

heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

Département Technologies Industrielles

Unité SES Analyse des systèmes analogiques

Quelques corrigés
d'exercices

F. Mudry

1 Analyse des systèmes linéaires

TL 1 : Transformant de Laplace l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 11\dot{y}(t) + 24y(t) = 5\dot{x}(t) + 3x(t)$$

on obtient

$$s^2Y(s) + 11sY(s) + 24Y(s) = 5sX(s) + 3X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 11s + 24) = X(s)(5s + 3)$$

d'où

$$H_1(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s + 3}{s^2 + 11s + 24}$$

Transformant de Laplace l'équation différentielle

$$6\dot{y}(t) + 11y(t) + \int (y(t) - x(t)) dt = x(t)$$

on obtient

$$6sY(s) + 11Y(s) + \frac{Y(s)}{s} - \frac{X(s)}{s} = X(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{6s^2 + 11s + 1}{s} \right) = X(s) + \frac{X(s)}{s} = \frac{sX(s) + X(s)}{s}$$

d'où

$$H_2(s) \equiv \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{6s^2 + 11s + 1}$$

TL 2 : Considérant la fonction de transfert générale

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{a_0 + a_1s + a_2s^2} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

on obtient

$$Y(s)(a_0 + a_1s + a_2s^2) = X(s)(b_0 + b_1s + b_2s^2)$$

$$a_0Y(s) + a_1sY(s) + a_2s^2Y(s) = b_0X(s) + b_1sX(s) + b_2s^2X(s)$$

La transformation inverse de Laplace donne alors l'équation différentielle suivante

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_2\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_0x(t)$$

TL 3 : Les zéros sont les racines du numérateur de la fonction de transfert $H(s)$; ce qui donne

$$N_1(s) = s - 5 = \Rightarrow z_1 = +5$$

$$N_2(s) = s^2 + 3s + 5 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -1.5 \pm j1.66$$

$$N_3(s) = 5s^2 + 7s + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = -1; z_2 = -0.4$$

Les pôles sont les racines du dénominateur $D(s)$ de la fonction de transfert $H(s)$. Pour chacun des trois cas, on a

$$D_1(s) = s^2 + 3s + 8 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -1.5 \pm j2.4$$

$$D_2(s) = s^3 + 2s^2 + 1s + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -2.17 \\ p_{2,3} = +0.087 \pm j1.17 \end{cases}$$

$$D_3(s) = s^2 - 3s + 5 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = +1.5 \pm j1.66$$

Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert ont la partie réelle négative. On en déduit que seul le système décrit par $H_1(s)$ est stable. On notera que la valeur des zéros n'a aucun effet sur la stabilité des systèmes.

TL 4 : Les fonctions de transfert $H_k(s)$ étudiées sont

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{1}{1 + s/1000} & H_2(s) &= \frac{s}{s + 1000} \\ H_3(s) &= \frac{5}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} & H_4(s) &= \frac{1 + 4 \cdot 10^{-6}s^2}{1 + 1 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \\ H_5(s) &= \frac{10 \cdot 10^{-3}s}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} & H_6(s) &= \frac{s + 200}{s + 50} \frac{5}{1 + 10 \cdot 10^{-3}s + 4 \cdot 10^{-6}s^2} \end{aligned}$$

1. Pôles et zéros

$$\begin{aligned} H_1(s) &\Rightarrow p_1 = -1000 \\ H_2(s) &\Rightarrow z_1 = 0, \quad p_1 = -1000 \\ H_3(s) &\Rightarrow p_{1,2} = -125 \pm j484 \\ H_4(s) &\Rightarrow z_1 = \pm j500, \quad p_{1,2} = -125 \pm j484 \\ H_5(s) &\Rightarrow z_1 = 0, \quad p_1 = -2396, \quad p_2 = -104.4 \\ H_6(s) &\Rightarrow z_1 = -200, \quad p_1 = -50, \quad p_2 = -2396, \quad p_3 = -104.4 \end{aligned}$$

On notera que l'unité des pôles et zéros est l'inverse du temps : $[p_k] = [z_k] = [1/sec]$

2. Réponse indicielle : L'expression générale du signal de sortie dépend du pôle $p_0 = 0$ dû au saut unité et des pôles p_k du système

$$U_2(s) = \frac{1}{s} H(s) \Rightarrow u_2(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k e^{+p_k t}$$

avec $A_0 = 0$ lorsque le pôle $p_0 = 0$ se simplifie avec un zéro ($H_2(s)$ et $H_5(s)$). On a donc

$$\begin{aligned} H_1(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_0 + A_1 e^{-1000t} \\ H_2(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_1 e^{-1000t} \\ H_3(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_0 + A_1 e^{-125t} \cos(484t + \alpha_1) \\ H_4(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_0 + A_1 e^{-125t} \cos(484t + \alpha_1) \\ H_5(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_1 e^{-2396t} + A_2 e^{-104.4t} \\ H_6(s) &\Rightarrow u_2(t) = A_0 + A_1 e^{-50t} + A_2 e^{-2396t} + A_3 e^{-104.4t} \end{aligned}$$

3. Les valeurs initiale et finale de $u_2(t)$ se calculent avec

$$u_2(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s U_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} H_k(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} H_k(s)$$

$$u_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s U_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} H_k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H_k(s)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} H_1(s) : & \quad u_2(0_+) = 0 & \quad u_2(\infty) = 1 \\ H_2(s) : & \quad u_2(0_+) = 1 & \quad u_2(\infty) = 0 \\ H_3(s) : & \quad u_2(0_+) = 0 & \quad u_2(\infty) = 5 \\ H_4(s) : & \quad u_2(0_+) = 1 & \quad u_2(\infty) = 1 \\ H_5(s) : & \quad u_2(0_+) = 0 & \quad u_2(\infty) = 0 \\ H_6(s) : & \quad u_2(0_+) = 0 & \quad u_2(\infty) = 20 \end{aligned}$$

4. La durée de la réponse transitoire dépend de la constante de temps la plus grande et il n'y a des oscillations que si les pôles sont complexes. On a alors

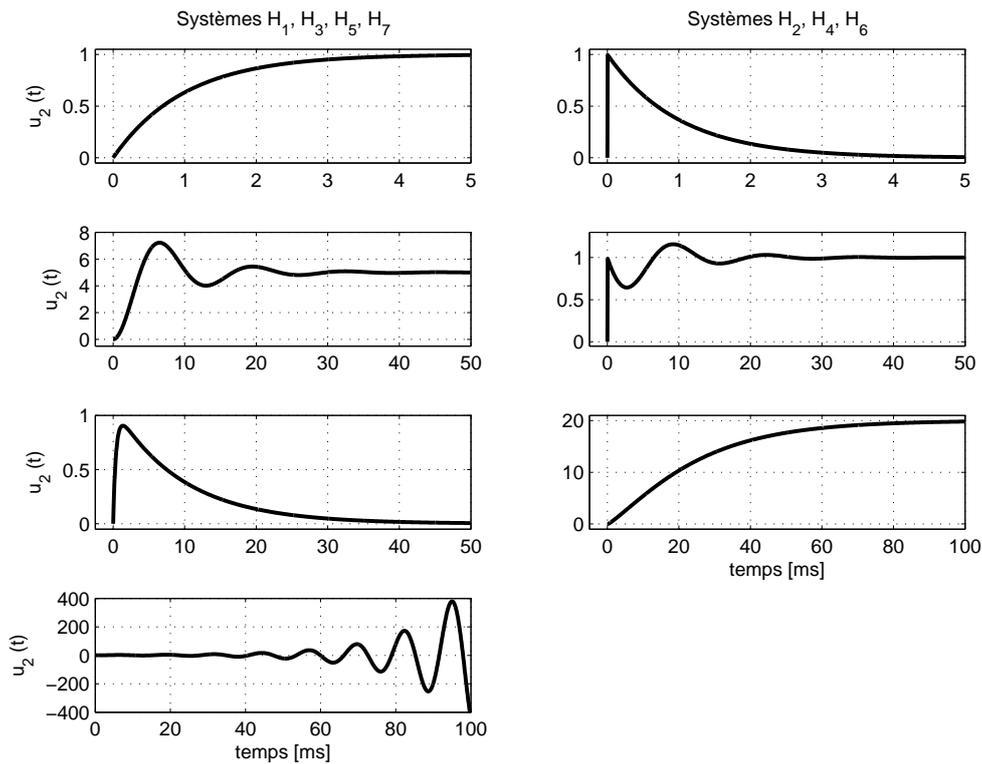
$$\tau_k = \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_k)|}, \quad t_{tr} = 5 \tau_{max}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}(p_k)|}, \quad N_{osc} = \frac{5\tau}{T_p} = \frac{5}{|\operatorname{Re}(p_k)|} \frac{|\operatorname{Im}(p_k)|}{2\pi}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} H_1(s) : & \quad t_{tr} = 5 \text{ ms} & \quad \text{pas d'oscillation} \\ H_2(s) : & \quad t_{tr} = 5 \text{ ms} & \quad \text{pas d'oscillation} \\ H_3(s) : & \quad t_{tr} = 40 \text{ ms} & \quad N_{osc} \simeq 3 \\ H_4(s) : & \quad t_{tr} = 40 \text{ ms} & \quad N_{osc} \simeq 3 \\ H_5(s) : & \quad t_{tr} = 48 \text{ ms} & \quad \text{pas d'oscillation} \\ H_6(s) : & \quad t_{tr} = 100 \text{ ms} & \quad \text{pas d'oscillation} \end{aligned}$$

5. Graphes



TL 5 : Réponse à une rampe d'un circuit RC passe-bas. On a dans ce cas :

$$u_1(t) = a t \epsilon(t) \Rightarrow U_1(s) = \frac{a}{s^2}$$

$$U_2(s) = U_1(s) H(s) = \frac{a}{s^2} \frac{1}{1 + sRC} = \frac{a}{s^2} \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

La décomposition en somme de fractions simples

$$U_2(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s + 1/RC}$$

montre que la tension de sortie s'écrira sous la forme

$$u_2(t) = A_1 + A_2 t + A_3 e^{-t/RC}$$

et que $U_2(s)$ vaut également

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3}{s + 1/RC} \\ &= \frac{A_1 s(s + 1/RC) + A_2(s + 1/RC) + A_3 s^2}{s^2 (s + 1/RC)} \\ &= \frac{A_2/RC + s(A_1/RC + A_2) + s^2(A_1 + A_3)}{s^2 (s + 1/RC)} \end{aligned}$$

Par identification des coefficients des deux numérateurs décrivant $U_2(s)$, on en déduit

$$\begin{aligned} A_2/RC &= a/RC \\ A_1/RC + A_2 &= 0 \\ A_1 + A_3 &= 0 \end{aligned}$$

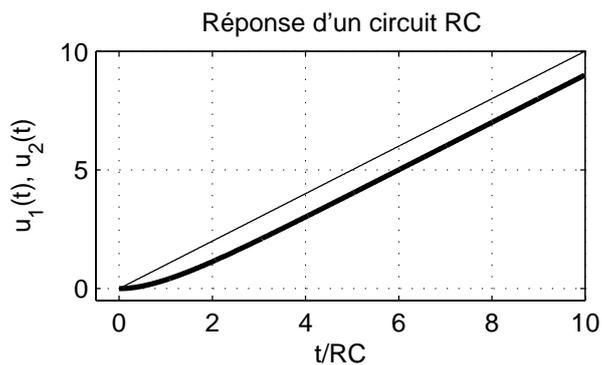
d'où

$$A_2 = +a, \quad A_1 = -aRC, \quad A_3 = +aRC$$

Ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -aRC + at + aRC e^{-t/RC} \\ &= +a(t - RC) + aRC e^{-t/RC} \end{aligned}$$

On voit ainsi qu'une fois le régime transitoire disparu, la tension de sortie est une rampe de pente a décalée d'un temps égal à RC .



TL 6 : Réponse à une rampe d'un filtre passe-bas d'ordre 2 ($\zeta < 1$).

Tenant compte des valeurs numériques $R = 500 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ nF}$, on a

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

$$Y(s) = X(s) H(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

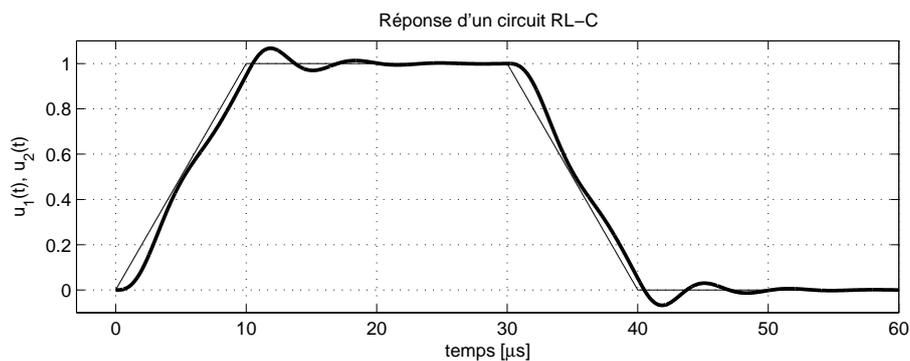
avec

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 [\text{rad/sec}] \quad Q_0 = \frac{1}{\omega_n RC} = 2 \quad \zeta = \frac{1}{2Q_0} = 0.25$$

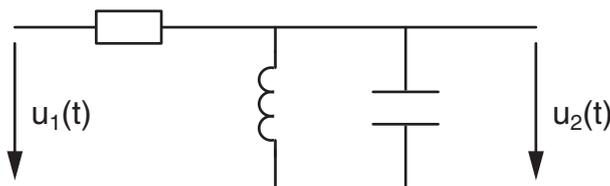
$$\tau = \frac{1}{\zeta \omega_n} = 4 [\mu\text{sec}] \quad t_{dec} = \frac{2\zeta}{\omega_n} = 2\zeta^2 \tau = 0.5 [\mu\text{sec}]$$

La durée du régime transitoire et le nombre de périodes visibles vaudront alors

$$t_{tr} = 20 [\mu\text{sec}] \quad N_{osc} = 3$$



TL 7 :



1. Le circuit $R - L//C$ est un filtre passe-bande.
2. Les équations temporelles reliant $u_2(t)$ à $u_1(t)$ pour $t \geq 0$ (CI nulles) sont :

$$u_1(t) = R(i_L(t) + i_C(t)) + u_2(t)$$

$$u_2(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_2(t) dt$$

$$u_2(t) = \frac{1}{LC} \int_0^t i_C(t) dt \Rightarrow i_C(t) = C \frac{du_2(t)}{dt}$$

Portant ces deux courants dans la première équation, il vient

$$u_1(t) = \left(\frac{R}{L} \int_0^t u_2(t) dt + RC \frac{du_2(t)}{dt} \right) + u_2(t)$$

Après dérivation, on obtient l'équation différentielle du circuit

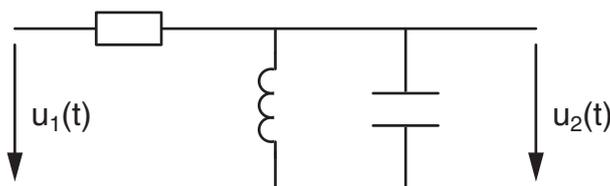
$$RC \ddot{u}_2(t) + \dot{u}_2(t) + \frac{R}{L} u_2(t) = \dot{u}_1(t)$$

3. En transformant de Laplace cette équation, on obtient la fonction de transfert du circuit

$$s^2 RC U_2(s) + s U_2(s) + \frac{R}{L} U_2(s) = s U_1(s)$$

$$U_2(s) \left(s^2 + \frac{s}{RC} U_2(s) + \frac{1}{LC} \right) = \frac{s}{RC} U_1(s)$$

$$\Rightarrow H(s) \equiv \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

TL 8 : Filtre passe-bande $R - L//C$ 

1. En appliquant l'inverse de la règle du diviseur de tension, on obtient

$$\frac{1}{H(s)} = \frac{Z_1(s) + Z_2(s)}{Z_2(s)} = 1 + Z_1(s)Y_2(s)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{H(s)} &= 1 + R \left(\frac{1}{sL} + sC \right) \\ &= \frac{sL + R + s^2 LCR}{sL} \\ &= \frac{1 + sL/R + s^2 LC}{sL/R}\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement la fonction de transfert du filtre passe-bande

$$H(s) = \frac{sL/R}{1 + sL/R + s^2 LC} = \frac{\frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n}}{1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n} \right)^2}$$

2. Considérant $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ nF}$, on obtient

$$H(s) = \frac{sL/R}{1 + sL/R + s^2 LC} = \frac{2 \cdot 10^{-5} s}{1 + 2 \cdot 10^{-5} s + 1 \cdot 10^{-12} s^2}$$

d'où l'on tire

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 [\text{rad/sec}], \quad Q_0 = \frac{R}{\omega_n L} = 5, \quad \zeta = \frac{1}{2Q_0} = 0.1$$

Les pôles de $H(s)$ s'obtiennent en annulant son dénominateur

$$D(s) = 1 + 2 \cdot 10^5 s + 1 \cdot 10^{12} s^2 = 0$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -100'000 \pm j995'000 [\text{sec}^{-1}]$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{100'000} = 10 [\mu\text{sec}] & T_p &= \frac{2\pi}{995'000} = 6.3 [\mu\text{sec}] \\ t_{tr} &= 5\tau = 50 [\mu\text{sec}] & N_{osc} &= \frac{t_{tr}}{T_p} = \frac{50}{6.3} \simeq 8\end{aligned}$$

3. Comme on a affaire à un filtre passe-bande, sa réponses indicielle est caractérisée par

$$u_2(0_+) = 0, \quad u_2(\infty) = 0$$

4. On peut montrer que le nombre de périodes visibles est dicté par le facteur de qualité

$$N_{osc} \simeq 1.6 Q_0$$

On en déduit ainsi que $Q_0 = N_{osc}/1.6$. Si l'on veut $N_{osc} \simeq 1.5$, il faut donc prendre $Q_0 = 0.94$ qui s'obtient avec une résistance valant

$$R = Q_0 \omega_n L \simeq 940 [\Omega]$$

TL 9 : Quelques réponses :

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1; \quad \tau_1 = 0.1 [\text{sec}], \quad \tau_2 = 2 [\text{sec}]; \quad t_{trans} = 10 [\text{sec}], \quad N_{osc} \simeq 6$$

TL 10 : Considérant que le dépassement dépend seulement du coefficient d'amortissement

$$D = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

et que le temps d'établissement à 5% est fixé par

$$t_{5\%} \simeq 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

on en déduit

$$\zeta(D) = \frac{|\ln(D)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(D)}}$$

$$\omega_n \simeq \frac{3}{\zeta t_{5\%}}$$

Sachant que l'on veut un temps d'établissement inférieur à 10 μs et un dépassement maximum de 5%, il vient

$$\zeta(5\%) > 0.69$$

$$Q_0 = \frac{1}{2\zeta} < 0.72$$

$$\omega_n = \frac{3}{\zeta t_{5\%}} > 44 \cdot 10^5 \text{ [rad/sec]}$$

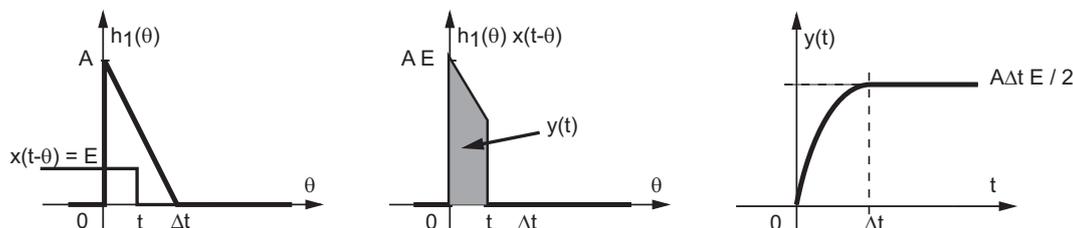
Ce qui conduira à un temps de montée valant à peu près

$$t_r \simeq \frac{1.8}{\omega_n} \simeq 4 \text{ [\musec]}$$

Conv 1a On a choisi de calculer le produit de convolution avec l'expression suivante

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t-\theta) d\theta$$

A cette expression correspondent les deux premiers graphes de la figure ci-dessous.



Pour calculer $y(t)$, il faut décomposer le problème en trois parties :

1. pour $t < 0$, le produit des fonctions $x(t-\theta)$ et $h(\theta)$ est nul et on a bien évidemment $y(t) = 0$;

2. pour $0 \leq t \leq \Delta t$, on a

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\theta) E d\theta = \text{surface du trapèze de base } t \\ &= E \int_0^t \left(A - \frac{A}{\Delta t} \theta \right) d\theta = A E \int_0^t \left(1 - \frac{1}{\Delta t} \theta \right) d\theta \\ &= A E \left(t - \frac{t^2}{2\Delta t} \right) = A E \Delta t \left(\frac{t}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\Delta t} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui correspond à un arc de parabole pour $0 \leq t \leq \Delta t$ (troisième graphe).

3. pour $t > \Delta t$, le signal de sortie est constant et son amplitude vaut simplement la surface totale du triangle

$$y(t) = \frac{AE \Delta t}{2}$$

Dans le cas où les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont des tensions électriques, les unités de la réponse impulsionnelle sont des volt/sec.

Conv 1b Ce problème est similaire au précédent et on voit immédiatement que l'on doit avoir les valeurs particulières suivantes

$$y(t \leq 0) = 0, \quad y(t = \Delta t) = \frac{A\Delta t E}{2}, \quad y(t \geq 2\Delta t) = A\Delta t E$$

De plus, on montre aisément que la réponse $y(t)$ sera cette fois-ci constituée de deux arcs de parabole tels que

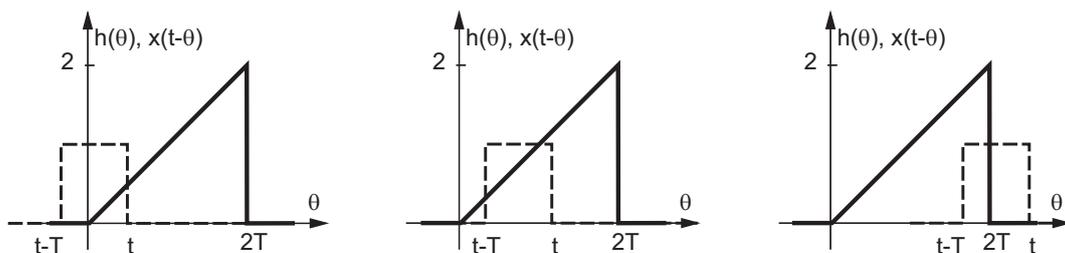
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{AE\Delta t}{2} \left(\frac{t}{\Delta t} \right)^2 \quad \text{si } 0 \leq t \leq \Delta t \\ y(t) &= \frac{AE\Delta t}{2} \left(-2 + 4 \frac{t}{\Delta t} - \left(\frac{t}{\Delta t} \right)^2 \right) \quad \text{si } \Delta t \leq t \leq 2\Delta t \end{aligned}$$

Conv 2 Le produit de convolution et les fonctions concernées sont définies comme suit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t-\theta) d\theta$$

$$h(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < 0 \\ \frac{\theta}{T} & \text{si } 0 \leq \theta \leq 2T \\ 0 & \text{si } \theta > 2T \end{cases} \quad x(t-\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } t-\theta < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t-\theta \leq T \\ 0 & \text{si } t-\theta > T \end{cases}$$

Considérant les graphes ci-dessous,



on obtient :

1. pour $t < 0$,

$$y(t) = 0$$

2. pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta \\ &= \int_0^t \frac{\theta}{T} d\theta = \frac{t^2}{2T} \end{aligned}$$

3. pour $T < t < 2T$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T}^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta \\ &= \int_{t-T}^t \frac{\theta}{T} d\theta = \frac{\theta^2}{2T} \Big|_{t-T}^t = \frac{t^2 - (t-T)^2}{2T} = \frac{2t - T}{2} \end{aligned}$$

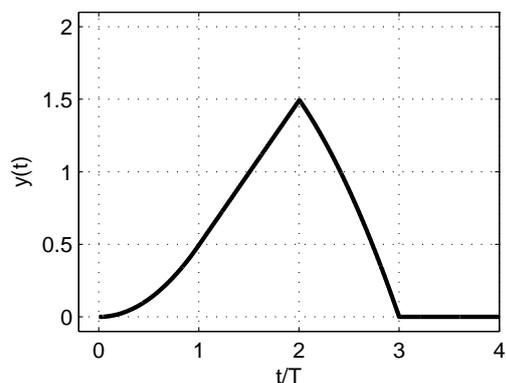
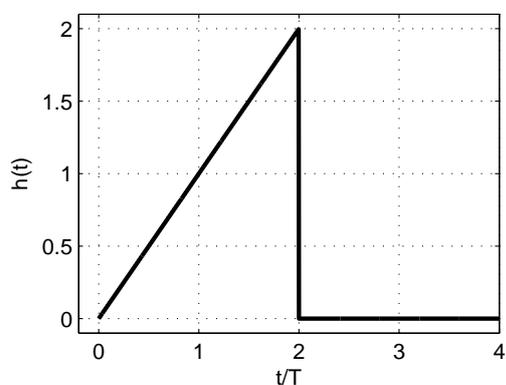
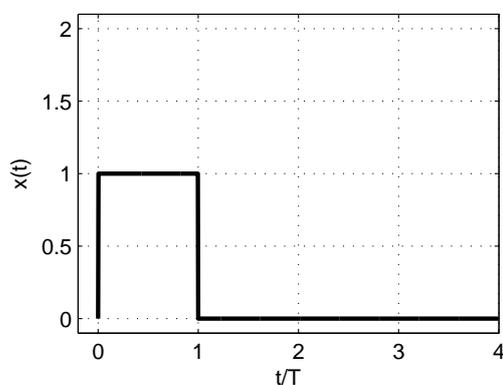
4. pour $2T \leq t \leq 3T$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-2T}^{2T} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \\ &= \int_{t-2T}^{2T} \frac{\theta}{T} d\theta = \frac{\theta^2}{2T} \Big|_{t-2T}^{2T} = \frac{4T^2 - (t-T)^2}{2T} = \frac{3T^2 - t^2 + 2tT}{2T} \end{aligned}$$

5. pour $t > 3T$,

$$y(t) = 0$$

Le graphe correspondant à cette fonction continue par morceaux est représenté ci-dessous.



2 Modélisation des systèmes analogiques

Sanl 1 L'observation du graphe $|Z(jf)|$ montre qu'en basse fréquence, sa valeur tend vers 20Ω ; on en déduit que

$$R = 20 \Omega$$

Dans la partie croissante due à $Z \simeq \omega L$, on voit que l'on a $Z = 1000 \Omega$ pour $f \simeq 650 \text{ Hz}$; on en déduit que

$$L = \frac{Z}{\omega} = \frac{Z}{2\pi f} \simeq \frac{1000}{2\pi \cdot 650} = 0.244 \text{ H}$$

Dans la partie décroissante due à $Z \simeq 1/\omega C$, on voit que l'on a $Z = 400 \Omega$ lorsque $f \simeq 400 \text{ kHz}$; on en déduit que

$$C = \frac{1}{\omega Z} = \frac{1}{2\pi f Z} \simeq \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 400} = 994 \text{ pF} \simeq 1 \text{ nF}$$

On peut vérifier si ces valeurs sont correctes, en calculant la fréquence de résonance théorique

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10.2 \text{ kHz}$$

qui semble bien être égale à celle lue sur le graphe $f_0 \simeq 10 \text{ kHz}$.

Sanl 2

1. Le schéma technologique représentant ce système est le même que celui du cours mis à part le fait que le point de suspension est maintenant fixe et que le déplacement est vertical. Avec l'axe Oy dirigé vers le haut et son origine placée à l'extrémité du ressort au repos sans masse, l'équation différentielle du système s'écrit

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F(t) - k y(t) - \lambda \frac{dy(t)}{dt}$$

2. La transformation de Laplace de cette équation donne

$$ms^2 Y(s) + \lambda s Y(s) + k Y(s) = F(s)$$

On en tire la fonction de transfert suivante

$$\begin{aligned} G(s) \equiv \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{1}{ms^2 + \lambda s + k} \\ &= \frac{1/m}{s^2 + s\lambda/m + k/m} \\ &= \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

Par identification avec la forme canonique, on voit que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta \equiv \frac{1}{2Q_0} = \frac{\lambda}{2m\omega_n}$$

3. Les pôles d'un système d'ordre 2 sont les racines du dénominateur de $G(s)$; celles-ci sont complexes lorsque la réponse temporelle est oscillante et elles valent

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Comme par définition, on a

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad \text{et} \quad \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

il vient

$$\omega_p^2 = \omega_n^2 (1 - \zeta^2) = \omega_n^2 - \omega_n^2 \zeta^2$$

d'où

$$\omega_n^2 = \omega_p^2 + \omega_n^2 \zeta^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}$$

4. En mesurant la durée d'une dizaine d'oscillations, on trouve $10T_p \simeq 5 \text{ sec}$. Comme l'enveloppe de l'oscillation est une exponentielle amortie, on peut trouver la constante de temps en recherchant le temps nécessaire pour atteindre le 63% de la variation de l'enveloppe. On trouve alors $\tau \simeq 2.5 \text{ sec}$. Ce qui donne

$$\omega_p \equiv \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{0.5} \simeq 12.6 \text{ [rad/sec]}$$

$$\omega_n = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}} \simeq \sqrt{12.6^2 + \frac{1}{2.5^2}} \simeq 12.6 \text{ [rad/sec]}$$

$$\zeta = \frac{1}{\tau\omega_n} \simeq \frac{1}{2.5 \cdot 12.6} = 0.032, \quad Q_0 = \frac{1}{2\zeta} \simeq 16$$

5. On a montré ci-dessus que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_n^2 = 0.1 \cdot 12.6^2 = 15.9 \text{ [N/m]}$$

6. La valeur de la position finale de la masse est atteinte lorsque l'élongation du ressort compense le poids de la masse. On a alors

$$k y_\infty = -m g \Rightarrow y_\infty = -\frac{m g}{k} = -\frac{0.981}{15.9} = -61.7 \text{ [mm]}$$

Sanl 3

On a montré dans le cours que la hauteur d'équilibre est indépendante de la section du réservoir et qu'elle ne dépend que du débit et de la section de l'orifice de sortie

$$H_0 = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q_0}{\rho A_2} \right)^2$$

Comme on a

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^2\text{]}$$

on trouve, respectivement pour les trois débits, les hauteurs suivantes

$$H_0 = 0.08, 0.33, 0.74 \text{ [m]}$$

Il est important de remarquer que le calcul analytique du temps de remplissage ne peut être qu'approximatif car, comme on l'a vu, l'équation décrivant le remplissage du réservoir est non linéaire et l'approximation linéaire n'est valable que pour des variations autour d'un point d'équilibre. Cependant, les courbes de simulation ont montré que la constante de temps du modèle linéaire

$$\tau = \frac{A_1}{\rho g A_2^2} Q_0$$

donne une bonne estimation de l'évolution temporelle. On peut donc admettre que, suivant le débit d'entrée, les attentes nécessaires pour atteindre le niveau d'équilibre vaudront respectivement

$$t_{tr} \simeq 5\tau = 6.8, 13.5, 20.3 \text{ [min]}$$

On peut noter que les rapports entre les trois valeurs de débit, hauteur et durée valent

$Q_{1,2,3}/Q_1$	1	2	3
$H_{1,2,3}/H_1$	1	4	9
$\tau_{1,2,3}/\tau_1$	1	2	3

Sanl 4

1. Le schéma technologique représentant ce système est le même que celui du cours mis à part le fait que le point de suspension est maintenant fixé à l'origine de l'axe Oy dirigé vers le bas. Si les oscillations sont faibles autour du point d'équilibre fixé par le poids de la masse, on peut admettre que le système est linéaire. En plaçant l'origine de l'axe au point d'équilibre, la loi de Newton s'écrit

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k y(t) - \lambda \frac{dy(t)}{dt}$$

car le poids mg est compensé par l'élongation du ressort. L'équation différentielle traduisant le mouvement de la masse suite à un léger déplacement devient alors

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

2. La transformation de Laplace de cette équation donne l'équation caractéristique

$$s^2 + \frac{\lambda}{m} s + \frac{k}{m} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Par identification des termes, on voit que l'on a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{\lambda}{2m\omega_n} = \frac{\lambda}{2\sqrt{mk}}$$

Comme on admet que les pertes sont faibles, le facteur d'amortissement ζ est plus petit que 1 et les racines de l'équation caractéristique, donc les pôles du systèmes, seront complexes

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$$

La position de la masse oscillera ainsi autour d'un point d'équilibre avec une constante de temps et une pulsation valant

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{2m}{\lambda} \quad \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \simeq \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Considérant les différentes masses (0.4, 0.8, 1.0 [kg]) suspendues au ressort, la caractéristique du ressort montre que celles-ci oscilleront, respectivement, autour des points d'équilibre suivants

$$y_{\infty} = 17, 19.3, 21.5 \text{ [cm]}$$

Autour de ces points d'équilibre, on peut admettre que le système est linéaire si l'amplitude des oscillations n'est pas trop grande. Le coefficient d'élasticité est alors décrit par

$$\begin{aligned} k = \frac{dF}{dy} \Big|_{y=Y_0} &= \frac{d(11655 y^3 - 8365 y^2 + 2050 y - 160)}{dy} \Big|_{y=y_{\infty}} \\ &= 34965 y^2 - 16730 y + 2050 \Big|_{y=y_{\infty}} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour les trois masses ou positions d'équilibre

$$k = \frac{dF}{dy} \Big|_{y=y_{\infty}} = 216, 123, 69 \text{ [N/m]}$$

4. Connaissant les trois valeurs de k et m , on peut calculer les grandeurs suivantes

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} = 23, 12, 8 \text{ [rad/sec]} \\ T_p &\simeq \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.27, 0.50, 0.75 \text{ [sec]} \\ \tau &= \frac{2m}{\lambda} = 0.8, 1.6, 2.0 \text{ [sec]} \\ N_{osc} &\simeq \frac{5\tau}{T_p} = 14.8, 15.8, 13.2 \text{ [périodes]} \end{aligned}$$

5. L'enregistrement montre que la durée du régime transitoire

$$t_{tr} \simeq 5\tau = \frac{10m}{\lambda}$$

vaut environ 8 secondes ; on en déduit donc

$$\lambda = \frac{10m}{t_{tr}} \simeq \frac{8 \text{ [kg]}}{8 \text{ [sec]}} = 1 \left[\frac{\text{N}}{\text{m/sec}} \right]$$

Comme la période d'oscillation vaut environ 0.5 seconde, on peut calculer

$$k = m \omega_n^2 \simeq m \left(\frac{2\pi}{T_p} \right)^2 \simeq 126 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Sanl 5

Présenté comme exemple pendant le cours.

Sanl 6

1. De la fiche technique, on tire :

R	1.63 Ω	U_0	24 V
L	0.27 mH	I_0	129 mA
K_T	37.7 mNm/A	n_0	5900 rpm
J	41 g cm ²	C_{max}	539 mNm

2. Le constructeur donne un modèle global d'ordre 1 avec $K_{mot,c} \equiv K_n = 253 [(tr/min)/V]$ et $\tau_{mot,c} = 4.7 [ms]$; ce qui correspond à

$$G_{mot,c}(s) = K_{mot,c} \frac{1}{1 + s\tau_{mot,c}} \text{ avec } \begin{cases} K_{mot,c} = 26.5 [(rad/sec)/V] \\ \tau_{mot,c} = 4.7 [msec] \end{cases}$$

Le couple maximum développé par un moteur s'obtient lorsque le rotor est bloqué; le courant est alors maximum ($i_{max} = U_0/R = 14.7 [A]$) et l'on a

$$C_{max} = K_T i_{max} = K_T \frac{U_0}{R} = 0.555 [Nm]$$

On constate que le couple maximum théorique est un peu plus élevé que celui fourni par le constructeur (539 mNm).

3. Lorsque le moteur tourne à vide, on a

$$\omega_\infty = \frac{2\pi n_0}{60} = 618 \left[\frac{rad}{sec} \right] \quad i_\infty = I_0 = 129 [mA]$$

Comme les équations du régime permanent sont

$$U_0 = R i_\infty + K_E \omega_\infty \quad K_T i_\infty = R_f \omega_\infty$$

on en déduit le coefficient de fem et le coefficient de frottement visqueux

$$K_E = \frac{U_0 - R i_\infty}{\omega_\infty} = 0.0385 \left[\frac{V}{rad/sec} \right] \simeq K_T = 0.0377 \left[\frac{Nm}{A} \right]$$

$$R_f = \frac{K_T I_0}{\omega_\infty} = 7.87 \cdot 10^{-6} \left[\frac{Nm}{rad/sec} \right]$$

Comme le constructeur donne le couple de frottement $M_R = 4.9 [mNm]$ à vitesse nominale, on peut également calculer le paramètre R_f comme suit

$$R_f = \frac{M_R}{\omega_0} = \frac{4.9 [mNm]}{2\pi 5900/60 [rad/sec]} = 7.93 \cdot 10^{-6} \left[\frac{Nm}{rad/sec} \right]$$

Les constantes de temps électrique et mécanique valent alors

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 0.166 [msec] \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 0.52 [sec]$$

4. La fonction de transfert du moteur DC vaut

$$\begin{aligned} G_{mot}(s) &= \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{R J + L R_f}{K_T K_E + R R_f} + s^2 \frac{L J}{K_T K_E + R R_f}} \\ &= 25.7 \frac{1}{1 + 4.56 \cdot 10^{-3} s + 0.756 \cdot 10^{-6} s^2} \end{aligned}$$

De cette fonction de transfert sous forme de Bode, on tire le gain

$$K_{mot} = 25.7 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

les pôles et les constantes de temps du moteur

$$p_{1,2} = \begin{cases} -5811 & \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \\ -228 & \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \end{cases} \quad \tau_{1,2} = \frac{1}{|p_{12}|} = \begin{cases} 0.17 & [\text{msec}] \\ 4.4 & [\text{msec}] \end{cases}$$

5. À ce stade, il est intéressant de comparer quelques valeurs entre elles

$$\begin{aligned} K_{mot,c} = 26.5 &\simeq K_{mot} = 25.7 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \\ \tau_{mot,c} = 4.7 &\simeq \tau_1 + \tau_2 = 4.57 [\text{msec}] \\ \tau_{elt} = 0.166 &\simeq \tau_1 = 0.17 [\text{msec}] \\ \tau_{mec} = 521 &\gg \tau_{mot} \simeq 4.57 [\text{msec}] \end{aligned}$$

En additionnant les deux constantes de temps $\tau_{1,2}$, on obtient un modèle d'ordre 1 raisonnable pour représenter le moteur

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}}$$

avec

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = 25.7 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right]$$

$$\tau_{mot} = \tau_1 + \tau_2 = 4.57 [\text{msec}]$$

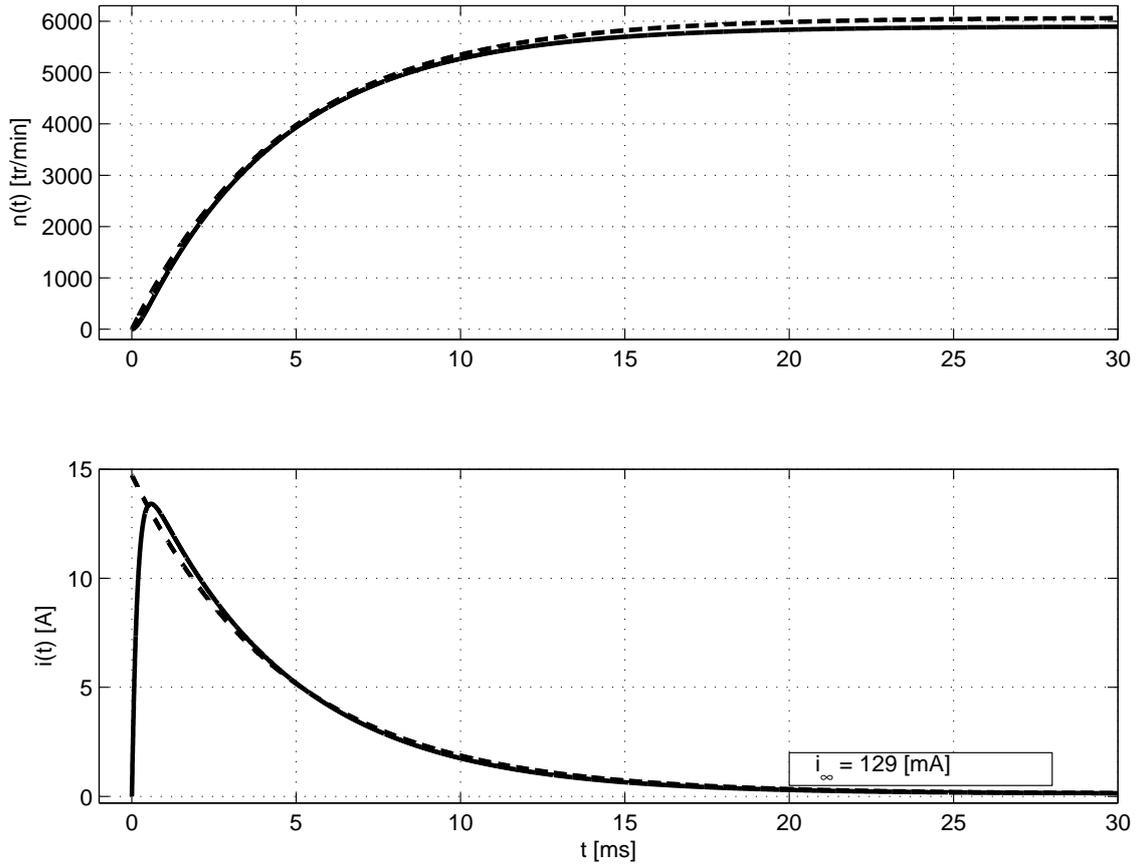
6. À tension nominale, on a

$$\omega_\infty = K_{mot} U_0 = 618 [\text{rad/sec}]$$

$$n_\infty = 60 \frac{\omega_\infty}{2\pi} = 5900 [\text{tr/min}]$$

$$i_\infty = \frac{U_0 - K_E \omega_\infty}{R} = 129 [\text{mA}]$$

7. Les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$ sont illustrées ci-dessous. Les courbes en traitillé correspondent au modèle d'ordre 1 fourni par le constructeur.



Sanl 7

Comme le modèle d'ordre 1 vaut

$$G_{mot}(s) = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} \frac{1}{1 + s \frac{J R}{K_T K_E + R R_f}}$$

on doit chiffrer les paramètres K_T , K_E , R , $R_{f,mot}$, J_{mot} .

De la fiche technique, on tire

R	1.63 Ω	U_0	24 V
L	0.27 mH	I_0	129 mA
K_T	37.7 mNm/A	n_0	5900 rpm
J	41 g cm ²	M_R	4.9 mNm

On en déduit

$$\omega_0 = \omega_\infty = \frac{2\pi n_0}{60} = 618 \text{ [rad/sec]}$$

$$K_E = \frac{U_0 - R i_\infty}{\omega_\infty} = 38.5 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{V}}{\text{rad/sec}} \right] \simeq K_T = 37.7 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right]$$

$$R_{f,mot} = \frac{M_R}{\omega_0} = \frac{4.9 \text{ [mNm]}}{618 \text{ [rad/sec]}} = 7.93 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad/sec}} \right]$$

Pour tenir compte de la charge et du réducteur, il faut calculer l'inertie du disque

$$J_{ch} = \frac{m r^2}{2} = 6.27 \cdot 10^{-4} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Ce qui, vu du moteur, donne

$$J = J_{mot} + \frac{1}{\eta N^2} J_{ch} = 8.2 \cdot 10^{-6} [\text{kg m}^2]$$

$$R_f = R_{f,mot} + \frac{1}{\eta N^2} R_{f,ch} \simeq 2 R_{f,mot} = 15.9 \cdot 10^{-6} [\text{Nm}/(\text{rad}/\text{sec})]$$

Toutes ces grandeurs étant connues, on peut alors calculer le gain du moteur et sa constante de temps

$$K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + R R_f} = 25.5 \left[\frac{\text{rad}/\text{sec}}{\text{V}} \right]$$

$$\tau_{mot} = \frac{J R}{K_T K_E + R R_f} = 9.2 [\text{msec}]$$

On voit ainsi que le régime transitoire durera $t_{tr} \simeq 5\tau_{mot} = 46 [\text{msec}]$ et que l'on aura

$$\omega_\infty = K_{mot} U_0 = 612 [\text{rad}/\text{sec}]$$

$$n_{ch,\infty} = \frac{1}{N} \frac{\omega_\infty}{2\pi} 60 = 418 [\text{tr}/\text{min}]$$

$$i_\infty = \frac{U_0 - K_E \omega_\infty}{R} = 258 [\text{mA}]$$

Santé 8

1. Le constructeur donne un modèle global d'ordre 1 avec $K_{mot,c} = 1930 [(\text{tr}/\text{min})/\text{V}]$ et $\tau_{mot,c} = 7 [\text{ms}]$; ce qui correspond à

$$G_{mot,c}(s) = K_{mot,c} \frac{1}{1 + s \tau_{mot,c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_{mot,c} = 202 [(\text{rad}/\text{sec})/\text{V}] \\ \tau_{mot,c} = 7 [\text{msec}] \end{cases}$$

Le couple maximum développé par un moteur s'obtient lorsque le rotor est bloqué; le courant est alors maximum ($i_{max} = U_0/R = 2.57 [\text{A}]$) et l'on a

$$C_{max} = K_T i_{max} = K_T \frac{U_0}{R} = 12.7 \cdot 10^{-3} [\text{Nm}]$$

2. Lorsque le moteur tourne à vide, on a

$$\omega_\infty = \frac{2\pi n_0}{60} = 1801 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right] \quad i_\infty = I_0 = 28 [\text{mA}]$$

Comme, en régime permanent, on a

$$U_0 = R i_\infty + K_E \omega_\infty \quad K_T i_\infty = R_f \omega_\infty$$

on en déduit le coefficient de fem et le coefficient de frottement visqueux

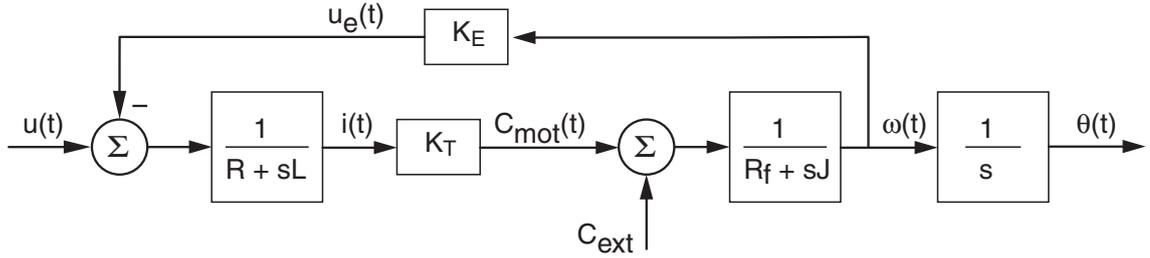
$$K_E = \frac{U_0 - R i_\infty}{\omega_\infty} = 4.94 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{V}}{\text{rad}/\text{sec}} \right] \simeq K_T = 4.95 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{A}} \right]$$

$$R_f = \frac{K_T I_0}{\omega_\infty} = 7.8 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}/\text{sec}} \right]$$

Les constantes de temps électrique et mécanique valent alors

$$\tau_{elt} = \frac{L}{R} = 31.4 [\mu\text{sec}] \quad \tau_{mec} = \frac{J}{R_f} = 0.63 [\text{sec}]$$

3. La transcription des deux équations décrivant le moteur donne le schéma fonctionnel suivant



4. Comme le schéma fonctionnel fait apparaître une boucle de contre-réaction, les fonctions de transfert se calculent en appliquant la loi vue en électronique analogique

$$G_{bf} = \frac{A}{1 + A\beta}$$

De plus le théorème de superposition nous permet de calculer séparément les effets des deux entrées $u(t)$ et $C_{ext}(t)$; ce qui donne

$$\begin{aligned} G_{mot}(s) &\equiv \left. \frac{\Omega(s)}{U(s)} \right|_{C_{ext}=0} = \frac{\frac{K_T}{(R+sL)(R_f+sJ)}}{1 + \frac{K_T K_E}{(R+sL)(R_f+sJ)}} \\ &= \frac{K_T}{(R+sL)(R_f+sJ) + K_T K_E} \\ &= \frac{K_T}{s^2 L J + s(RJ + LR_f) + K_T K_E + RR_f} \\ &= \frac{K_T}{K_T K_E + RR_f} \frac{1}{1 + s \frac{RJ + LR_f}{K_T K_E + RR_f} + s^2 \frac{LJ}{K_T K_E + RR_f}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_C(s) &\equiv \left. \frac{\Omega(s)}{C_{ext}(s)} \right|_{U=0} = \frac{\frac{1}{(R_f+sJ)}}{1 + \frac{1}{(R_f+sJ)} \frac{K_E K_T}{(R+sL)}} \\ &= \frac{R+sL}{(R+sL)(R_f+sJ) + K_T K_E} \\ &= \frac{R+sL}{s^2 L J + s(RJ + LR_f) + K_T K_E + RR_f} \\ &= \frac{R}{K_T K_E + RR_f} \frac{1 + sL/R}{1 + s \frac{RJ + LR_f}{K_T K_E + RR_f} + s^2 \frac{LJ}{K_T K_E + RR_f}} \end{aligned}$$

Enfin, comme l'angle de rotation est égal à l'intégrale de la vitesse angulaire, on a

$$G_{\Theta}(s) \equiv \left. \frac{\Theta(s)}{U(s)} \right|_{C_{ext}=0} = \frac{1}{s} G_{mot}(s)$$

5. L'application numérique donne

$$\begin{aligned} G_{mot}(s) &= \frac{K_T}{K_T K_E + RR_f} \frac{1}{1 + s \frac{RJ + LR_f}{K_T K_E + RR_f} + s^2 \frac{LJ}{K_T K_E + RR_f}} \\ &= 200 \frac{1}{1 + 6.85 \cdot 10^{-3} s + 0.215 \cdot 10^{-6} s^2} \end{aligned}$$

Le gain, les pôles de $G_{mot}(s)$ et les constantes de temps valent respectivement

$$K_{mot} = 200 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \quad p_{1,2} = \begin{cases} -31673 & \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \\ -146.7 & \left[\frac{1}{\text{sec}} \right] \end{cases} \quad \tau_{1,2} = \frac{1}{|p_{12}|} = \begin{cases} 31.6 & [\mu\text{sec}] \\ 6.8 & [\text{msec}] \end{cases}$$

6. À ce stade, il est intéressant de comparer quelques valeurs entre elles

$$\begin{aligned} K_{mot,c} = 202 &\simeq K_{mot} = 200 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right] \\ \tau_{mot,c} = 7 &\simeq \tau_1 + \tau_2 = 6.83 [\text{msec}] \\ \tau_{elt} = 31.4 &\simeq \tau_1 = 31.6 [\mu\text{sec}] \\ \tau_{mec} = 630 &\gg \tau_{mot} \simeq 7 [\text{msec}] \end{aligned}$$

Les deux constantes de temps $\tau_{1,2}$ étant très différentes, on peut négliger la plus petite des deux et ainsi considérer que le moteur peut être représenté par un modèle d'ordre 1

$$G_{mot}(s) = K_{mot} \frac{1}{1 + s\tau_2} \text{ avec } K_{mot} = \frac{K_T}{K_T K_E + RR_f} = 200 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \right], \quad \tau_2 = 6.8 [\text{msec}]$$

7. Les termes de puissance $K_T K_E$ se comparent avec les termes de perte RR_f . Comme l'on a

$$K_T K_E = 2.4 \cdot 10^{-5} \gg RR_f = 2.7 \cdot 10^{-7}$$

on voit qu'en négligeant les termes de perte on commet une erreur d'environ 1%.

8. À tension nominale, on a

$$\omega_\infty = K_{mot} U_0 = 1801 [\text{rad/sec}]$$

$$n_\infty = 60 \frac{\omega_\infty}{2\pi} = 17'200 [\text{tr/min}]$$

$$i_\infty = \frac{U_0 - K_E \omega_\infty}{R} = 28 [\text{mA}]$$

9. Les réponses indicielles $n(t)$ et $i(t)$ sont illustrées plus loin.

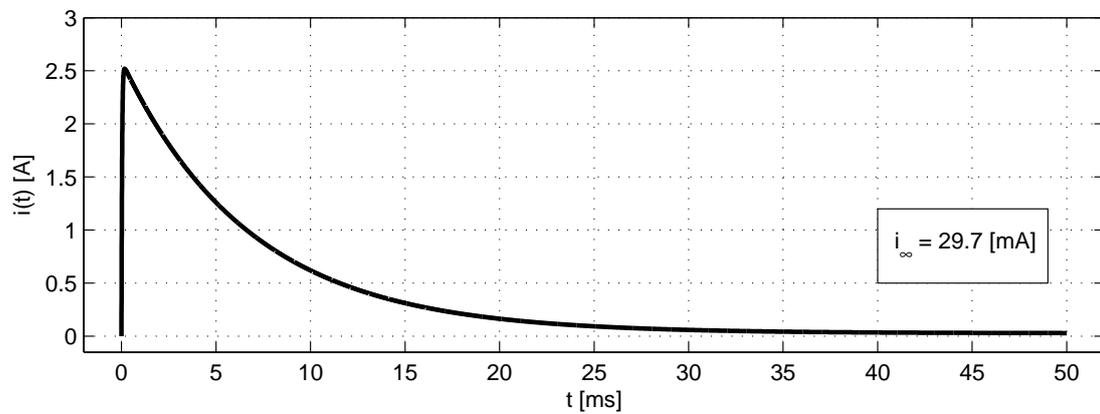
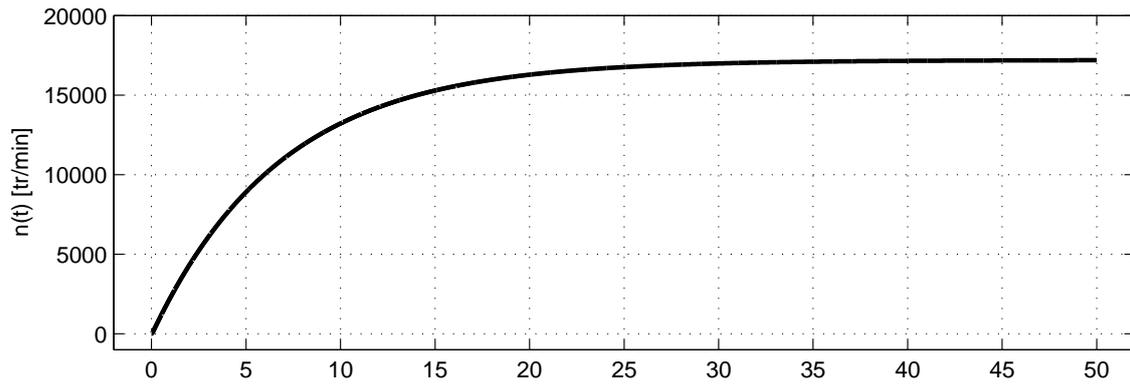
10. Le gain de la fonction de transfert associée au couple extérieur (point 4)

$$K_C = \frac{R}{K_T K_E + RR_f} = 1.4 \cdot 10^5 \left[\frac{\text{rad/sec}}{\text{Nm}} \right]$$

permet de calculer la variation de vitesse causée par celui-ci. On obtient ainsi

$$\Delta\omega = K_C C_{ext} = -707 [\text{rad/sec}] \Rightarrow \omega_\infty = 1801 - 707 = 1094 [\text{rad/sec}]$$

$$i_\infty = \frac{U_0 - K_E \omega_\infty}{R} = 1.03 [\text{A}]$$



3 Éléments de régulation

Reg 5

1. Comme la fonction de transfert en boucle ouverte est décrite par

$$G_{bo}(s) = K_a K_g K_{mot} \frac{1}{1 + s \tau_{mot}}$$

son gain DC vaut

$$\begin{aligned} K_{bo} &= K_a K_g K_{mot} \\ &= 5 \frac{\text{V}}{\text{V}} 2 \frac{\text{mV}}{\text{rpm}} 5 \frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \\ &= 5 \frac{\text{V}}{\text{V}} \frac{2 \text{ mV}}{2\pi/60 \text{ rad/sec}} 5 \frac{\text{rad/sec}}{\text{V}} \\ &= \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 60}{2\pi} \frac{\text{V}}{\text{V}} = 0.477 \frac{\text{V}}{\text{V}} \end{aligned}$$

2. La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} = \frac{K_{bo}}{1 + K_{bo} + s \tau_{mot}} = \frac{K_{bo}}{1 + K_{bo}} \frac{1}{1 + s \frac{\tau_{mot}}{1 + K_{bo}}}$$

On en déduit que

$$K_{bf} = \frac{K_{bo}}{1 + K_{bo}} = 0.323 \frac{\text{V}}{\text{V}}$$

$$\tau_{bf} = \frac{\tau_{mot}}{1 + K_{bo}} = 6.77 \text{ msec}$$

d'où

$$t_{trans} \simeq 5\tau_{bf} = 34 \text{ msec}$$

$$n_{\infty} = \frac{u_{\omega}(\infty)}{K_g} = \frac{w(\infty) \cdot K_{bf}}{K_g} = \frac{10 \text{ V} \cdot 0.323 \text{ V/V}}{2 \text{ mV/rpm}} = 1615 \text{ rpm}$$

Reg 6

1. Comme la fonction de transfert interne vaut

$$G_1(s) = \frac{K_1/(1 + s\tau_1)}{1 + K_1K_g/(1 + s\tau_1)} = \frac{K_1}{1 + K_1K_g + s\tau_1}$$

la fonction de transfert en boucle ouverte vaut

$$\begin{aligned} G_{bo}(s) &= K_a \frac{K_1}{1 + K_1K_g + s\tau_1} \frac{1}{s} \\ &= \frac{K_a K_1}{s^2\tau_1 + s(1 + K_1K_g)} \end{aligned}$$

À partir de celle-ci, on calcule facilement la FT en boucle fermée

$$\begin{aligned} G_{bf}(s) &= \frac{K_a K_1}{s^2\tau_1 + s(1 + K_1K_g) + K_a K_1} \\ &= \frac{K_a K_1/\tau_1}{s^2 + s(1 + K_1K_g)/\tau_1 + K_a K_1/\tau_1} \end{aligned}$$

2. Par identification des coefficients, on tire de cette forme canonique

$$2\zeta\omega_n = \frac{1 + K_1K_g}{\tau_1}, \quad \omega_n^2 = \frac{K_a K_1}{\tau_1}$$

d'où

$$\omega_n = \frac{1 + K_1K_g}{2\zeta\tau_1}, \quad K_a = \frac{\omega_n^2 \tau_1}{K_1}$$

En choisissant $\zeta \simeq 0.7$ pour avoir une réponse indiceille optimum et prenant

$$K_1 = 3 \frac{\text{rad/sec}}{\text{V}}, \quad K_g = 2 \frac{\text{mV}}{\text{rad/sec}}, \quad \tau_1 = 10 \text{ msec}$$

il vient

$$\omega_n = \frac{1 + K_1K_g}{2\zeta\tau_1} = 71.8 \text{ rad/sec}$$

$$K_a = \frac{\omega_n^2 \tau_1}{K_1} = 17.2 \text{ V/V}$$

Reg 7

1. En transformant de Laplace l'équation différentielle linéaire

$$m\ddot{x}(t) = +k_1 x(t) + k_2 i(t)$$

on obtient

$$(m s^2 - k_1) X(s) = k_2 I(s)$$

$$G_a(s) = \frac{X(s)}{I(s)} = \frac{k_2}{m s^2 - k_1}$$

Comme les pôles de cette FT valent

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

et que l'un des deux est réel positif, cela signifie que le système est instable et que la sphère va se coller à la bobine ou tomber.

2. En transformant de Laplace l'équation du correcteur

$$i(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

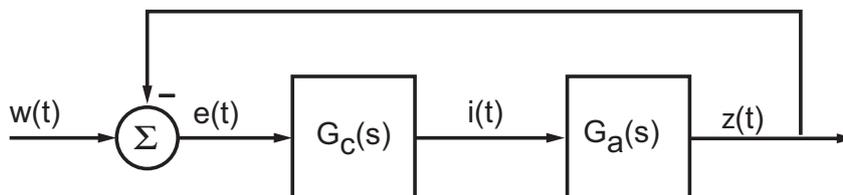
on obtient

$$I(s) = K_p (1 + s T_d) E(s)$$

La fonction de transfert du correcteur vaut donc

$$G_c(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = K_p (1 + s T_d)$$

3. Le schéma fonctionnel de l'ensemble est le suivant



À partir de la FT en boucle ouverte

$$G_{bo}(s) = G_c(s) G_a(s) = K_p (1 + s T_d) \frac{k_2}{m s^2 - k_1}$$

on calcule la FT en boucle fermée

$$\begin{aligned} G_{bf}(s) &= \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{K_p k_2 (1 + s T_d)}{K_p k_2 (1 + s T_d) + m s^2 - k_1} \\ &= \frac{K_p k_2 (1 + s T_d)}{m s^2 + K_p k_2 T_d s + K_p k_2 - k_1} \end{aligned}$$

4. Pour qu'un système d'ordre 2 soit stable, il suffit que tous les coefficients du dénominateur de la FT aient le même signe. Ce qui conduit à

$$K_p k_2 - k_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad K_p > \frac{k_1}{k_2}$$

5. La forme canonique de $G_{bf}(s)$ s'écrit

$$G_{bf}(s) = \frac{K_p k_2 T_d}{m} \frac{s + 1/T_d}{s^2 + s K_p k_2 T_d/m + (K_p k_2 - k_1)/m}$$

On en déduit que

$$2\zeta\omega_n = \frac{K_p k_2 T_d}{m}, \quad \omega_n^2 = \frac{K_p k_2 - k_1}{m} > 0$$

Ce qui permet, connaissant ζ et ω_n , de calculer

$$K_p = \frac{m\omega_n^2 + k_1}{k_2}, \quad T_d = \frac{2\zeta\omega_n m}{K_p k_2}$$

6. L'application numérique avec

$$m = 0.012 \text{ kg}, \quad k_1 = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad k_2 = 0.66 \frac{\text{N}}{\text{A}}$$

$$\omega_n = 20 \text{ rad/sec} \quad \text{et} \quad \zeta = 0.5$$

donne

$$K_p = 25.4 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad \text{et} \quad T_d = 14.3 \text{ msec}$$

Comme la constante de temps d'un système d'ordre 2 à pôles complexes vaut

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

on en déduit le temps d'établissement

$$t_{5\%} \simeq 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.3 \text{ sec}$$

7. On sait que la fonction de transfert d'un amplificateur inverseur vaut

$$G(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

Avec

$$Z_2(s) = R_2 \quad \text{et} \quad Z_1(s) = R_1 // C = \frac{R_1}{1 + sR_1C}$$

on obtient

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1} (1 + sR_1C)$$

D'où

$$\frac{R_2}{R_1} = K_p \quad \text{et} \quad R_1C = T_d$$