Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud
Département Technologies Industrielles

Unité SES

Analyse des Signaux et Systèmes numériques

Quelques corrigés d'exercices

F. Mudry

.

1 Échantillonnage

Ech 1 :

On constate que le spectre proposé est borné par $f_{max} = 10\,kHz$; la fréquence d'échantillonnage devrait donc être supérieure à $2\,f_{max} = 20\,kHz$.

1. Cependant, comme on propose $f_e = 16\,kHz$, il y aura inévitablement du recouvrement spectral pour $f > f_e - f_{max} = 6\,kHz$.
2. En filtrant analogiquement le signal temporel avant de l'échantillonner, on pourra supprimer les fréquences supérieures à $f_N = f_e/2 = 8\,kHz$ et éviter ainsi tout recouvrement jusqu'à la fréquence de Nyquist f_N.
3. On a ainsi gagné 2 kHz de bande passante non perturbée par le recouvrement spectral.

Ech 5 :

1. Ce signal comporte quatre composantes spectrales situées en $f = 50,\ 125,\ 190,\ 300\,Hz$. La fréquence d'échantillonnage devra donc valoir au moins $2\,f_{max} = 600\,Hz$.
2. En choisissant $f_e = 3\,f_{e,min} = 1800\,Hz$, il n'y aura pas de recouvrement spectral. Dans la bande de base, il n'y aura donc pas d'autres raies spectrales que celles-ci

$$\begin{aligned} X(j50) &= 1.0\,\angle 0 & X(j125) &= 2.5\,\angle(-\pi/2+\pi/6) = 2.5\,\angle(-\pi/3) \\ X(j190) &= 2.0\,\angle -\pi & X(j300) &= 8.0\,\angle(-\pi/2+\pi/4) = 8.0\,\angle(-\pi/4) \end{aligned}$$

Ech 6 :

1. Comme l'on a $f_e = 600\,Hz$, la fréquence de Nyquist vaut $f_N = f_e/2 = 300\,Hz$. On constate que le théorème d'échantillonnage n'est pas respecté et qu'il y aura du recouvrement spectral.
2. Les fréquences repliées vaudront $f_r = \pm f_e \pm f_{max} = \pm 600 \pm 540 = \pm 60\,Hz$ dans la bande de base. Le cosinus de fréquence 540 Hz sera donc perçu comme un cosinus de fréquence 60 Hz.
3. Le signal reconstruit et suivi d'un filtre passe-bas idéal vaudra donc

$$y_a(t) = \cos(2\pi \cdot 240\,t) + 3\,\cos\left(2\pi \cdot 60\,t - \frac{\pi}{6}\right)$$

   Le changement de signe de la phase provient du fait que la composante $+60$ Hz est due à la raie -540 Hz dont la phase vaut $-\pi/6$.

Ech 7 :

1. Le spectre d'un signal carré d'amplitude A est décrit par

$$X(jk) = A\frac{\Delta t}{T}\,\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = \frac{A}{2}\,\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \ \text{pair} \\ \pm\frac{A}{k\pi} & \text{si} \quad k \ \text{impair} \end{cases}$$

2. La bande de base est comprise entre $\pm f_e/2 = 4.9\,kHz$. Les composantes spectrales réelles présentes se situent donc en ± 1 kHz et ± 3 kHz.
3. Les fréquences apparentes sont présentées dans la figure 1.
4. L'amplitude de chaque raie d'ordre k vaut $A/(k\pi)$.

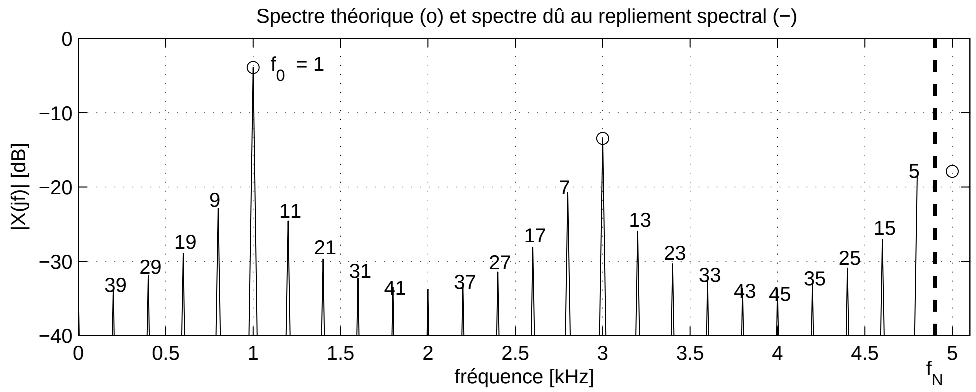


FIG. 1: Repliement spectral pour un signal carré

Ech 8 :

La densité spectrale d'amplitude de $x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t)$ vaut :

$$X(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

L'échantillonnage avec une fréquence f_e conduit à la recopie de ce spectre en tous les multiples de f_e. On a donc :

$$\begin{aligned} X_e(jf) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)} + \frac{1}{a + j2\pi f} + \sum_{k=+1}^{+\infty} \frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)} \end{aligned}$$

Considérant deux termes symétriques ($k < 0$ et $k > 0$) de chaque somme, on voit que l'on a

$$\left.\frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)}\right|_{k<0} + \left.\frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)}\right|_{k>0} =$$

$$\begin{aligned} &= \left.\frac{1}{a + j2\pi(f + kf_e)}\right|_{k>0} + \left.\frac{1}{a + j2\pi(f - kf_e)}\right|_{k>0} \\ &= \frac{1}{(a + j2\pi f) + j2\pi k f_e} + \frac{1}{(a + j2\pi f) - j2\pi k f_e} \\ &= \frac{(a + j2\pi f) - j2\pi k f_e + (a + j2\pi f) + j2\pi k f_e}{(a + j2\pi f)^2 - (j2\pi k f_e)^2} \\ &= \frac{2\,(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 - (j2\pi k f_e)^2} \\ &= \frac{2\,(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi k f_e)^2} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$X_e(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi\, k f_e)^2}$$

AnNa 1 :

En une seconde, on enregistre 40kHz·16bits = 80ko/sec. Un enregistrement de 1Mo étant équivalent à 2^{20} octets, cela donne une durée de $2^{20}/80\text{k} = 13.1$ secondes.

AnNa 2 :

On considère ici que les opérations de conversion et de calcul se font l'une après l'autre. Le temps total de ces opérations vaut donc

$$t_{op} = 5\mu\text{s} + 20 \cdot 50\text{ns} + 0.5\mu\text{s} = 6.5\mu\text{s}$$

Comme on ne peut pas acquérir une nouvelle valeur $x[n]$ avant que ces opérations soient terminées, la période d'échantillonnage devra être supérieure à t_{op}. La fréquence d'échantillonnage sera donc inférieure à $1/t_{op} = 153\,\text{kHz}$ et le signal acquis ne devra pas contenir de fréquence supérieures 75 kHz environ.

AnNa 3 :

1. Résolution et pas de quantification

$$R = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{16}}, \qquad Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{20\,\text{V}}{2^{16}} = 0.305\,\text{mV}$$

2. Valeurs efficaces du signal et du bruit de quantification

$$X_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4.24\,\text{V}_{\text{eff}}$$

$$Q_{eff} = \frac{Q}{\sqrt{12}} = \frac{0.305\,\text{mV}}{\sqrt{12}} = 88\mu\text{V}_{\text{eff}}$$

À cause de la non-linéarité (perte d'un bit), le bruit de quantification doit être augmenté d'un facteur 2 ; ce qui donne

$$Q_{eff,\,NL} = 2\,Q_{eff} = 176\mu\text{V}_{\text{eff}}$$

3. Rapport signal sur bruit du signal numérisé

$$SNR = \frac{X_{eff}}{Q_{eff,NL}} = \frac{4.24}{176\mu} = 24\text{k} = 87\,\text{dB}$$

AnNa 4 :

On a vu ci-dessus que $Q_{eff,NL} = 176\mu\text{V}_{\text{eff}}$. Comme $X_{eff} = 5/\sqrt{2} = 3.53\,\text{V}_{\text{eff}}$, il vient

$$SNR = \frac{X_{eff}}{Q_{eff,NL}} = \frac{3.53}{176\mu} = 20\text{k} = 86\,\text{dB} < 90\,\text{dB}$$

On n'atteindra donc pas les 90 dB souhaités.

AnNa 5 :

1. Y a-t-il repliement spectral ?
   Comme 16 bits = 2 octets et que la fréquence de transmission détermine la fréquence d'échantillonnage, on a
   $$f_e = \frac{10^4 \text{oct/sec}}{2\,\text{oct}} = 5\,\text{kHz}$$
   La fréquence maximum du signal 900 Hz étant inférieure à $f_N = f_e/2 = 2.5\,\text{kHz}$, il n'y a pas de repliement spectral.
2. Résolution et pas de quantification :
   $$R = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{16}}, \qquad Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{10\,\text{V}}{2^{16}} = 0.150\,\text{mV}$$
   Tenant compte de la perte d'un bit par non linéarité, on a
   $$Q_{eff,NL} = 2\,Q_{eff} = 2\,\frac{Q}{\sqrt{12}} = 2\,\frac{150\,\mu\text{V}}{\sqrt{12}} = 86\,\mu\text{V}_{\text{eff}}$$
3. Puissance et valeur efficace du signal $x(t)$
   $$P_x = \sum \frac{A_k^2}{2} = \frac{1}{2}\,(4^2 + 2^2) = 10\,\text{V}^2_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad X_{eff} = 3.16\,\text{V}_{\text{eff}}$$
4. SNR dû à la conversion AN
   $$SNR = \frac{X_{eff}}{Q_{eff,NL}} = \frac{3.16}{86\mu} = 36.7\text{k} = 91\,\text{dB}$$

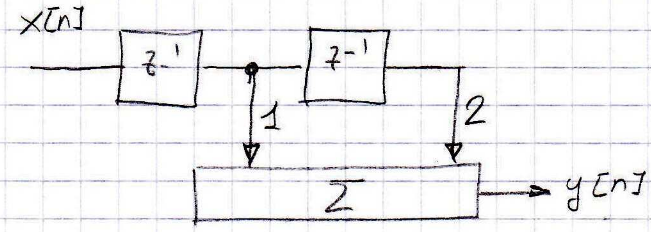
AnNa 6 :

Pour que le repliement de la perturbation se fasse en $f_r \geq f_c$, il faut avoir $f_r = |f_e - f_0| \geq f_c$, donc $f_e \geq f_c + f_0 = 12\,\text{kHz}$. Comme l'effet du repliement provient du filtre centré en f_e, on a

$$\begin{aligned} H(f_r = f_c) = H(f_r - f_e) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_r - f_e}{f_c}\right)^{2m}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_r - f_e}{f_c}\right)^{2m}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-8}{4}\right)^{12}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^{12}}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

L'amplitude du signal replié en $f = f_c$ vaudra donc $A_r \leq \frac{A}{64} = \frac{5}{64} = 78\,\text{mV}$.

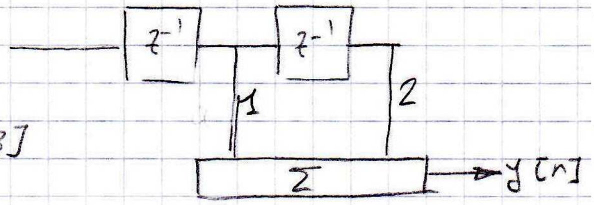
SNC1



$x_1[n] = 2\delta[n-1]$

$y_1[n] = 4\delta[n-3] + 2\delta[n-2]$

$h[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$



$x_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n+1]$

$y_2[n] = \delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$

$h[n] = a\delta[n-1] + b\delta[n-2]$

$y_2[n] = a\delta[n-1] + b\delta[n-2] + 2a\delta[n-2] + 2b\delta[n-3]$

$1 = a \quad \Rightarrow a = 1$

$4 = b + 2a \quad$ ok

$4 = 2b \quad \Rightarrow b = 2$

Les 2 systèmes sont identiques

Linéaire $\quad S[\alpha x_1] + S[\beta x_2] = S[\alpha x_1 + \beta x_2]$

$x_2[n] = x_1[n] + \frac{1}{2} x_1[n+1]$

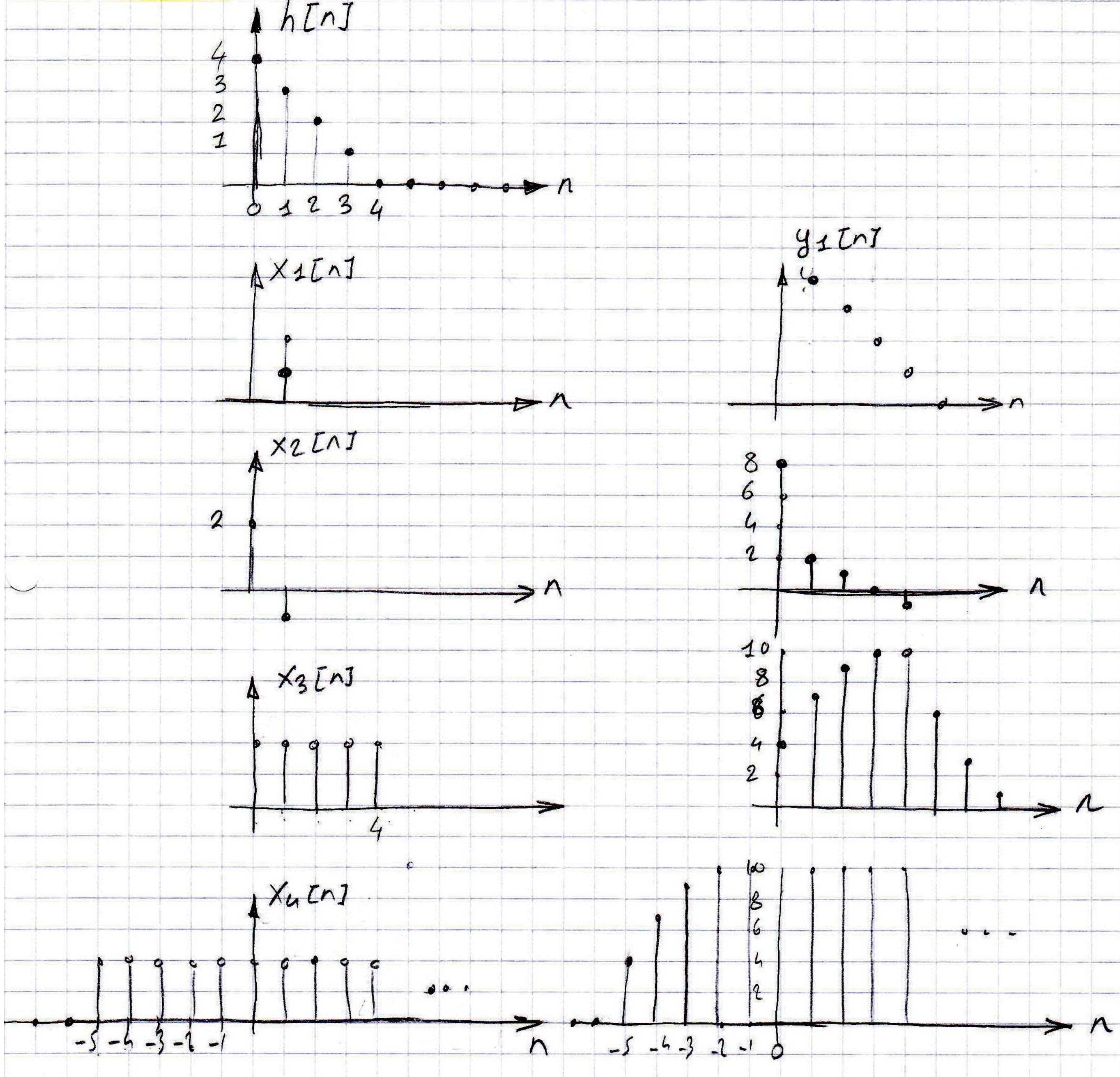
$y_2[n] = y_1[n] + \frac{1}{2} y_1[n+1]$

$= 4\delta[n-3] + 2\delta[n-2] + \frac{1}{2} 4 \cdot \delta[n-2] + \frac{2}{2}\delta[n-1]$

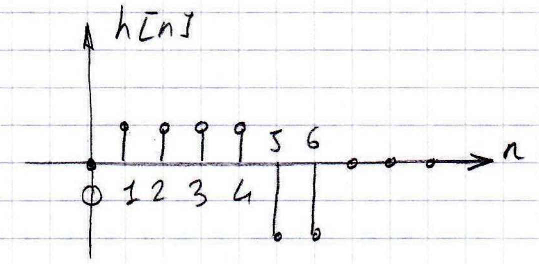
$= \delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 4\delta[n-3]$

ok

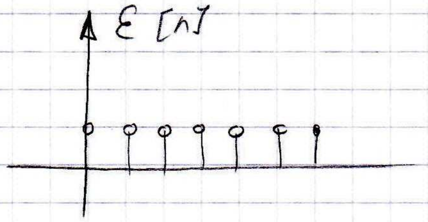
SNC2

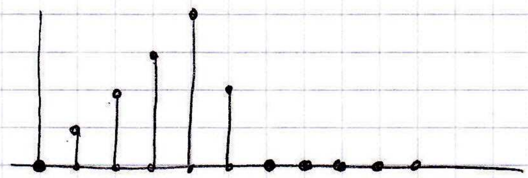


SNC3



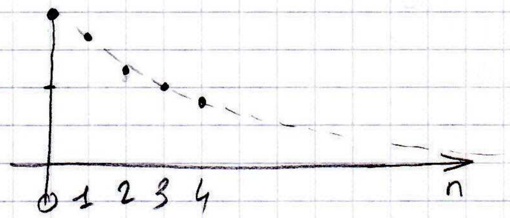
Gain statique $= \sum_n h[n] = 0 \Rightarrow$ Filtre passe haut





SNC4

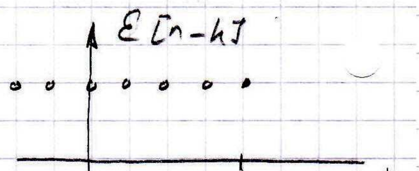
$h[n] = 0{,}8^n \cdot \varepsilon[n]$

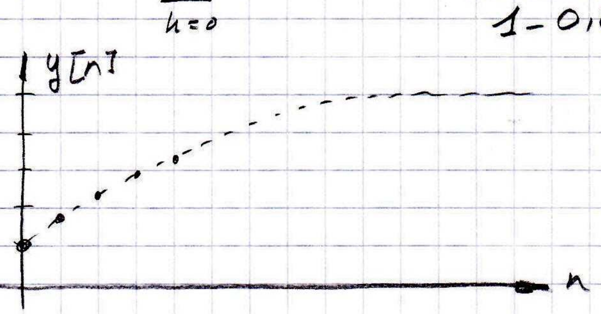


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 0{,}8^k \cdot \varepsilon[k] \cdot \varepsilon[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}8^k \cdot \varepsilon[k] \cdot \varepsilon[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 0{,}8^k = \frac{1-0{,}8^{n+1}}{1-0{,}8}$$



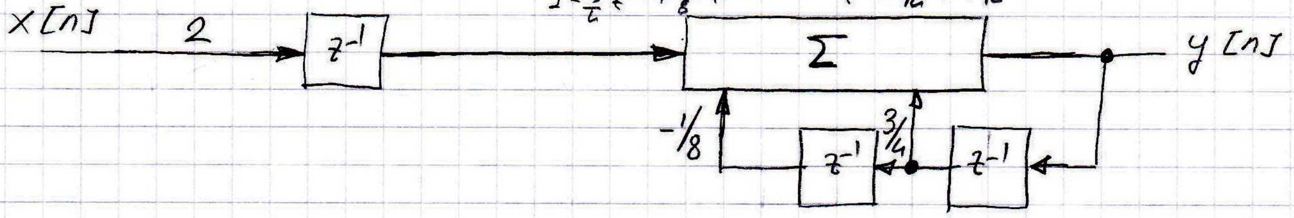


CSNC5

$$y[n] = 2x[n-1] + \frac{3}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2]$$

$$Y(z) = 2X(z) z^{-1} + Y(z)\left(\frac{3}{4} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-2}\right), \quad Y(z)\left(1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}\right) = 2X(z) z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}} = \frac{2z}{z^2 - 3/4\, z + 1/8}$$



n	x[n]	y[n]
0	1	0
1	0	2
2	0	$0 + 3/4 \cdot 2 = 3/2$
3	0	$0 + 3/4 \cdot 1{,}5 - \frac{1}{8} \cdot 2 = 7/8$
4	0	$0 + 3/4 \cdot 7/8 - 1/8 \cdot 3/2 = 15/32$

SNC6

$x[n] = [1,2,3]$ longueur $= 3$
$y[n]$ $[0, 1, 2, 2, -2, -3]$ longueur $= 6$
} longueur de $h[n] = 4$

$y[0] = x_0 h_0$

$y[1] = x_0 h_1 + x_1 h_0$

$y[2] = x_0 h_2 + x_1 h_1 + x_2 h_0$

$y[3] = x_0 h_3 + x_1 h_2 + x_2 h_1$

$y[4] = x_1 h_3 + x_2 h_2$

$y[5] = x_2 h_3$

$x_0\ x_1\ x_2$
h_0
$h_1\ h_0$
$h_2\ h_1\ h_0$
$h_3\ h_2\ h_1\ h_0$
$h_3\ h_2\ h_1\ h_0$
$h_3\ h_2\ h_1\ h_0$ $2 = 1.0 + 2.1 + 3.h_0$
$\Downarrow$ 0

$2 = 1(-1) + 2(0) + 3 h_1 \Rightarrow h_1 = 1$

$-2 = 2.(-1) + 3.h_2 \Rightarrow h_2 = 0$

$-3 = 3 . h_3 \Rightarrow h_3 = -1$

$h[n] = 0\ \ 1\ \ 0\ -1$

Preuve

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 0 & -1 & & \\
 & 0 & 2 & 0 & -2 & \\
 & & 0 & 3 & 0 & -3 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 2 & -2 & -3
\end{array}
$$

SNC7

$x[n] = 1, 6, 3$ $\quad n = 0..2$

$x_1[n] \quad 1, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 3$ $\quad n = 0..8$

$N = 4$

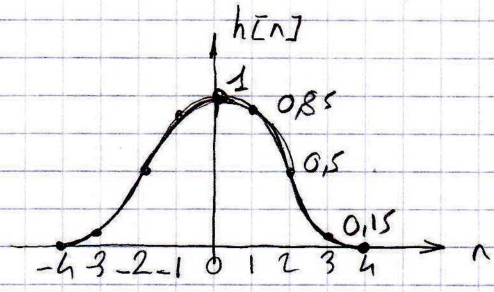
Fonction interpolante

$h[0] = 1$

$h[\pm N] = 0 \quad \forall k$ entier

support de $h = 2N+1$, $h[n]$, $n = -N..N$

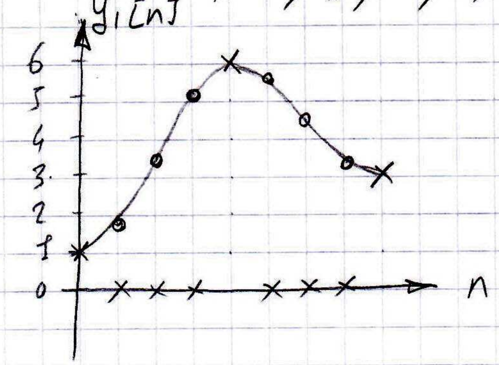
$$h[n] = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\pi \frac{n}{N}\right)\right) \quad -N \leq n \leq N$$



$y_1[n] = x_1[n] * h[n]$

1	h_1	h_2	h_3	0	0	0	0	0
0	$6h_3$	$6h_2$	$6h_1$	6	$6h_1$	$6h_2$	$6h_3$	0
0	0	0	0	0	$3h_3$	$3h_2$	$3h_1$	3
1	$h_1 + 6h_3$	$7h_2$	$h_3 + 6h_1$	6	$6h_1 + 3h_3$	$9h_2$	$6h_3 + 3h_1$	3

1, 1.7, 3.5, 5.3, 6, 5.6, 4.5, 3.4, 3

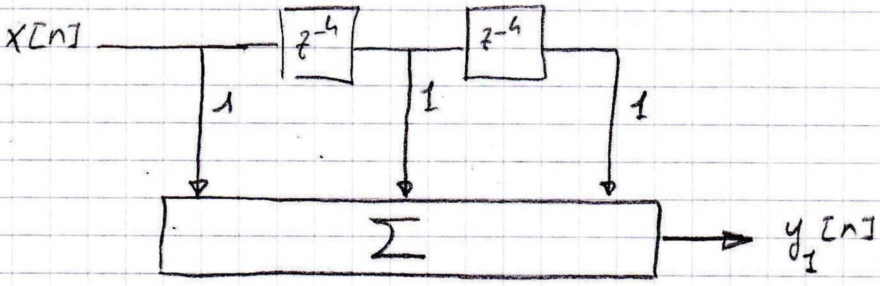


3 Réponses des systèmes numériques

Voir les corrigés manuscrits annexés
(SNT1 ... SNT5) et (SNF1 ... SNF5)

CSNT1

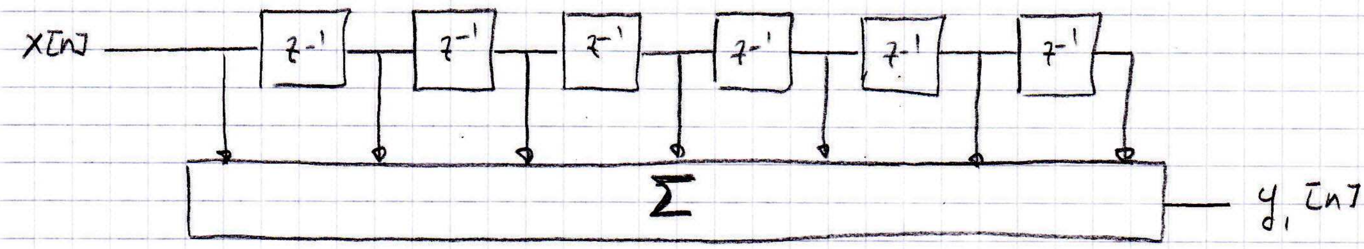
① $y_1[n] = x[n] + x[n-4] + x[n-8]$



$h_1[n] = 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1$

$\varepsilon[n] * h_1[n] = 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, \ldots$

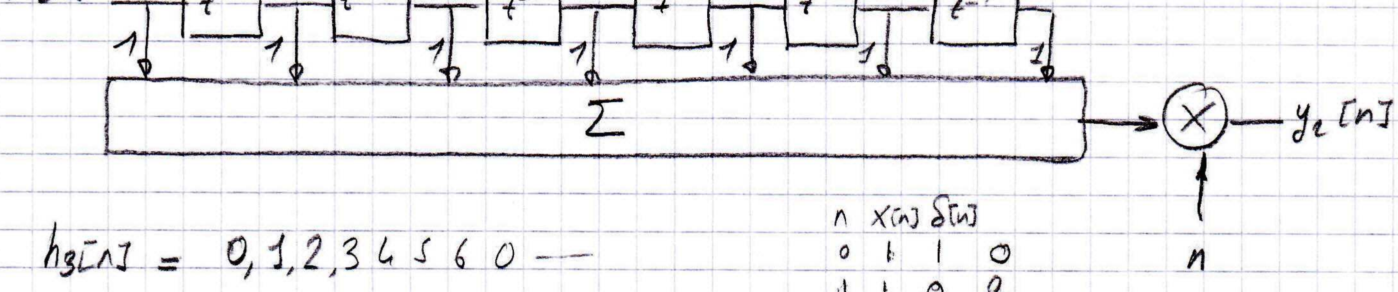
② $y_2[n] = \sum_{k=0}^{6} x[n-k] = x[n] + x[n-1] + \ldots x[n-6]$



$h_2[n] = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots$

$\varepsilon[n] * h_2[n] = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7 \ldots$

③ $y_3[n] = n \sum_{k=0}^{6} x[n-k]$ Pas linéaire, Pas invariant par translation



$h_3[n] = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 \ldots$

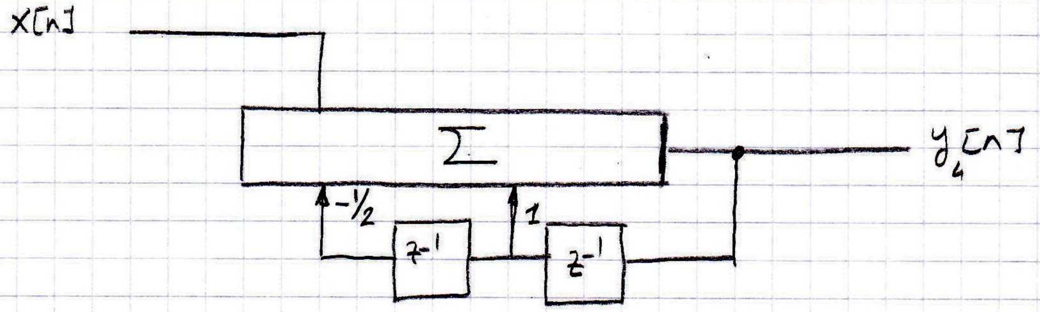
$\varepsilon[n] * h_3[n] = 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 7n$

n	x[n]	δ[n]	
0	1	1	0
1	1	0	2
2	1	0	6
3	1	0	12
4	1	0	20
5	1	0	30
6	1	0	42

Suite SNT1

④ $y_4[n] = x[n] + y_4[n-1] - 0{,}5\, y_4[n-2]$ $\qquad y_4[-2] = 0$

$y_4[-1] = 0$

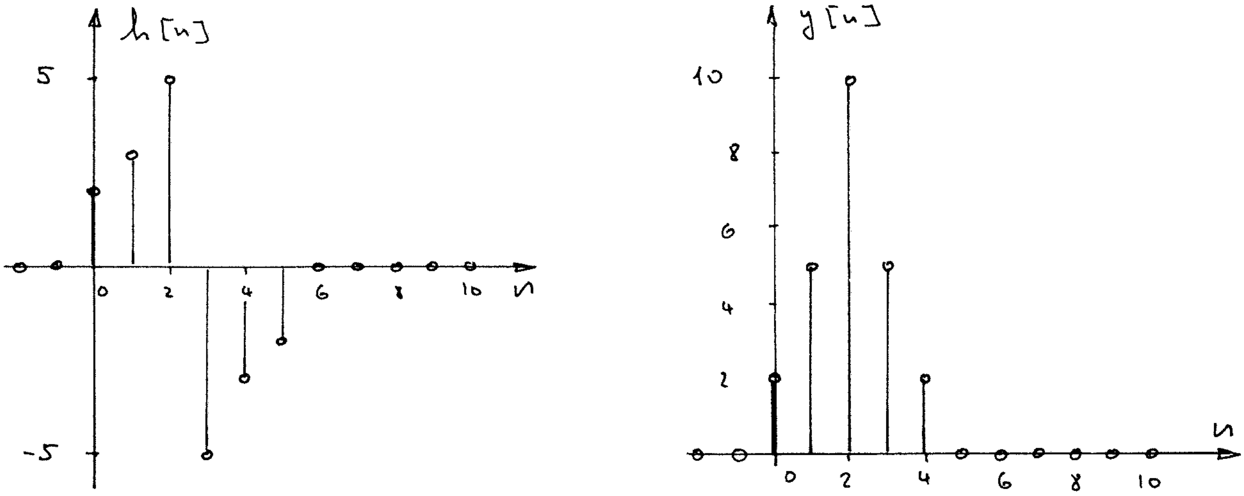


n	$\delta[n]$	$y_4[n]$	$\varepsilon[n]$	$y_4[n]$
0	1	1	1	1
1	0	1	1	2
2	0	1/2	1	2,5
3	0	0	1	3
4	0	-1/2	1	2,75
5	0	-1/2	1	2,25
6	0	-1/4	1	
7	0	0	1	
8	0	1/8	1	

CSNT 2 :

a) $y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] + 5x[n-2] - 5x[n-3] - 3x[n-4] - 2x[n-5]$

b)



c) $y[0] = 2 \cdot 1 + 0 = 2$

$y[1] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$

$y[2] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 10$

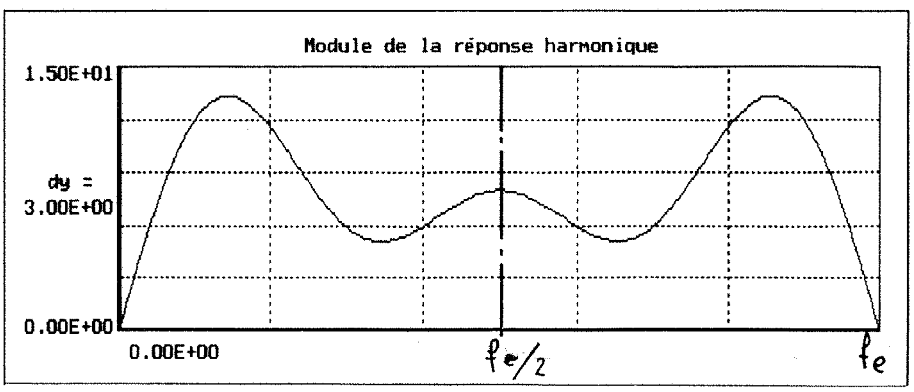
$y[3] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 5$

$y[4] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 2$

$y[5] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$

$y[n \geq 6] = 0$

d) C'est un filtre passe bande qui n'atténue qu'imparfaitement les hautes fréquences :



CSNT3

$$y[n] = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} x[n-k]$$

n	$\varepsilon[n]$	$\varepsilon[n-10]$	$x[n]$	$y[n]$
0	1	0	1	1/5
1	1	0	1	2/5
2	1	0	1	3/5
3	1	0	1	4/5
4	1	0	1	5/5
5	1	0	1	5/5
6	1	0	1	5/5
7	1	0	1	5/5
8	1	0	1	5/5
9	1	0	1	5/5
10	1	1	0	4/5
11	1	1	0	3/5
12	1	1	0	2/5
13	1	1	0	1/5
14	1	1	0	0/5

CSNT4

$$\tau \dot{y} + y = x \qquad H(s) = \frac{1}{1+s\tau} \qquad H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f\tau}, \; f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$$

$$\tau\left(\frac{y[n]-y[n-1]}{T_e}\right) + y[n] = x[n]$$

$$y[n]\left(1+\frac{\tau}{T_e}\right) = x[n] + y[n-1]\frac{\tau}{T_e}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{1+\frac{\tau}{T_e}}\right) x[n] + \left(\frac{\tau}{T_e+\tau}\right) \cdot y[n-1]$$

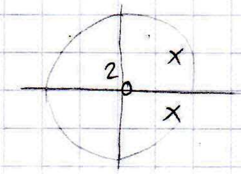
Si $f_c = 1000\ Hz$, alors $\tau = \frac{1}{2\pi f_c} =$

$T_e = 10^{-4}\ [s]$

CSNTS

$y[n] = x[n] + 1.2\, y[n-1] - 0.4\, y[n-2]$

$b_0 = 1 \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -1,2 \quad a_2 = 0,4$



passe bas

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1,2z + 0,4}$$

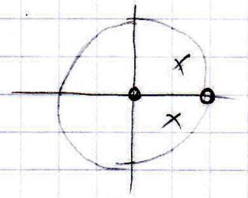
$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1,2z + 0,4} = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 1,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}$$

$$y[0] = \lim_{z \to \infty} Y(z) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} (z-1)\, Y(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z^3}{z^2 - 1,2z + 0,4} = \frac{1}{1 - 1.2 + 0.4} = 5$$

$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2\, y[n-1] - 0.4\, y[n-2]$

$b_0 = 1 \quad b_1 = -1 \quad a_1 = -1,2 \quad a_2 = 0,4$



passe bande

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 1,2z + 0,4}$$

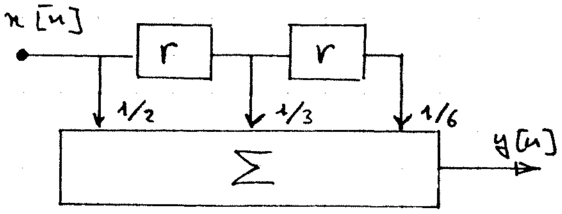
$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \; \frac{z^2 - z}{z^2 - 1,2z + 0,4} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \frac{1 - z^{-1}}{1 - 1,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}$$

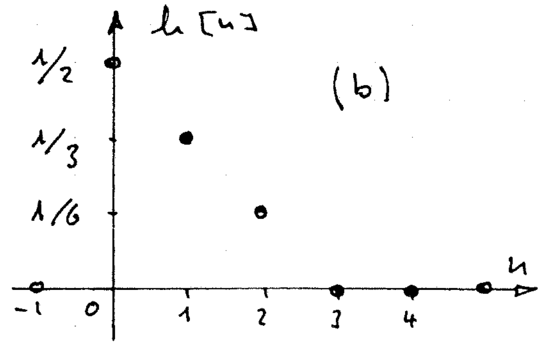
$$y[0] = \lim_{z \to \infty} Y(z) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} (z-1)\, Y(z) = 1 \cdot \frac{0}{1 - 1,2 + 0,4} = 0$$

CSNF1

a)





c) $H(j\Omega) \equiv \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-jn\Omega} = \frac{1}{6}\left[3 + 2\, e^{-j\Omega} + 1\, e^{-j2\Omega}\right]$

$$= \frac{1}{6}\left[3 + 2\cos\Omega + \cos 2\Omega - j\left(2\sin\Omega + \sin 2\Omega\right)\right]$$

d) $H(0) = 1/6\ (3 + 2 + 1) = 1\ \angle 0$

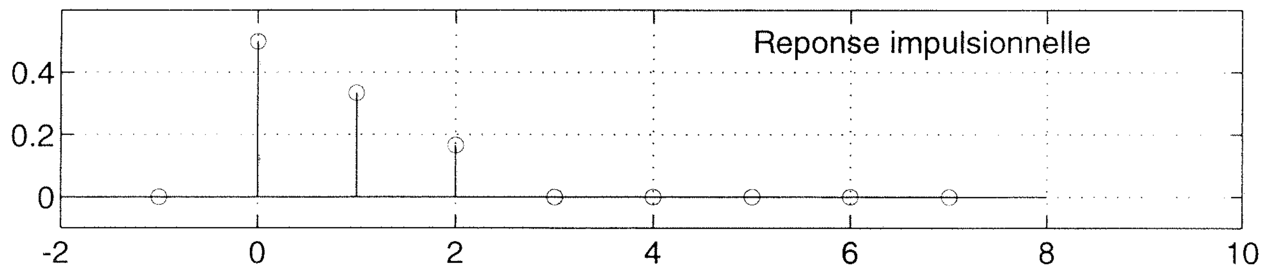
$H(\pi/2) = 1/6\ \left(3 + 0 - 1 - j(2 + 0)\right) = 1/6\ (2 - j2) = \frac{\sqrt{2}}{3}\ \angle -\pi/4$

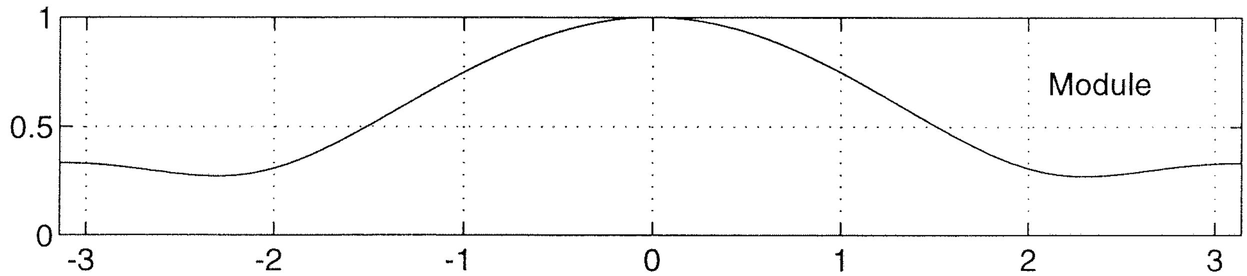
$H(2\pi/3) = 1/6\left(3 - 1 - 0{,}5 - j(1{,}732 - 0{,}866)\right) = 1/6\ (1{,}5 - j0{,}866)$

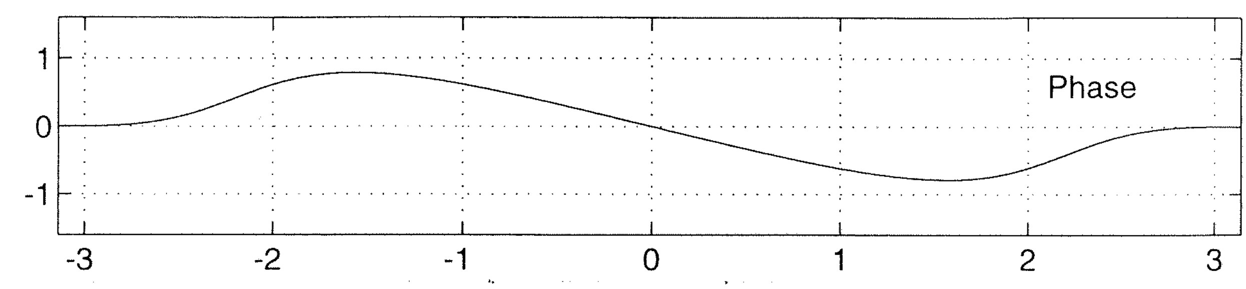
$= 0{,}289\ \angle -\pi/6$

$H(\pi) = 1/6\ (3 - 2 + 1) = 1/3\ \angle 0$

e)



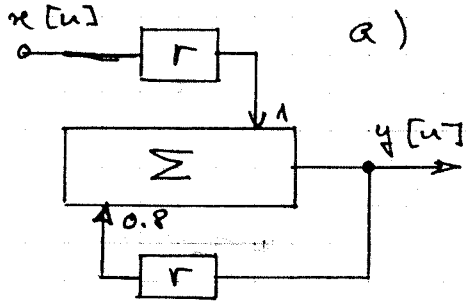




CSNF 2 :

$$\boxed{0.9 \longrightarrow 0.8}$$

a)



b) $Y(j\Omega) = e^{-j\Omega} X(j\Omega) + 0.8 e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$

$$Y(j\Omega)\left[1 - 0.8 e^{-j\Omega}\right] = e^{-j\Omega} X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) \equiv \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - 0.8 e^{-j\Omega}}$$

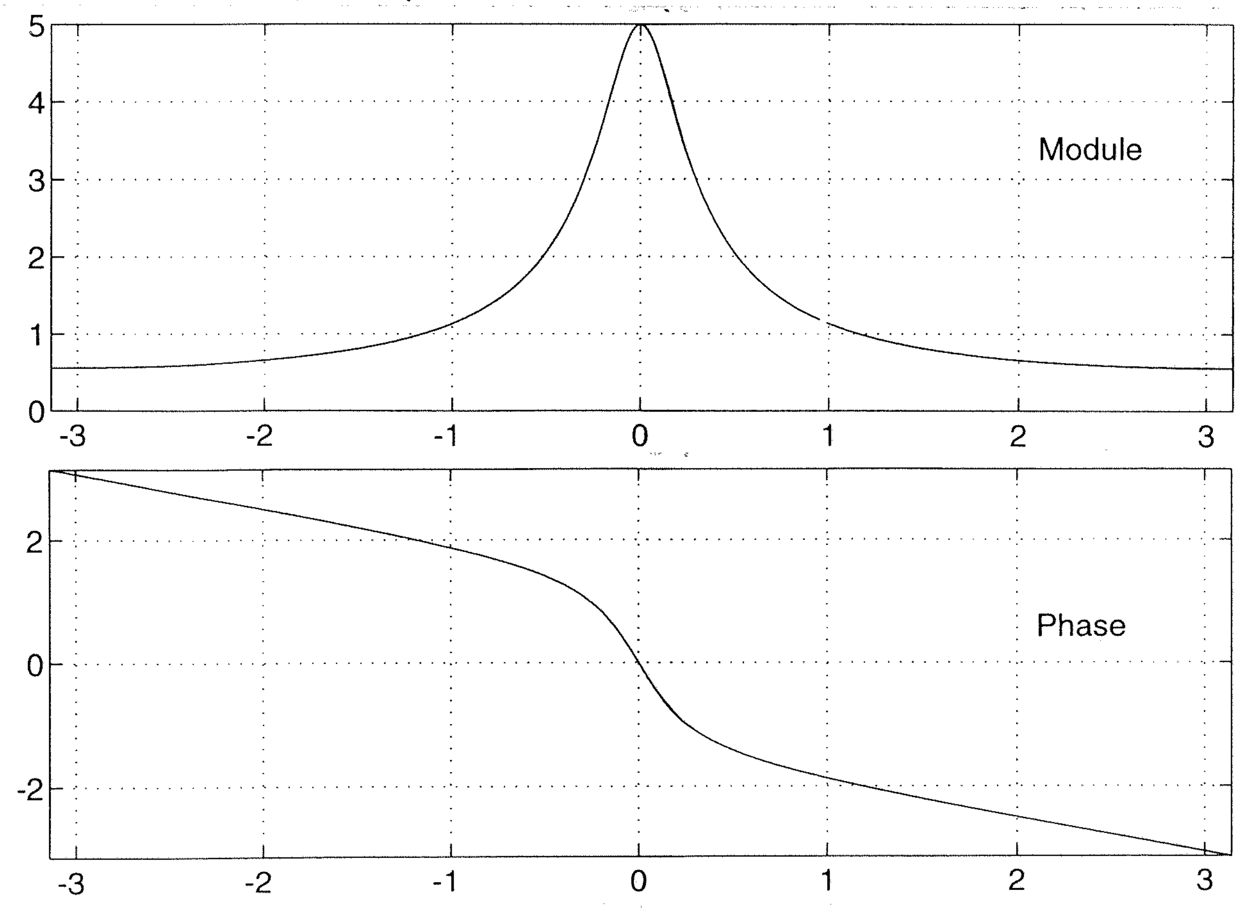
c) $\Rightarrow |H| = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - 0.8\cos\Omega)^2 + (0.8\sin\Omega)^2}}$

$$\angle H = -\Omega - \operatorname{arctg} \frac{0.8 \sin\Omega}{1 - 0.8\cos\Omega}$$

d) $H(0) = \dfrac{1}{1 - 0.8} = 5 \angle 0$

$$H(j\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.64}} \angle -\pi/2 - \operatorname{arctg} \frac{0.8}{1} = 0{,}781 \angle -2{,}245$$

$$H(j\pi) = \frac{-1}{1 + 0.8} = 0.55 \angle -\pi$$



CSFN3 :

a) TF de l'équ aux différences :

$$Y(j\Omega)\left[1-2R\cos\Omega_0\, e^{-j\Omega}+R^2e^{-j2\Omega}\right]=R\sin\Omega_0\, e^{-j\Omega}X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad H(j\Omega)=\frac{R\sin\Omega_0\, e^{-j\Omega}}{1-2R\cos\Omega_0\, e^{-j\Omega}+R^2e^{-j2\Omega}}$$

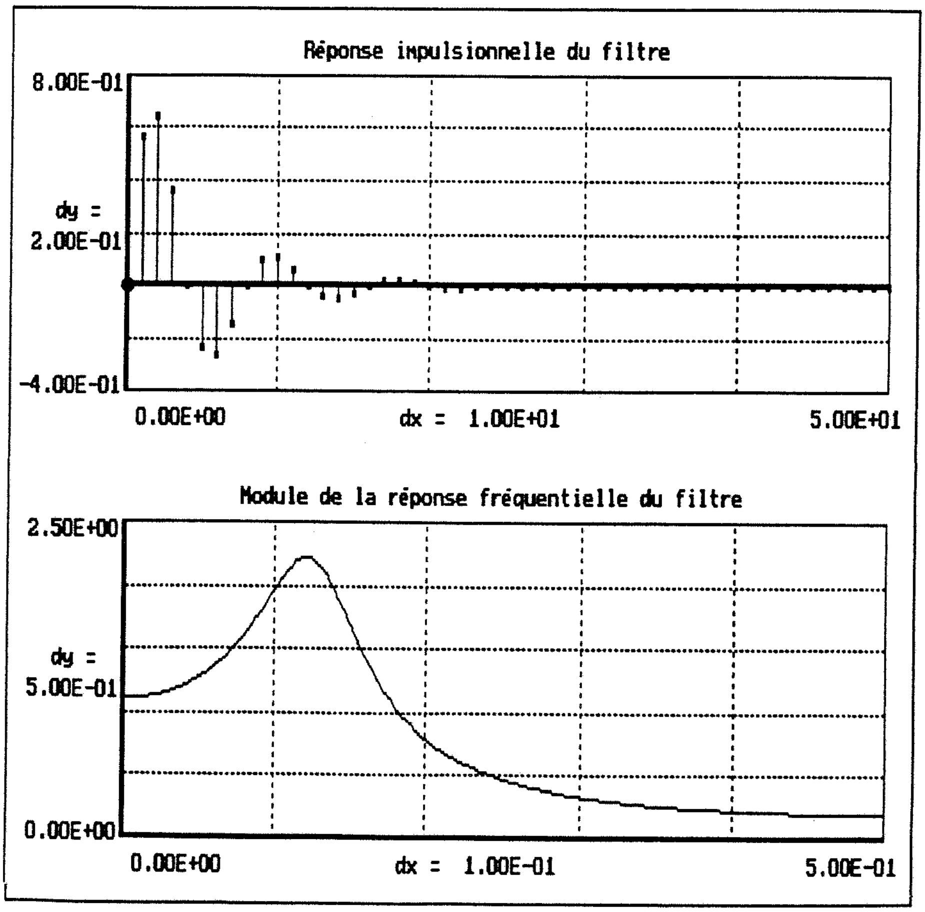
b) $$H(0)=\frac{R\sin\Omega_0}{1-2R\cos\Omega_0+R^2}=\frac{0,565685}{0,508629}=1,112\ \underline{/0}$$

$$H(j\pi)=\frac{-R\sin\Omega_0}{1+2R\cos\Omega_0+R^2}=\frac{-0,565684}{2,77137}=0,204\ \underline{/-\pi}$$

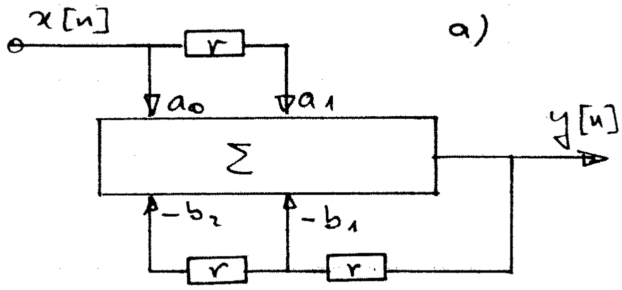
$$H(j\pi/4)=\frac{R\sin\Omega_0\cos(\pi/4)-jR\sin\Omega_0\cdot\sin(\pi/4)}{1-2R\cos\Omega_0\cos(-\pi/4)+R^2\cos(\pi/2)+j\left(2R\cos\Omega_0\sin\frac{\pi}{4}-R^2\sin(-\pi/2)\right)}$$

$$=\frac{0,4-j0.4}{0.2+j0.16}=2,2086\ \underline{/-1.46}$$

c)



CSNF4 :



b) TF de l'équ. aux différences

$$Y(j\Omega)\left[1+b_1 e^{-j\Omega}+b_2 e^{-2j\Omega}\right] =$$
$$= X(j\Omega)\left[a_0 + a_1 e^{-j\Omega}\right]$$

$$\Rightarrow \quad H(j\Omega) \equiv Y(j\Omega)/X(j\Omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\Omega}}{1+b_1 e^{-j\Omega}+b_2 e^{-j\Omega}}$$

c) $$H(0) = \frac{a_0 + a_1}{1+b_1+b_2} \quad ; \quad H(j\pi) = \frac{a_0 - a_1}{1-b_1+b_2}$$

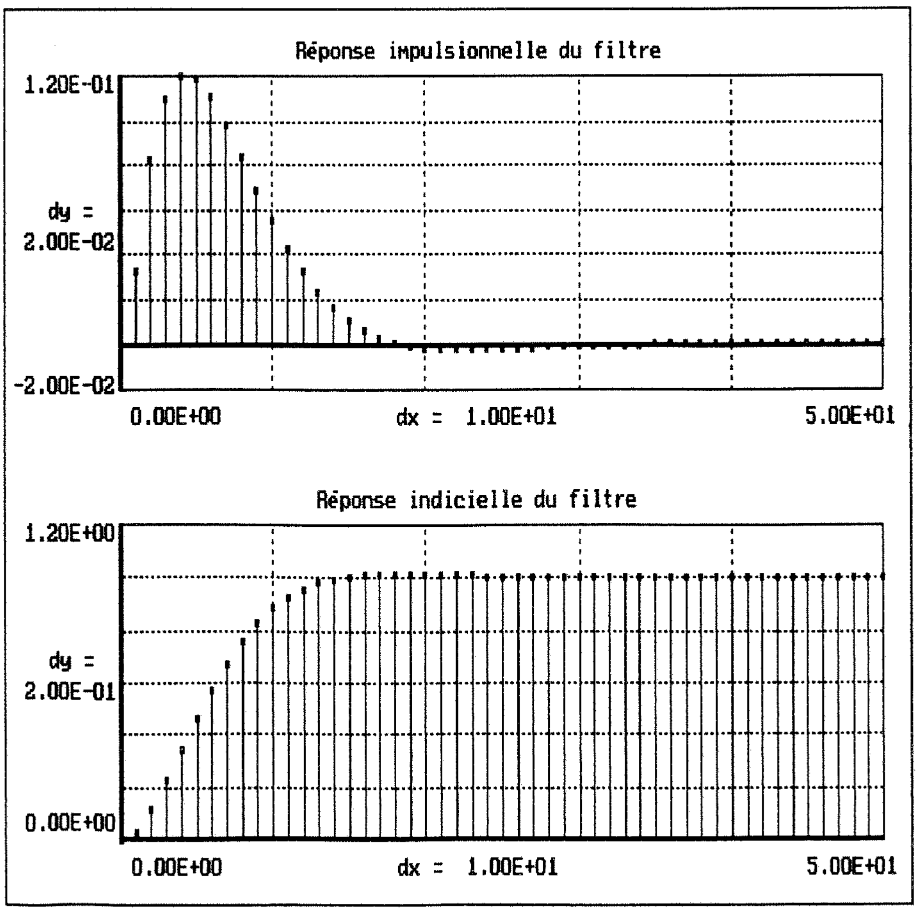
d) FPB : $\Rightarrow$ $H(0) = 1$; $H(j\pi) = 0$

d'où $a_0 + a_1 = 1 + b_1 + b_2$; $a_0 = a_1$ et $1 - b_1 + b_2 \neq 0$

FPH : $\Rightarrow$ $H(0) = 0$; $H(j\pi) = 1$

d'où $a_0 = -a_1$ et $1 + b_1 + b_2 \neq 0$; $a_0 - a_1 = 1 - b_1 + b_2$

Exemple d'un FPBas



$$H(j\Omega) = \frac{0.03215 + 0.03215\, e^{-j\Omega}}{1 - 1.575\, e^{-j\Omega} + 0.64\, e^{-j2\Omega}}$$

CSNFS

$x(t) = 5\sin(2\pi f_0 t)$ $\qquad f_0 = 1\,kHz$

$x[n] = 5\sin(2\pi f_0\, kT_e)$ $\qquad Te = 0{,}1\ ms$

$y[n] = 0{,}1\, x[n] + 0{,}9\, y[n-1]$

$a_0 = 1 \quad b_0 = 0{,}1 \quad a_1 = 0{,}9$

$$H(z) = \frac{0{,}1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$H(f_0) = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9\, e^{-j\frac{2\pi f_0}{Fe}}} = \frac{0{,}1}{1 - 0{,}9\, e^{-j\frac{2\pi}{10}}} = 0{,}77 - 1{,}49 j \begin{cases} A \doteq 1{,}68 \\ \alpha = -62{,}7^\circ = -1{,}09\ rad \end{cases}$$

$y[n] = 8{,}4 \cdot \sin[2\pi f_0 n Te - 1{,}09]$

$y(t)$ obtenu par sample and hold de $y[n]$