 kHz
500	2 ms	1 s	1 Hz	500 Hz
30	1 ms	30 ms	33.3 Hz	1 kHz
25	0.2 ms	5 ms	200 Hz	5 kHz

AnSp 2 : La fenêtre rectangulaire doit être utilisée pour tous les signaux qui n'apparaissent qu'une fois (signaux non permanents, réponses indicielles, impulsionnelles) : signaux 2, 3, 5, 6, 7.

Les fenêtres en cosinus sont utilisées pour l'analyse de signaux périodiques ou de bruits permanents. Dans ce cas, il est souhaitable d'avoir suffisamment de périodes pendant la durée de l'enregistrement : signaux 1, 4, 8.

AnSp 3 :

1. Le signal enregistré est périodique et comporte exactement deux périodes. On choisira donc une fenêtre rectangulaire.
2. $N = 20$, $t_{max} = 20 \text{ ms}$, $f_e = 1 \text{ kHz}$, $\Delta f = 50 \text{ Hz}$
3. Les raies spectrales réelles (celles du signal analogique $x(t)$) sont au nombre de trois : $A_0 = 3$, $A_1 = 4 \angle 0$, $A_2 = 2 \angle -\pi/2$. Comme on a enregistré 20 valeurs temporelles, il y aura 20 valeurs spectrales dont seules l'amplitude et la phase des 10 premières seront intéressantes.
4. Amplitudes et phases du spectre bilatéral :

k	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f = k\Delta f$	-500	-450	-400	-350	-300	-250	-200	-150	-100	-50
$ X[jk] $	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0
$\angle X[jk]$	0	0	0	0	0	0	$+\pi/2$	0	0	0

k	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
$f = k\Delta f$	0	+50	+100	+150	+200	+250	+300	+350	+400	+450
$ X[jk] $	3	0	2	0	1	0	0	0	0	0
$\angle X[jk]$	0	0	0	0	$-\pi/2$	0	0	0	0	0

5. Si l'on échantillonne six périodes au lieu de deux, la durée et la définition spectrale valent $t_{max} = 6/f_0 = 60 \text{ ms}$, $\Delta f = 1/60 \text{ ms} = 16.67 \text{ Hz}$. Comme les composantes spectrales non nulles sont situées en 0, 100 Hz, 200 Hz et que le compteur des fréquences vaut $k = f/\Delta f$, on voit que les composantes non nulles se situeront en $k = 0, 6, 12$.

AnSp 4

1. Le signal

$$x(t) = 1 + 5 \sin(2\pi f_a t) + 2 \sin(2\pi f_b t), \quad f_a = 1 \text{ [kHz]}, \quad f_b = 1.5 \text{ [kHz]}$$

comporte deux composantes spectrales $f_a = 2f_0$, $f_b = 3f_0$ multiples de $f_0 = 500 \text{ [Hz]}$. Sa période vaut donc $T_0 = 1/f_0 = 2 \text{ ms}$ alors que les périodes T_a et T_b valent respectivement 1 [ms] et 0.667 [ms]. Son spectre unilatéral de $x(t)$ s'écrit

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad A_2 = 5, \quad \alpha_2 = -\pi/2, \quad A_3 = 2, \quad \alpha_3 = -\pi/2$$

Les valeurs efficaces DC et AC valent respectivement

$$X_{dc} = A_0 = 1, \quad X_{ac} = \sqrt{\frac{\sum_{k \neq 1} A_k^2}{2}} = \sqrt{\frac{5^2 + 2^2}{2}} = \sqrt{14.5}$$

2. Sachant que $T_e = 125 \text{ [}\mu\text{s]}$ et $T = 10 \text{ [ms]}$ (voir figure 8a),

- a) on a $f_{max} = f_e = 1/T_e = 8 \text{ kHz}$, $\Delta f = 1/T = 100 \text{ Hz}$;
- b) comme le nombre de périodes de $x(t)$ est un entier ($T/T_0 = 10/2 = 5$), il n'est pas nécessaire d'utiliser une fenêtre d'observation ;
- c) comme $f_a = 1 \text{ kHz}$, $f_b = 1.5 \text{ kHz}$ et $\Delta f = 100 \text{ Hz}$, on voit que ces composantes spectrales se situeront en $k = k_a = f_a/\Delta f = 10$ et en $k = k_b = f_b/\Delta f = 15$.

3. Dans ce cas, $T = 11 \text{ [ms]}$ (voir figure 8b) ,

- a) on aura donc $f_{max} = f_e = 1/T_e = 8 \text{ kHz}$, $\Delta f = 1/T = 91 \text{ Hz}$;
- b) comme le nombre de périodes du signal $x(t)$ n'est pas un entier ($T/T_0 = 11/2 = 5.5$), il faut envisager l'utilisation d'une fenêtre d'observation autre que rectangulaire ;
- c) comme $f_a = 1 \text{ kHz}$, $f_b = 1.5 \text{ kHz}$ et $\Delta f = 1000/11 \text{ Hz}$, on voit que ces composantes spectrales se situeront en $k_a = f_a/\Delta f = 11$ et en $k_b = f_b/\Delta f = 16.5$. Ainsi, la fréquence f_a sera représentée par une seule raie spectrale située en $f = k_a \Delta f = f_a = 1000 \text{ Hz}$ alors que la fréquence f_b sera représentée par un ensemble de raies spectrales situées autour de k_b , dont les deux plus importantes sont en $f = f_b \pm \Delta f/2 = 1500 \pm 45.5 \text{ Hz}$;
- d) L'observation des spectres obtenus avec les fenêtres rectangulaire et de Hann montre que dans le cas de cet exemple où les signaux n'ont pas des amplitudes très différentes, le fenêtrage n'apporte rien d'intéressant.

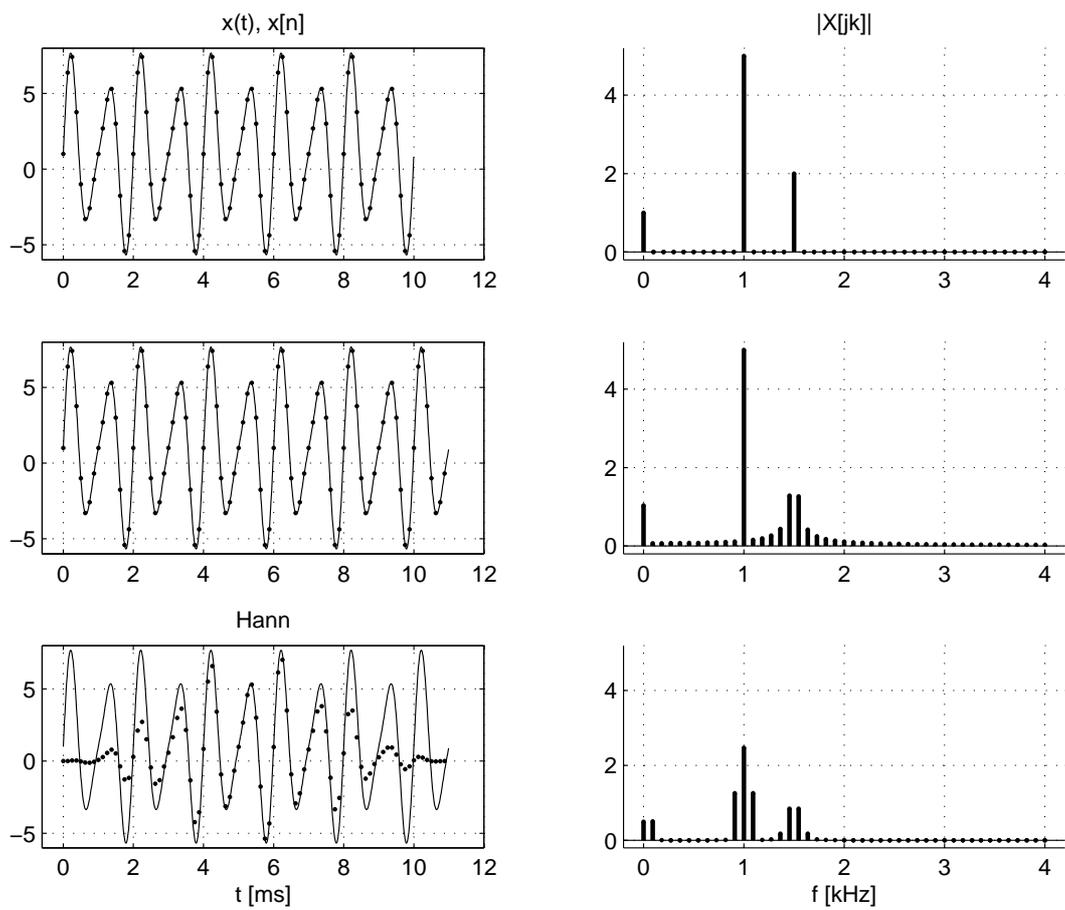


FIG. 8: Ex. Ansp 4

4 Corrélation

Corr 0

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+m)$$

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	0	0	0	0
$r_{xy}(n)$	0	0	0	16	24	25	20	10	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0

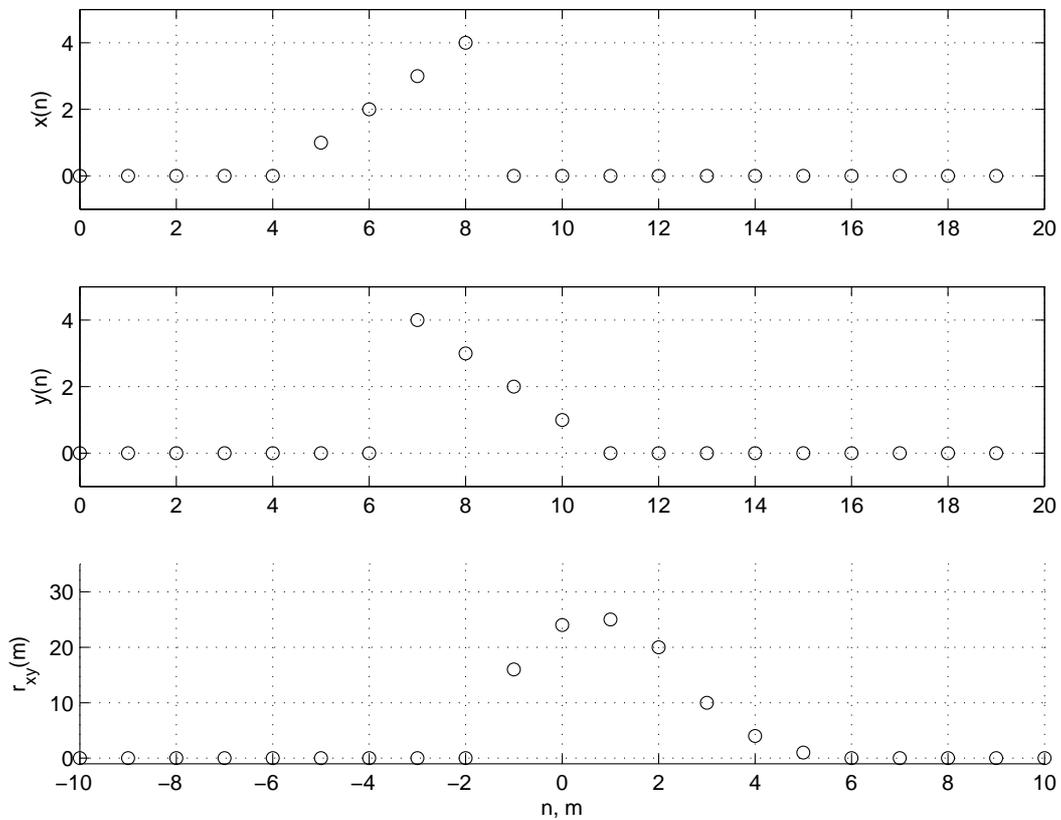


FIG. 9: Exercice Corr 0

Corr 1 Les fonctions $x(t)$, $x(t + \Delta t)$, $x(t + 2\Delta t)$, et $r_{xy}(\tau)$ sont esquissées ci-après avec une amplitude $A = 1$ et $\Delta t = 1$.

On voit ainsi que

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt$$

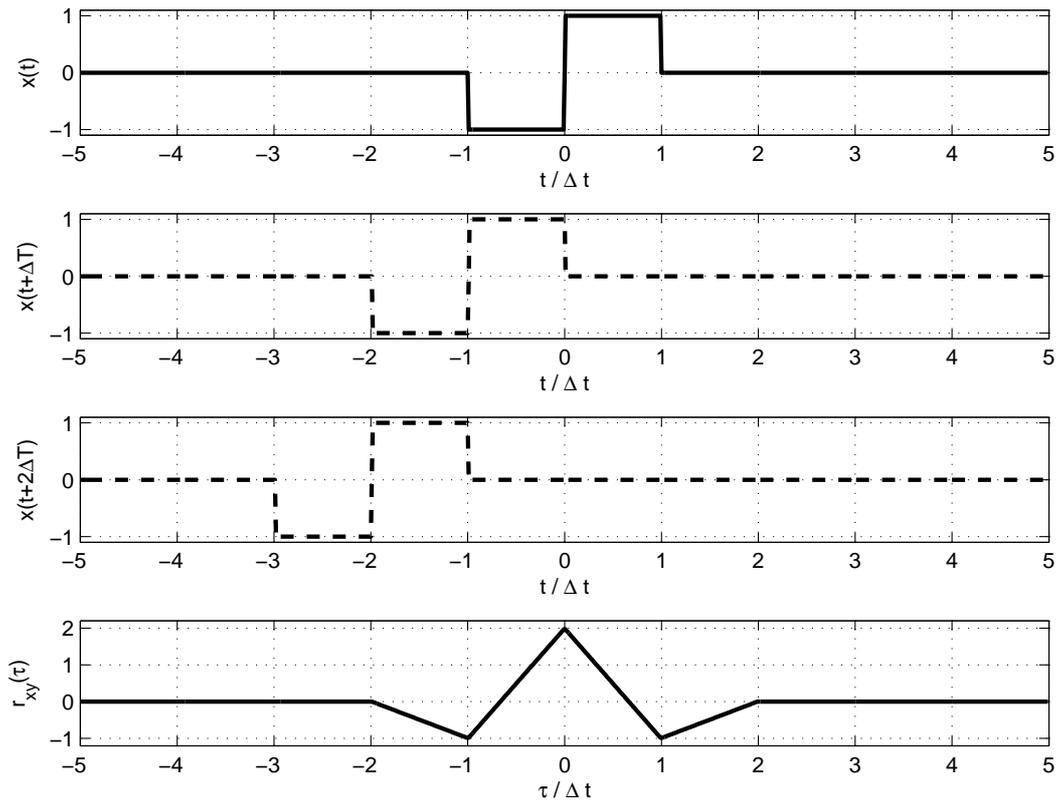


FIG. 10: Exercice Corr 1

prend les valeurs particulières suivantes

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} A^2 dt = 2A^2\Delta t$$

$$r_{xx}(+\Delta t) = \int_{-\Delta t}^0 (-A) \cdot (+A) dt = -A^2\Delta t$$

Pour un décalage τ égal à $2\Delta t$, on voit que le produit $x(t)x(t + \Delta t)$ est nul et on a donc

$$r_{xx}(+2\Delta t) = 0$$

Comme la fonction d'autocorrélation est paire, on a bien évidemment

$$r_{xx}(-\Delta t) = r_{xx}(+\Delta t), \quad r_{xx}(-2\Delta t) = r_{xx}(+2\Delta t)$$

La liaison entre ces points particuliers se fait par segments de droite car l'intégration d'une constante donne une droite.

Corr 2 Les trois signaux ainsi que leur fonction d'autocorrélation respective sont présentés dans la figure ci-après. On notera, en pointillé, la position des signaux avancés de $+\Delta t/2$.

Calcul des trois fonctions d'autocorrélation Avant de plonger dans les calculs, il est important de s'arrêter un instant sur les graphes des fonctions $x(t)$ et leur version décalée

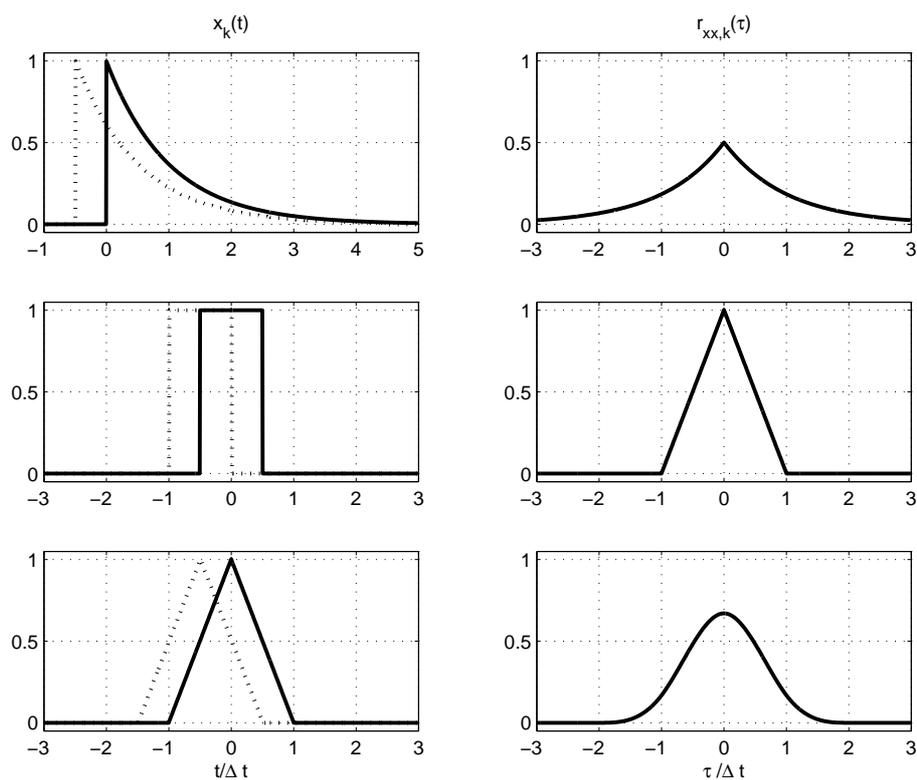


FIG. 11: Exercice Corr 2

$x(t+\tau)$ ainsi que sur leur produit ; les limites des intégrales à calculer apparaîtront alors de manière évidente. De plus, comme la fonction d'autocorrélation est paire, on se contentera de calculer sa valeur pour $\tau \geq 0$.

1. Pour l'exponentielle, afin de simplifier l'écriture, on pose $a \equiv 1/\tau_1$; ce qui donne $x(t) = A \exp(-t/\tau_1) \cdot \epsilon(t) \equiv A \exp(-a t) \cdot \epsilon(t)$

$$\begin{aligned}
 r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t+\tau) dt \\
 &= A^2 \int_0^{+\infty} \exp(-a t) \cdot \exp(-a(t+\tau)) dt \\
 &= A^2 \cdot \exp(-a \tau) \int_0^{+\infty} \exp(-2a t) dt \\
 &= A^2 \cdot \exp(-a \tau) \cdot \left. \frac{\exp(-2a t)}{-2a} \right|_0^{\infty} \\
 &= \frac{A^2}{2a} \exp(-a \tau), \quad \tau \geq 0
 \end{aligned}$$

Tenant compte de la parité de $r_{xx}(\tau)$, il vient

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2a} \exp(-a |\tau|), \quad -\infty < \tau < +\infty$$

2. Pour l'impulsion rectangulaire, on a

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2 - \tau} A \cdot A dt \\ &= A^2(\Delta t - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \end{aligned}$$

Tenant compte de la parité de $r_{xx}(\tau)$, il vient

$$r_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2 \Delta t \left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta t}\right) & \text{si } -\Delta t \leq \tau \leq +\Delta t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. L'observation de l'impulsion triangulaire et de sa version décalée montre que le produit non nul se situe entre $-\Delta t$ et $+\Delta t - \tau$ et que dans ce domaine, apparaissent quatre segments de droite définissant $x(t)$ et $x(t + \tau)$. Contentons-nous donc de calculer un point de la fac, celui pour $\tau = +\Delta t/2$, comme représenté sur la figure. On a alors quatre segments de droites de pentes $\pm A/\Delta t$ décrites par

$$\begin{aligned} d_1 &: +\frac{A}{\Delta t} \left(t + \frac{3}{2}\Delta t\right) \\ d_2 &: +\frac{A}{\Delta t} \left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ d_3 &: -\frac{A}{\Delta t} \left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) \\ d_4 &: -\frac{A}{\Delta t} (t - \Delta t) \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction d'autocorrélation pour $\tau = +\Delta t/2$ vaut

$$\begin{aligned} r_{xy}(+\Delta t/2) &= \int_{-\Delta t}^{-\Delta t/2} d_1 \cdot d_2 \cdot dt + \\ &+ \int_{-\Delta t/2}^0 d_2 \cdot d_3 \cdot dt + \\ &+ \int_0^{+\Delta t/2} d_3 \cdot d_4 \cdot dt \end{aligned}$$

Le calcul avec Matlab donne $r_{xy}(+\Delta t/2) \simeq 0.48$.

Corr 3 Avant de se lancer dans les calculs de $r_{xh}(\tau)$, il faut se donner les équations de $x(t)$ et $h(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ h(t) &= \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$h(t + \tau) = \begin{cases} t + \tau & \text{si } 0 \leq t \leq 2 - \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le calcul de quelques valeurs particulières donne

$$r_{xh}(0) = \int_0^1 1 \cdot t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$r_{xh}(1) = \int_0^1 1 \cdot (t+1) \, dt = \frac{(t+1)^2}{2} \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$r_{xh}(\tau \geq 2) = 0$$

$$r_{xh}(\tau \leq -1) = 0$$

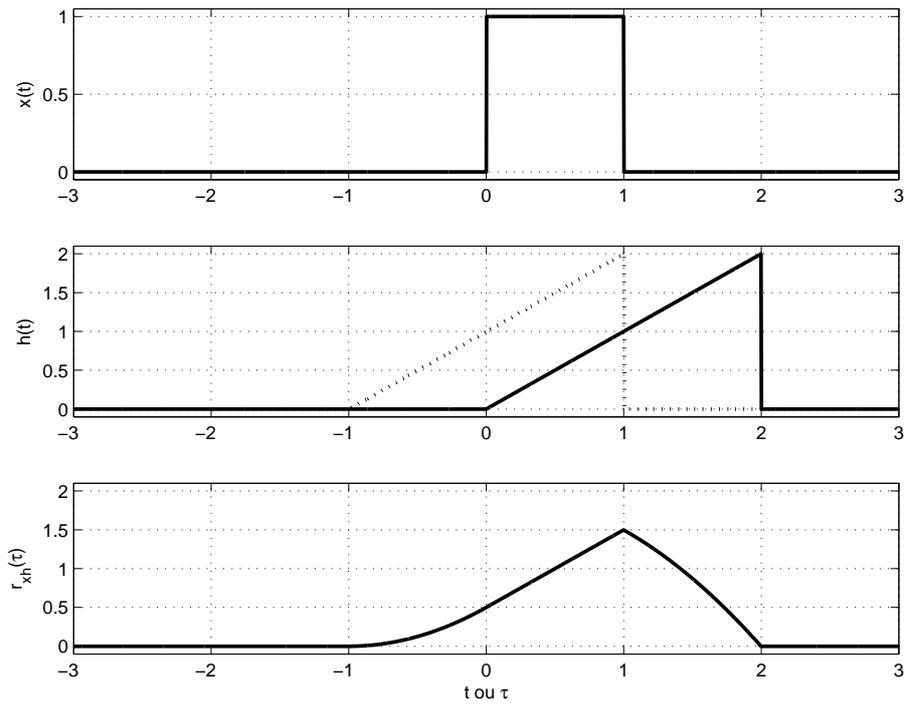


FIG. 12: Exercice Corr 3