

heig-vd

Haute Ecole d'Ingénierie
et de Gestion du
Canton de Vaud



Traitement des Signaux

UdM - novembre 2011

Prof. Freddy Mudry



*"La science, son goût est amer au début
mais à la fin, plus doux que le miel"*

(Plat à décor épigraphique
XI-XIIème siècle, Iran ou Transoxiane
Le Louvre - Arts de l'Islam)

Informations concernant
le cours de
Traitements des Signaux

Prof. F. Mudry – Udm / FST – novembre 2011

Objectifs À l'issue de ce cours, l'étudiant sera en mesure de :

1. Maîtriser les séries de Fourier : représentations spectrales et calcul de la puissance.
2. Analyser et mettre en pratique les relations temps-fréquence dans le cadre de l'analyse spectrale.
3. Décrire différents types de signaux et expliquer leurs fonctions de corrélation ainsi que leurs densités spectrales de puissance.
4. Évaluer les effets de l'échantillonnage et de la quantification.
5. Évaluer et calculer le comportement d'un système numérique dans les domaines temporel et fréquentiel..

À l'issue des quatre séances de travaux pratiques en laboratoire, l'étudiant sera en outre capable de :

1. Maîtriser un outil de programmation tel que Matlab.
2. Synthétiser et analyser des signaux.
3. Visualiser, décrire et analyser le spectre d'un signal quelconque.
4. Programmer un filtre numérique et illustrer son comportement.
5. Écrire "en ligne" un rapport succinct mais complet de son travail.

Remarques

1. Le temps accordé pour les exposés et exercices du cours TdS est de 46 périodes réparties sur cinq semaines. Il est bien clair que le programme proposé ci-après constitue une ligne directrice et que le rythme du cours peut être légèrement modifié selon les circonstances.
2. Dans la mesure du possible, les cours et exercices sont donnés en alternance durant deux périodes.
3. Les corrigés d'exercices sont donnés dans un fascicule à part. Afin d'apprendre à résoudre les exercices proposés de manière personnelle et indépendante, celui-ci ne devrait pas être consulté pendant les séances d'exercices.
4. Les tests écrits sont constitués de problèmes similaires à ceux proposés comme exercices. Le seul document autorisé pour les TE est le formulaire TdS remis en annexe du polycopié.
5. L'examen de fin d'unité TdS se fera sous forme écrite et durera deux heures.

Projet de programme à raison de 30hCM, 12hTD, 4hTE et 16hTP						
Sem	Dates	Cours	Sujets	NH	Σ CM	Σ TDE
1	31 oct	CM	Séries de Fourier	2	2	
		CM	Séries de Fourier	2	4	
		CM	Transformation de Fourier	2	6	
			TD	3		3
2	7 nov	CM	Analyse spectrale	2	8	
		CM	Analyse spectrale	2	10	
		CM	Signaux et corrélation	2	12	
			TD	3		6
		<i>TP1</i>	<i>Synthèse et analyse des SP</i>	4		
3	14 nov	CM	Signaux et corrélation	2	14	
		CM	Échantillonnage	2	16	
		CM	Échantillonnage	2	18	
			TD	3		9
			TE1	2		11
		<i>TP2</i>	<i>Numérisation des signaux</i>	4		
4	5 déc	CM	Signaux numériques	2	20	
		CM	Signaux numériques	2	22	
		CM	Réponses temporelles	2	24	
			TD	3		14
		<i>TP3</i>	<i>Réalisation de filtres numériques</i>	4		
5	12 déc	CM	Réponses fréquentielles	2	26	
		CM	Filtres numériques	2	28	
		CM	TD	2	30	
			TE2	2		16
		<i>TP4</i>	<i>Phonocardiogramme</i>	4		
		Examen		4		

Bibliographie générale

Traitement des signaux

1. B.P. Lathi : *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley-Cambridge Press, 1998
2. B.P. Lathi : *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, 1992
3. F. de Coulon : *Théorie et traitement des signaux*, PPR, 1984
4. A. Spataru : *Fondements de la théorie de la transmission de l'information*, PPR, 1987
5. A.V. Oppenheim, A.S. Willsky : *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983

Traitement numérique des signaux

1. B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, J. Wiley, 1997
2. J.H. McClellan, R.W. Schafer, M.A. Yoder : *DSP First*, Prentice Hall, 1999
3. J.G. Proakis, D.G. Manolakis : *Digital Signal Processing*, MacMillan, 2ème édition, 1992
4. C.S. Burrus et al. : *Computer-Based Exercises for Signal Processing*, Prentice-Hall, 1994
5. V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS, 1997
6. E.C. Ifeachor, B.W. Jervis : *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1993

Filtres analogiques et numériques

1. M. Labarrère et al. : *Le filtrage et ses applications*, Cepadues Editions, 1982
2. R. Boîte, H. Leich : *Les filtres numériques*, Masson, 1980
3. R. Miquel : *Le filtrage numérique par microprocesseurs*, Editests, 1985
4. H. Lam : *Analog and Digital Filters*, Prentice Hall, 1979
5. T.W. Parks, C.S. Burrus : *Digital Filter Design*, J. Wiley, 1987
6. Ch.S. Williams : *Designing Digital Filters*, Prentice-Hall, 1986

Analyse spectrale numérique

1. Hewlett-Packard : *The Fundamentals of Signal Analysis*, Application Note 243, 1981
2. R.B. Randall : *Frequency Analysis*, Brüel-Kjaer, 1987
3. C.S. Burrus, T.W. Parks : *DFT / FFT and convolution algorithms*, J. Wiley, 1985
4. R.W. Ramirez : *The FFT Fundamentals and Concepts*, Prentice-Hall, 1985

Traitement de la parole

1. R. Boite et all : *Traitement de la parole*, PPUR, 2000
2. Deller, Proakis, Hansen : *Discrete Time Processing of Speech Signals*, Macmillan, 1993
3. S. Saito, K. Nakata : *Fundamentals of Speech Signal Processing*, Academic Press, 1985
4. L.R. Rabiner, R.W. Schafer : *Digital Signal Processing of Speech*, Prentice-Hall, 1978

Pour le plaisir des yeux et de l'esprit

1. Warusfel André : *Les nombres et leurs mystères*, Seuil 1961
2. Stewart Ian : *Does God Play Dice ? the new mathematics of chaos*, Penguin, 1989
3. Stewart Ian : *Dieu joue-t-il aux dés ? les nouvelles mathématiques du chaos*, Flammarion, 1993
4. Dunham William : *Euler, the master of us all*, The Mathematical Association of America, 1999
5. Maor Eli : *To Infinity and Beyond : a cultural history of the infinity*, Birkhäuser, 1986
6. Klein Etienne : *Il était sept fois la révolution - Albert Einstein et les autres*, Flammarion, 2005
7. Klein Etienne : *La physique quantique*, Dominos Flammarion, 1996
8. Hawking Stephen : *Une brève histoire du temps*, Flammarion, 1988
9. Reeves Hubert : *Malicorne : réflexions d'un observateur de la nature*, Seuil, 1990
10. ThuanTrinh Xuan : *Le chaos et l'harmonie : la fabrication du réel*, folio essais, Gallimard, 1998
11. Davis Ph.J, Hersh R. : *L'univers mathématique*, Bordas 1985
12. Ekeland Ivan : *Le Calcul, l'Imprévu : les figures du temps de Kepler à Thom*, Seuil, 1984
13. Conway John : *The Book of Numbers*, Copernicus, 1996
14. Fivaz Roland : *L'ordre et la volupté*, PPR 1989
15. Lesieur Marcel : *La turbulence*, Grenoble PUG 1994

Quelques adresses Internet

Démonstrations interactives

1. <http://www.jhu.edu/~signals/>
2. <http://image-1.rose-hulman.edu/~yoder/bookcd/visible/contents/cover.htm>
3. <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/home.text.htm>

Livre et divers

1. <http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>
2. <http://www.redcedar.com/learndsp.htm>
3. <http://www.dspguru.com/info/tutor/other.htm>

Logiciels gratuits

1. <http://www.sysquake.com>
2. <http://www.dspguru.com/sw/opendsp/mathclo.htm>
3. <http://www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.htm>

Table des matières

I. Étude des signaux analogiques	1
1. Analyse des signaux périodiques	3
1.1. Introduction	3
1.2. Deux représentations pour un seul signal	3
1.3. Séries de Fourier	4
1.3.1. Définition de la série de Fourier	4
1.3.2. Série de Fourier en cosinus	7
1.3.3. Série de Fourier complexe	8
1.3.4. Relations entre les trois représentations de Fourier	9
1.4. Théorème de la puissance ou de Parseval	9
1.5. Spectres d'amplitudes et de phases	11
1.5.1. Spectres unilatéraux et bilatéraux	11
1.5.2. Coefficients spectraux et symétries des signaux	13
1.5.3. Exemple de représentations spectrales d'un signal	13
1.6. Suite d'impulsions	16
1.6.1. Suite d'impulsions rectangulaires	16
1.6.2. Suite d'impulsions triangulaires	18
1.6.3. Suite d'exponentielles décroissantes	20
1.7. Reconstruction des signaux	20
1.7.1. Synthèse d'un signal	20
1.7.2. Phénomène de Gibbs	22
1.7.3. Importance de la phase	22
1.8. Quelques théorèmes utiles	25
1.8.1. Décalage temporel	25
1.8.2. Modulation d'amplitude	25
1.8.3. Rotation autour de l'ordonnée	26
1.9. Calcul de quelques spectres	27
1.9.1. Suite d'impulsions composites	27
1.9.2. SIR décalée	29
1.10. Réponse d'un système linéaire	31
1.10.1. Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas	31
1.11. Réponse d'un système non-linéaire	34
1.11.1. Distorsion due à une diode	34
1.12. Exercices	37

2. Analyse des signaux non périodiques	49
2.1. Transformation de Fourier	49
2.1.1. Passage de la série à la transformation de Fourier	49
2.1.2. TF directe et inverse	51
2.1.3. Énergie d'un signal non permanent	52
2.1.4. Propriétés de la transformation de Fourier	52
2.2. Exemples de spectres continus	52
2.2.1. Spectre d'une impulsion rectangulaire	52
2.2.2. Spectres d'un sinus amorti	54
2.2.3. Spectres de deux impulsions rectangulaires	57
2.3. Calcul de quelques transformées	58
2.3.1. Exponentielle décroissante	58
2.3.2. Exponentielle décroissante symétrique	59
2.3.3. Signal constant unité	59
2.3.4. Saut unité	60
2.3.5. Phaseur	60
2.3.6. Signal sinusoïdal	62
2.3.7. Impulsion sinusoïdale	62
2.4. Quelques conclusions	64
2.4.1. TF des signaux périodiques	64
2.4.2. Relations avec la transformation de Laplace	64
2.5. Extension de la transformation de Fourier	65
2.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]	70
2.7. Exercices	73
3. Éléments d'analyse spectrale numérique	83
3.1. Passage de la TF à la TFD	83
3.1.1. Signaux continus non-périodiques (\Rightarrow TF)	84
3.1.2. Signaux discrets de durée infinie (\Rightarrow TFi)	84
3.1.3. Signaux discrets de durée finie (\Rightarrow TFf)	86
3.1.4. Discrétisation de la fréquence (\Rightarrow TFD)	87
3.2. Relations temps-fréquence	87
3.2.1. Analyse spectrale avec Matlab	90
3.2.2. Pulsation normalisée	90
3.3. Transformation de Fourier discrète	91
3.3.1. Définition de la TFD	91
3.3.2. TFD d'un signal périodique	92
3.3.3. TFD et FFT	92
3.4. Relations entre les domaines analogique et numérique	93
3.4.1. Calcul et analyse d'une TFD	95
3.5. Spectre d'une sinusoïde	97
3.5.1. Le nombre de périodes enregistrées est un entier	97
3.5.2. Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier	97
3.6. Fenêtres d'observation	98
3.6.1. Quatre fenêtres usuelles	98
3.6.2. Effet d'une fenêtre	100

3.6.3.	Choix d'une fenêtre	100
3.6.4.	Fenêtrage et traitement d'images	102
3.7.	Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire	103
3.8.	Exemple 2 : reconstruction d'un signal	106
3.9.	Exemple 3 : analyse spectrale détaillée	108
3.9.1.	Données	108
3.9.2.	Signal temporel	109
3.9.3.	Paramètres d'acquisition	109
3.9.4.	Analyse spectrale	110
3.9.5.	Estimation des amplitudes	113
3.9.6.	Détail du calcul des signaux et des spectres	114
3.10.	Exercices	118
4.	Description et comparaison des signaux	125
4.1.	Classification des signaux	125
4.1.1.	Classification phénoménologique	125
4.1.2.	Énergie et puissance des signaux	126
4.1.3.	Signaux numérisés	128
4.2.	Quatre signaux types	128
4.2.1.	Signaux déterministes temporaires	130
4.2.2.	Signaux permanents périodiques	131
4.2.3.	Signaux permanents aléatoires	132
4.2.4.	Signaux permanents quasi-périodiques	132
4.3.	Comparaison des signaux	132
4.3.1.	Corrélation de signaux à énergie finie	133
4.3.2.	Corrélation de signaux à puissance finie	135
4.4.	Propriétés et calcul numérique	137
4.4.1.	Propriétés de l'autocorrélation	137
4.4.2.	Exemples d'autocorrélation	138
4.4.3.	Propriétés de l'intercorrélation	139
4.4.4.	Calcul numérique de la corrélation	141
4.5.	Rapport signal sur bruit (SNR)	142
4.6.	Trois applications de la corrélation	143
4.6.1.	Le radar	143
4.6.2.	La mesure d'un débit	144
4.6.3.	La mesure du rythme cardiaque	147
4.7.	Description des signaux aléatoires	148
4.7.1.	Tension équivalente de bruit	152
4.8.	Systèmes linéaires et densités spectrales	153
4.8.1.	Signaux à énergie finie	153
4.8.2.	Signaux à puissance finie	154
4.9.	Signaux, spectres et statistique	154
4.10.	Quelques exemples	157
4.11.	Exercices	161

II. Étude des signaux et systèmes numériques	169
5. Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques	171
5.1. Introduction	171
5.2. Analyse temporelle	172
5.2.1. Types de signaux	172
5.2.2. Quantification d'un signal : exemple	173
5.2.3. Échantillonnage des signaux analogiques	174
5.3. Analyse fréquentielle	175
5.3.1. Spectre d'un peigne de Dirac	176
5.3.2. Spectre d'un signal échantillonné	177
5.4. Recouvrement spectral	177
5.4.1. Quelques exemples	180
5.5. Théorème de l'échantillonnage	187
5.5.1. Filtre antirecouvrement	188
5.5.2. Exemple	188
5.6. Quantification d'un signal échantillonné	190
5.6.1. Quantification uniforme	190
5.6.2. Bruit de quantification	191
5.6.3. Rapport signal sur bruit	193
5.6.4. SNR de quelques signaux	193
5.6.5. Non linéarité du convertisseur	195
5.6.6. Conclusion	196
5.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage	197
5.8. Reconstruction du signal	199
5.8.1. Convertisseur N-A	199
5.8.2. Interpolateur idéal	200
5.8.3. Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un CNA	201
5.8.4. Filtre de reconstruction ou de lissage	203
5.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N - N-A	203
5.9.1. Échantillonnage sans filtre antirecouvrement	203
5.9.2. Échantillonnage avec filtre antirecouvrement	203
5.9.3. Effet du convertisseur N-A	203
5.9.4. Reconstruction du signal analogique	206
5.9.5. Correcteur d'amplitude	206
5.10. Exercices	207
6. Description des signaux et systèmes numériques	213
6.1. Signaux numériques	213
6.1.1. Quelques signaux fondamentaux	214
6.1.2. Périodicité des signaux numériques	215
6.2. Systèmes numériques	217
6.2.1. Exemples de système numériques	217
6.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique	220
6.2.3. Propriétés des systèmes	220
6.2.4. Interconnexions des systèmes	224

6.2.5.	Conclusions	225
6.3.	Réponse impulsionnelle et produit de convolution	225
6.3.1.	Systèmes causaux	227
6.3.2.	Réalisation d'un produit convolution	228
6.3.3.	Une application : l'interpolation numérique	231
6.4.	Systèmes décrits par des équations récursives	232
6.4.1.	Quelques exemples	235
6.5.	Exercices	237
7.	Réponses des systèmes numériques	241
7.1.	Réponse temporelle des systèmes linéaires	241
7.1.1.	Résolution d'une équation récursive	241
7.1.2.	Solution de l'équation homogène	242
7.1.3.	Solution particulière	242
7.1.4.	Solution générale	243
7.1.5.	Généralisation	243
7.2.	Stabilité des systèmes numériques	245
7.3.	Instants caractéristiques	245
7.4.	Transformation en z	247
7.4.1.	Définition	247
7.4.2.	Calcul de quelques transformées	248
7.4.3.	Quelques propriétés de la transformation en z	249
7.4.4.	Équation aux différences et fonction de transfert	250
7.5.	Réponse fréquentielle des systèmes LTI	251
7.5.1.	Fonction de transfert et réponse fréquentielle	251
7.5.2.	Pôles, zéros et réponse fréquentielle	252
7.5.3.	TFD et réponse fréquentielle	254
7.6.	Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles	256
7.6.1.	Moyenneur non causal	256
7.6.2.	Moyenneur causal	256
7.6.3.	Filtre passe-bas d'ordre 1	258
7.6.4.	Filtre passe-bas d'ordre 2	261
7.7.	Analyse et réalisation d'un filtre	263
7.7.1.	Calcul de la réponse temporelle du filtre	263
7.7.2.	Calcul de la réponse fréquentielle	265
7.7.3.	Comment réaliser ce filtre?	266
7.8.	Classification des systèmes numériques	268
7.8.1.	Systèmes non récursifs (dits RIF, FIR ou MA)	269
7.8.2.	Systèmes récursifs (dits RII, IIR ou ARMA)	269
7.8.3.	Caractéristiques des filtres FIR et IIR	270
7.9.	Exercices	271

III. Travaux pratiques	277
8. Analyse de signaux périodiques	279
8.1. Analyse temporelle	280
8.1.1. Création de quelques signaux	280
8.1.2. Valeurs moyennes, puissance	280
8.1.3. Analyse des résultats	281
8.2. Analyse spectrale	281
8.3. Reconstruction d'un signal	282
8.4. Annexe	282
9. Signaux et systèmes numériques	285
9.1. Numérisation des signaux analogiques	285
9.2. Échantillonnage des signaux analogiques	285
9.2.1. Signal sinusoïdal	285
9.2.2. Signal audio	285
9.2.3. Signal modulé en fréquence	287
9.3. Réponse temporelle des systèmes numériques	287
9.3.1. Produit de convolution	287
9.3.2. Réponses impulsionnelles et temporelles	288
9.3.3. Équations aux différences	288
9.4. Réponse fréquentielle des systèmes numériques	289
9.5. Annexe	290
10. Synthèse et réalisation d'un filtre numérique	291
10.1. Introduction	291
10.2. Synthèse	291
10.3. Analyse	292
10.4. Réalisation	293
11. Analyse et réalisation d'un phonocardiogramme	295
11.1. Introduction	295
11.2. Mise en oeuvre	295
11.3. Travail à effectuer	296
11.4. Fichier Matlab	296
IV. Annexes	301
12. Formulaire Signaux et systèmes	303
12.1. Systèmes analogiques	303
12.2. Signaux analogiques	304
12.3. Échantillonnage des signaux	305
12.4. Signaux et systèmes numériques	306
12.5. Analyse spectrale numérique	309

Première partie .
Étude des signaux analogiques

1. Analyse des signaux périodiques

1.1. Introduction

L'analyse harmonique ou fréquentielle est l'instrument majeur de la théorie des signaux. Le développement en séries de Fourier et, plus généralement, la transformation de Fourier permettent d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés en fonction de la fréquence.

Les calculs et mises en forme des résultats à venir sont grandement facilités si l'on maîtrise et sait utiliser les relations suivantes :

$$A \cos(\varphi) + B \sin(\varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\varphi + \operatorname{atg}\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\sin(2\pi f t + \alpha))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 \cos(\varphi) & = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \\ 2j \sin(\varphi) & = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2. Deux représentations pour un seul signal

Le temps et la fréquence sont deux bases servant à la description des signaux. Ce sont deux points de vue différents d'une même réalité ; ils sont complémentaires. Il est important de bien comprendre les relations qui existent entre ces deux bases ; c'est le but de ce chapitre.

Une grandeur sinusoïdale est décrite par l'équation

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \quad (1.4)$$

Son évolution temporelle est contenue dans le mot *cos* ; dès lors, on sait que le signal $x(t)$ ondule avec une forme précise fixée par la fonction cosinus. Cependant, des informations supplémentaires sont données : l'amplitude A , la phase α et la fréquence f_0 . Ce sont ces informations qui sont fournies par la représentation fréquentielle ou spectrale.

Comme le temps et la fréquence sont les deux composantes de la description d'un même signal, une sinusoïde devrait être représentée dans un espace à trois dimensions (fig. 1.1). Une telle représentation étant mal pratique, on la remplace par ses projections sur les plans temporel et fréquentiel.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Dans la projection sur l'axe du temps, on retrouve le dessin bien connu d'une sinusoïde, alors que la projection sur l'axe des fréquences conduit à une raie située en $f = f_0$ et de hauteur A . Comme cette projection ne fournit que l'amplitude A , il est nécessaire, pour la fréquence considérée, de donner également la phase α . Ces deux diagrammes portent le nom de *spectres d'amplitudes et de phases*.

Considérons un signal composé de deux sinusoïdes

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}A \cos(4\pi f_0 t - \frac{\pi}{4}) \quad (1.5)$$

La figure 1.2a illustre le comportement temporel de ce signal et de ses deux composantes. La figure 1.2b montre ce qui se passe alors dans l'espace des fréquences. On notera que la somme des deux sinusoïdes dans l'espace temps conduit également à la somme des spectres d'amplitudes et de phases.

1.3. Séries de Fourier

L'élément fondamental de l'analyse de Fourier est constitué par le fait qu'un signal périodique peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales. Une illustration de la construction d'un signal périodique non-sinusoïdal est donnée à la figure 1.3 : le signal résultant est la somme de trois sinusoïdes dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0 .

1.3.1. Définition de la série de Fourier

Considérons un signal périodique $x(t)$ de période $T = 1/f_0$. Son développement en série de Fourier est alors le suivant

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi k f_0 t) \quad (1.6)$$

où $f_0 = 1/T$ est la fréquence fondamentale du signal, $a_0/2$ est la valeur moyenne ou composante continue et a_k, b_k sont les coefficients de Fourier du développement en cosinus et sinus.

Les coefficients de Fourier a_k et b_k se calculent comme suit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 0 \quad (1.7)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt, \quad k \geq 1 \quad (1.8)$$

N.B. : Cette représentation qui sert de point de départ au développement en séries de Fourier n'a aucun intérêt en traitement du signal ; elle est remplacée par la série en cosinus et la série complexe.

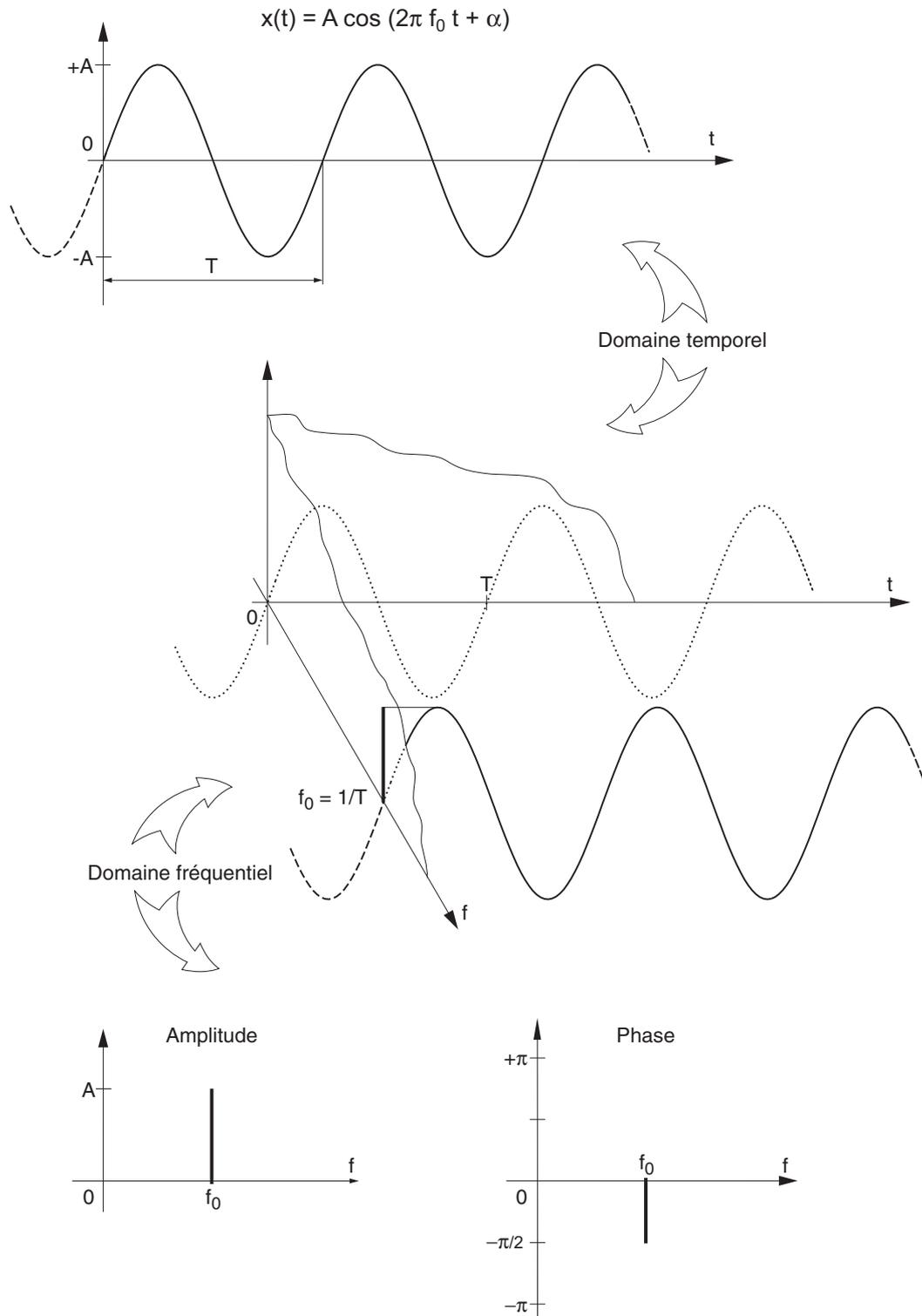


FIGURE 1.1.: Descriptions temporelle et fréquentielle d'une sinusoïde

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

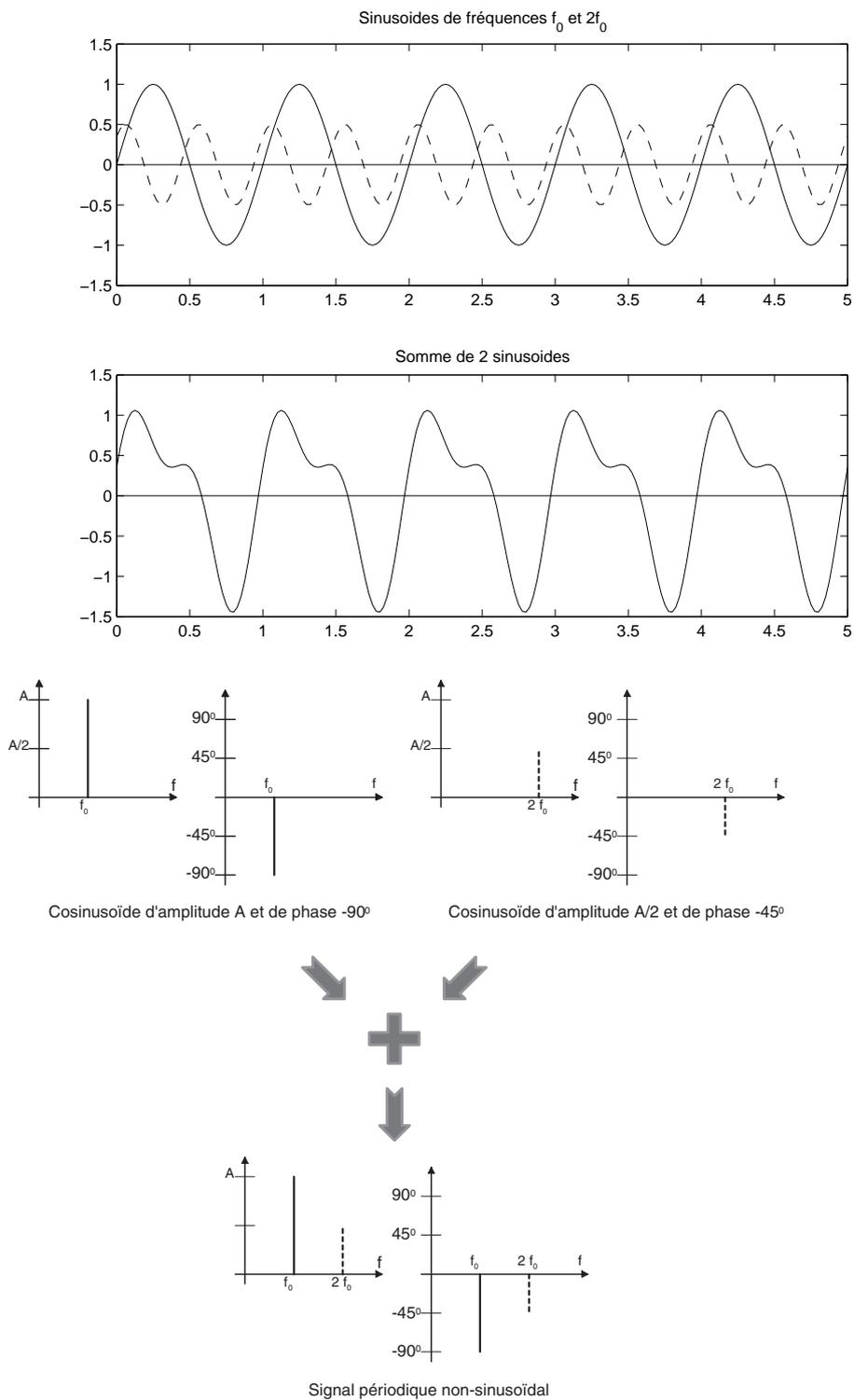


FIGURE 1.2.: Représentation de la somme de deux sinusoïdes de fréquences différentes dans les domaines temporel et fréquentiel

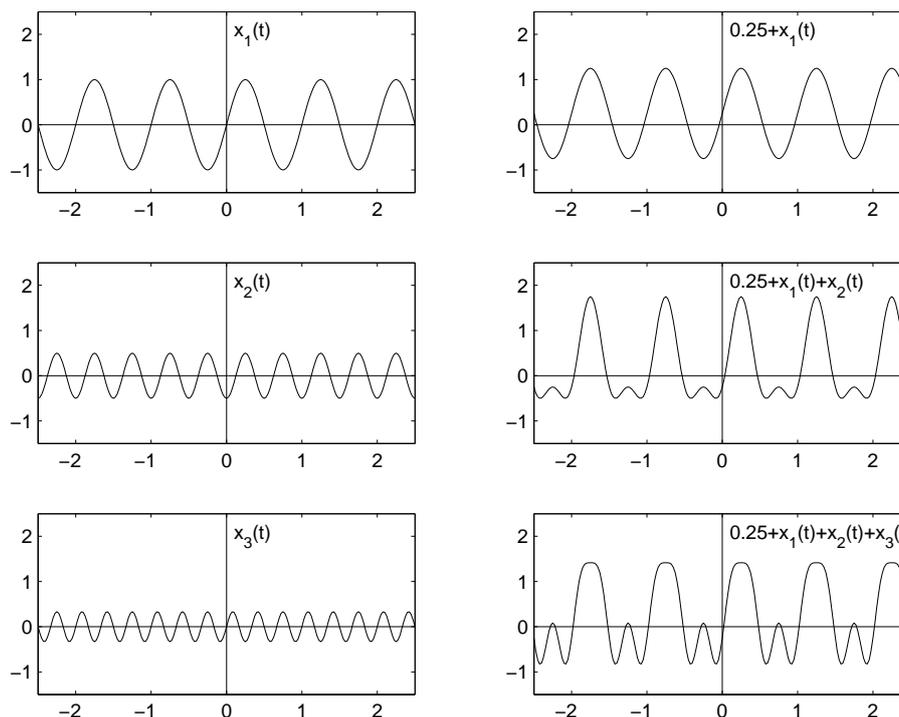


FIGURE 1.3.: Construction d'un signal périodique non-sinusoidal

1.3.2. Série de Fourier en cosinus

Prenant en compte la relation trigonométrique suivante

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right) \quad (1.9)$$

on voit que le développement en série de Fourier peut également s'écrire

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (1.10)$$

avec

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \quad (1.11)$$

Cette série en cosinus est extrêmement importante car elle correspond à la description bien connue des signaux en régime sinusoïdal permanent où l'on représente un courant ou une tension par leur amplitude et leur phase. D'un point de vue pratique, cela revient à considérer que le signal $x(t)$ est créé de manière équivalente par une infinité de générateurs sinusoïdaux. La représentation spectrale qui lui est associée porte le nom de *spectre unilatéral*.

Une illustration en est donnée à la figure 1.4. On y voit une onde périodique en dents de scie qui peut être reconstruite par une superposition d'ondes sinusoïdales. Cette superposition peut être présentée dans l'espace temps ou, de manière équivalente et plus explicite, dans l'espace des fréquences.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

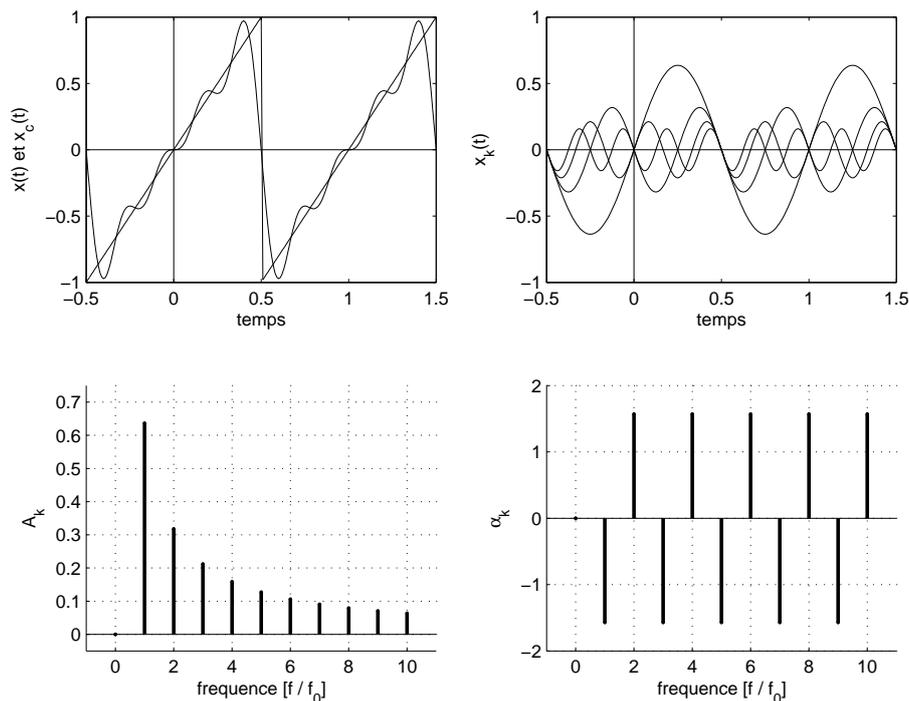


FIGURE 1.4.: Onde en dents de scie, composantes et spectres d'amplitudes et de phases

1.3.3. Série de Fourier complexe

Se souvenant des relations d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(+jx) + \exp(-jx)) \quad (1.12)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2j} (\exp(+jx) - \exp(-jx)) \quad (1.13)$$

on montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad (1.14)$$

Les coefficients $X(jk)$ sont alors complexes et valent

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad -\infty < k < +\infty \quad (1.15)$$

La représentation spectrale graphique qui lui est associée porte le nom de *spectre bilatéral*. Pour la suite du cours, on retiendra essentiellement cette description car elle est analytiquement plus intéressante que la forme en cosinus.

On remarquera au passage que la formule d'Euler remplace les fonctions sinus et cosinus par des exponentielles à exposant imaginaire appelées *phaseurs*. Ces phaseurs ne sont rien d'autres que des fonctions complexes oscillant cosinusoidalement sur l'axe réel et sinusoidalement sur l'axe imaginaire.

1.3.4. Relations entre les trois représentations de Fourier

Les relations existant entre les trois représentations de Fourier sont présentées et illustrées par le tableau et le graphe vectoriel de la figure 1.5. Ce graphe est important car il permet de voir en un coup d'oeil les relations simples liant les trois représentations spectrales. On retiendra également la relation existant entre les coefficients spectraux et la valeur efficace d'une composante spectrale

$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)| \quad (1.16)$$

Remarque À ce stade, il est important de souligner que, partant d'un signal connu $x_0(t)$, on commence par faire *l'analyse de ce signal en calculant ses coefficients de Fourier* $A(k)$, $\alpha(k)$ ou $X(\pm jk)$. Puis, une fois ceux-ci connus, *en calculant la somme de Fourier, on fait la synthèse du signal $x(t)$* . Et, comme le verra plus loin, dans certains cas (phénomène de Gibbs), le signal synthétique $x(t)$ ne sera pas exactement égal à $x_0(t)$.

1.4. Théorème de la puissance ou de Parseval

Dans l'espace temps, la définition de la puissance moyenne normalisée est la suivante

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = X_{eff}^2 \quad (1.17)$$

On notera que cette définition coïncide avec celle du carré de la valeur efficace du signal $x(t)$. La puissance normalisée ne s'exprime donc pas en [W], mais en [V²] ou [A²] selon que le signal est une tension ou un courant électrique.

Le théorème de Parseval montre que la puissance normalisée d'un signal peut se calculer aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel. En effet, comme dans l'espace des fréquences, le signal $x(t)$ est représenté par des générateurs d'amplitude A_k , il s'ensuit que la puissance totale est égale à la somme des puissances fournies par chaque générateur. On en déduit alors :

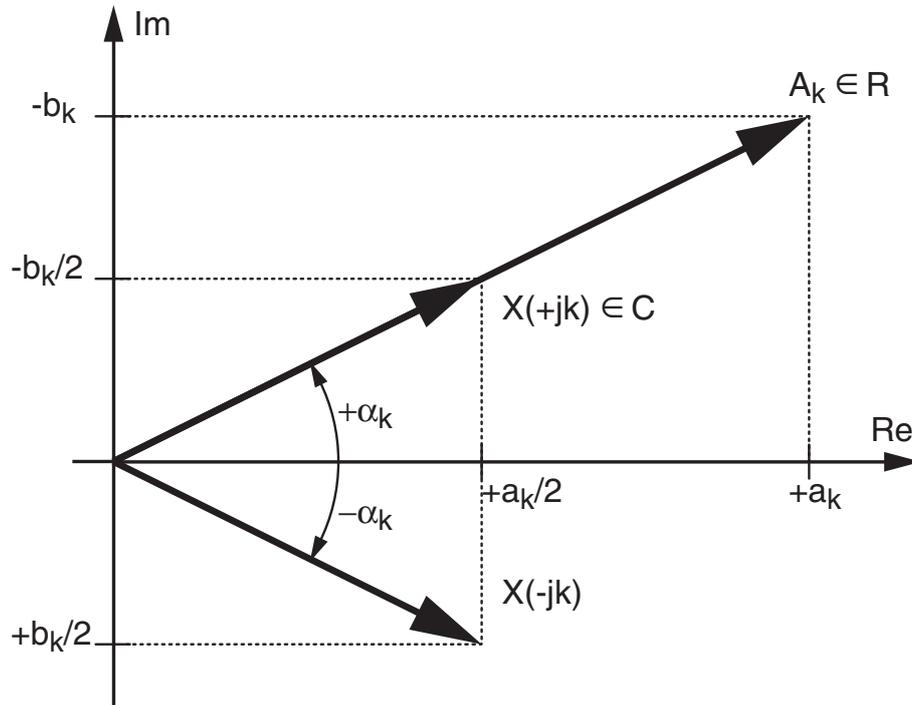
$$\begin{aligned} P = X_{eff}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k &= A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = P_{dc} + P_{ac} \\ &= X(0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (2 \cdot |X(jk)|)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \end{aligned}$$

De ces résultats, on conclut que la puissance peut se calculer avec l'une ou l'autre des équations (1.18) à (1.21) et que

le carré de la valeur efficace d'un signal est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de chacune de ses composantes.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

$k = 0$	$a_0/2$	A_0	$X(0)$
$k > 0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm jk)$
a_k	a_k	$+A_k \cos(\alpha_k)$	$+2 \operatorname{Re}\{X(jk)\}$
b_k	b_k	$-A_k \sin(\alpha_k)$	$-2 \operatorname{Im}\{X(jk)\}$
A_k	$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	A_k	$2 X(jk) $
α_k	$\arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	α_k	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{X(+jk)\}}{\operatorname{Re}\{X(+jk)\}}\right)$
$X(+jk)$	$\frac{1}{2}(a_k - jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(+j\alpha_k)$	$X(+jk)$
$X(-jk)$	$\frac{1}{2}(a_k + jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k \exp(-j\alpha_k)$	$X(-jk)$



$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |X(jk)|$$

FIGURE 1.5.: Relations entre les trois représentations spectrales

1.5. Spectres d'amplitudes et de phases

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \equiv X_{eff}^2 \quad (1.18)$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = X(0)^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad (1.19)$$

$$P = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \quad (1.20)$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2 \quad (1.21)$$

À ce stade, il est intéressant de rappeler ce que valent les puissances des trois signaux usuels que sont le carré, le sinus et le triangle à valeur moyenne nulle ($P_{dc} = 0$) et d'amplitude A :

$$x(t) = A \text{ sqr}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{1} \quad (1.22)$$

$$x(t) = A \sin(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{2} \quad (1.23)$$

$$x(t) = A \text{ tri}(2\pi ft) \Rightarrow P_{ac} = \frac{A^2}{3} \quad (1.24)$$

1.5. Spectres d'amplitudes et de phases

1.5.1. Spectres unilatéraux et bilatéraux

La description de $x(t)$ avec les fonctions cosinusoidales conduit aux *spectres unilatéraux* d'amplitudes et de phases (A_k et α_k) du signal $x(t)$. Ici, les fréquences sont positives ou nulles car le compteur k des harmoniques varie de 0 à $+\infty$ (figure 1.6). La description de $x(t)$ avec les fonctions complexes conduit aux *spectres bilatéraux* d'amplitudes et de phases ($|X(jk)|$ et $\angle X(jk)$). Ici, les fréquences sont négatives et positives car le compteur k varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Dans le cas des spectres bilatéraux, on notera que les spectres d'amplitudes sont toujours des *fonctions paires* car on a

$$|X(+jk)| = |X(-jk)| = \frac{A_k}{2}, \quad k \neq 0 \quad (1.25)$$

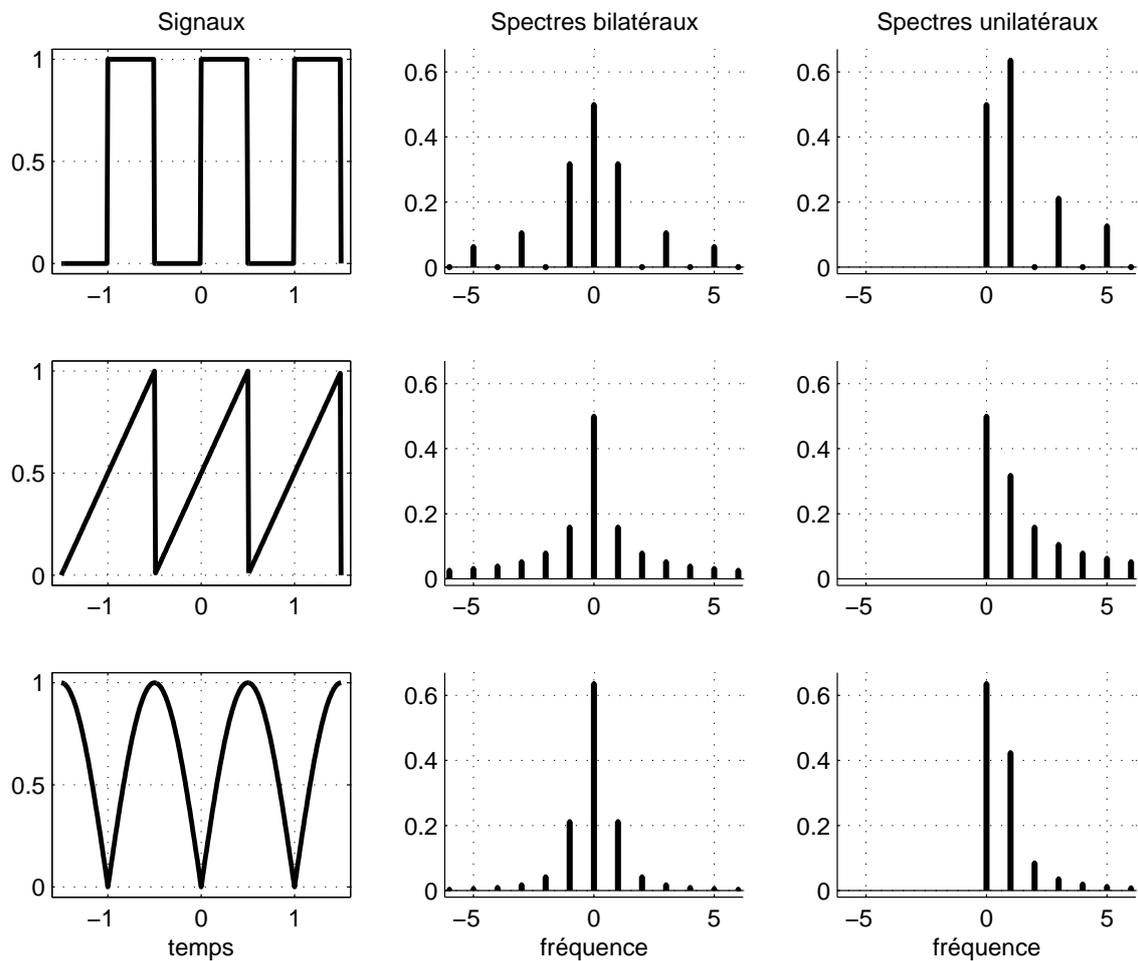
alors que les spectres de phases sont toujours des *fonctions impaires*. On a en effet

$$\angle X(+jk) = -\angle X(-jk) = \alpha_k, \quad k \neq 0 \quad (1.26)$$

Pour le cas particulier de la composante continue du signal, on a

$$|X(0)| = A_0, \quad \angle X(0) = 0, \pi$$

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES



Signaux	P	$X(0)$	$X(jk)$
carré :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-j \frac{1}{k\pi}$ si k est impair, 0 sinon
dents-de-scie :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+j \frac{(-1)^k}{2k\pi}$ $-\infty < k < +\infty$
sinus redressé :	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{-2}{\pi(4k^2-1)}$ $-\infty < k < +\infty$

FIGURE 1.6.: Quelques signaux avec leurs puissances et spectres d'amplitudes unilatéraux et bilatéraux

1.5.2. Coefficients spectraux et symétries des signaux

Si l'on tient compte des symétries du signal, le calcul des séries de Fourier est simplifié. On démontre en effet aisément les propriétés suivantes :

– une *fonction paire* est représentée par des cosinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = 0, \pm\pi \quad \text{Im}\{X(jk)\} = 0 \quad (1.27)$$

– une *fonction impaire* est représentée par des sinus seulement ; on a alors :

$$\alpha_k = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \text{Re}\{X(jk)\} = 0 \quad (1.28)$$

– une *fonction à symétrie demi-onde* ne possède pas d'harmoniques pairs :

$$X(jk) = 0, \quad \text{si } k \text{ est pair} \quad (1.29)$$

Les fonctions à symétrie demi-onde sont telles qu'une rotation autour de l'abscisse de l'alternance positive ou négative permet de reproduire l'autre alternance (figure 1.7).

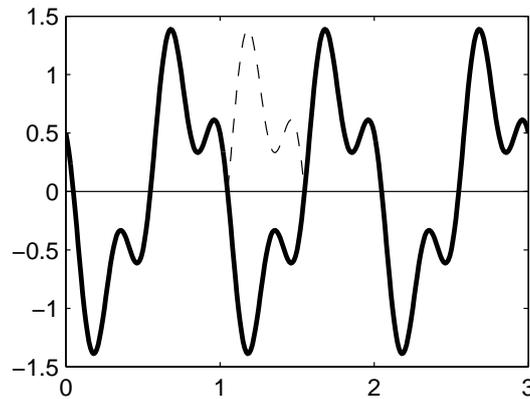


FIGURE 1.7.: Exemple d'une fonction à symétrie demi-onde

1.5.3. Exemple de représentations spectrales d'un signal

Considérant le signal

$$x(t) = 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin(6\pi f_0 t + \pi/4)$$

on souhaite le décrire dans les représentations spectrales uni- et bi-latérales.

La simple observation de l'expression de $x(t)$ montre que ce signal est constitué d'une composante DC et de deux composantes AC d'ordre 1 et 3. Utilisant les règles de trigonométrie, on obtient la forme en cosinus :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \cos(2\pi f_0 t) - 3.464 \sin(2\pi f_0 t) + 2 \sin\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 + \sqrt{2^2 + 3.464^2} \cos\left(2\pi f_0 t + \arctan\left(\frac{-(-3.464)}{2}\right)\right) + 2 \cos\left(6\pi f_0 t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3 + 4 \cos(2\pi \cdot 1 \cdot f_0 t + \pi/3) + 2 \cos(2\pi \cdot 3 \cdot f_0 t - \pi/4) \\ &= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_0 t + \alpha_1) + A_3 \cos(6\pi f_0 t + \alpha_3) \end{aligned}$$

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale unilatérale* de laquelle on déduit immédiatement les composantes spectrales unilatérales

$$\begin{aligned} A_0 \angle \alpha_0 &= 3 \angle 0 \\ A_1 \angle \alpha_1 &= 4 \angle +\pi/3 \\ A_2 \angle \alpha_2 &= 0 \angle 0 \\ A_3 \angle \alpha_3 &= 2 \angle -\pi/4 \end{aligned}$$

Appliquant les règles d'Euler à l'expression en cosinus, on obtient la forme complexe :

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 + 2 \exp(+j(2\pi f_0 t + \pi/3)) + 2 \exp(-j(2\pi f_0 t + \pi/3)) \\ &\quad + 1 \exp(+j(6\pi f_0 t - \pi/4)) + 1 \exp(-j(6\pi f_0 t - \pi/4)) \\ &= 3 + 2 \exp(+j\pi/3) \exp(+j2\pi f_0 t) + 2 \exp(-j\pi/3) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ &\quad + 1 \exp(-j\pi/4) \exp(+j6\pi f_0 t) + 1 \exp(+j\pi/4) \exp(-j6\pi f_0 t) \\ &= X(0) + X(+j1) \exp(+j2\pi f_0 t) + X(-j1) \exp(-j2\pi f_0 t) \\ &\quad + X(+j3) \exp(+j6\pi f_0 t) + X(-j3) \exp(-j6\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Cette expression est la forme mathématique de la *représentation spectrale bilatérale* de laquelle on tire immédiatement les composantes spectrales bilatérales

$$\begin{aligned} X(0) &= 3 = 3 \angle 0 \\ X(\pm j1) &= 2 \exp(\pm j\pi/3) = 2 \angle \pm \pi/3 \\ X(\pm j2) &= 0 \angle 0 \\ X(\pm j3) &= 1 \exp(\mp j\pi/4) = 1 \angle \mp \pi/4 \end{aligned}$$

De la lecture de ces descriptions découle immédiatement le tracé des spectres d'amplitudes et de phases dans les deux représentations spectrales (figure 1.8). On notera que, pour $k \neq 0$, les amplitudes du spectre bilatéral sont 2 fois plus petites que celles du spectre unilatéral.

Les puissances et valeurs efficaces associées à ce signal se calculent aisément à partir du spectre unilatéral. Afin de pouvoir préciser les unités, on admet que le signal $x(t)$ est une tension électrique ; on a alors :

$$\begin{aligned} P_{dc} = A_0^2 = 3^2 = 9 \text{ V}_{dc}^2 & \quad P_{ac} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} A_k^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 0 + 2^2) = 10 \text{ V}_{ac}^2 \\ P = P_{dc} + P_{ac} = 19 \text{ V}_{eff}^2 & \quad X_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{19} = 4.36 \text{ V}_{eff} \\ X_{dc} = A_0 = 3 \text{ V}_{dc} & \quad X_{ac} = \sqrt{P_{ac}} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ V}_{ac} \end{aligned}$$

1.5. Spectres d'amplitudes et de phases

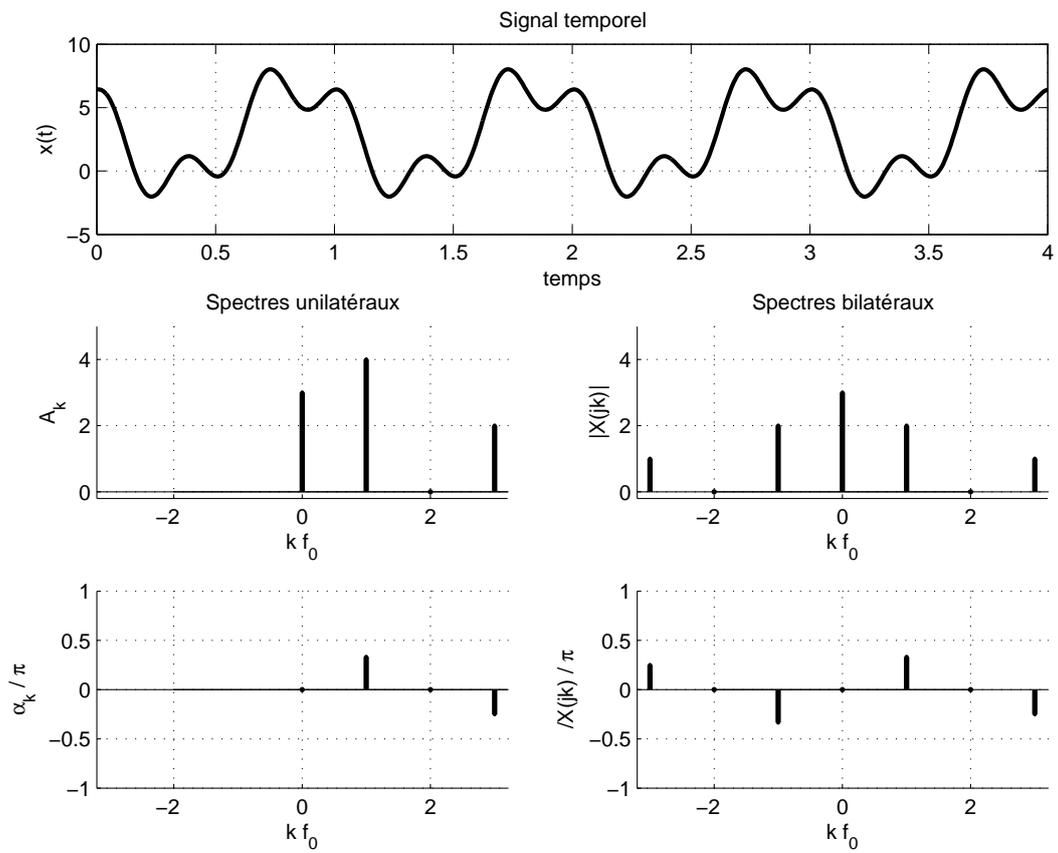


FIGURE 1.8.: Représentations spectrales d'un signal périodique

1.6. Suite d'impulsions

1.6.1. Suite d'impulsions rectangulaires

La suite d'impulsions rectangulaires (SIR) est un signal particulièrement important car elle apparaît dans de nombreuses applications telles que l'échantillonnage, la modulation d'impulsions, etc. Évaluons donc la série de Fourier complexe de la SIR $x(t)$ représentée à la figure 1.9.

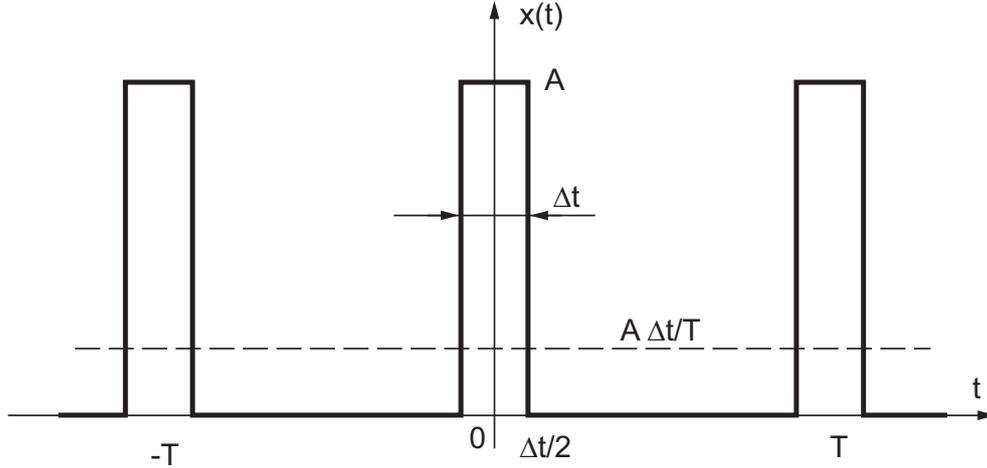


FIGURE 1.9.: Suite d'impulsions rectangulaires

Par définition des coefficients complexes $X(jk)$, on a

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \text{ avec } f_0 = \frac{1}{T}$$

En tenant compte de la définition de la SIR

$$x_T(t) = \begin{cases} A & \text{si } -\Delta t/2 < t < +\Delta t/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.30)$$

il vient

$$\begin{aligned} X(jk) &= \frac{A}{T} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \frac{-1}{j2\pi k f_0} \left(\exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \right) \end{aligned}$$

Les relations d'Euler permettent de passer de la différence des exponentielles à un sinus et d'écrire ces coefficients sous la forme

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \quad (1.31)$$

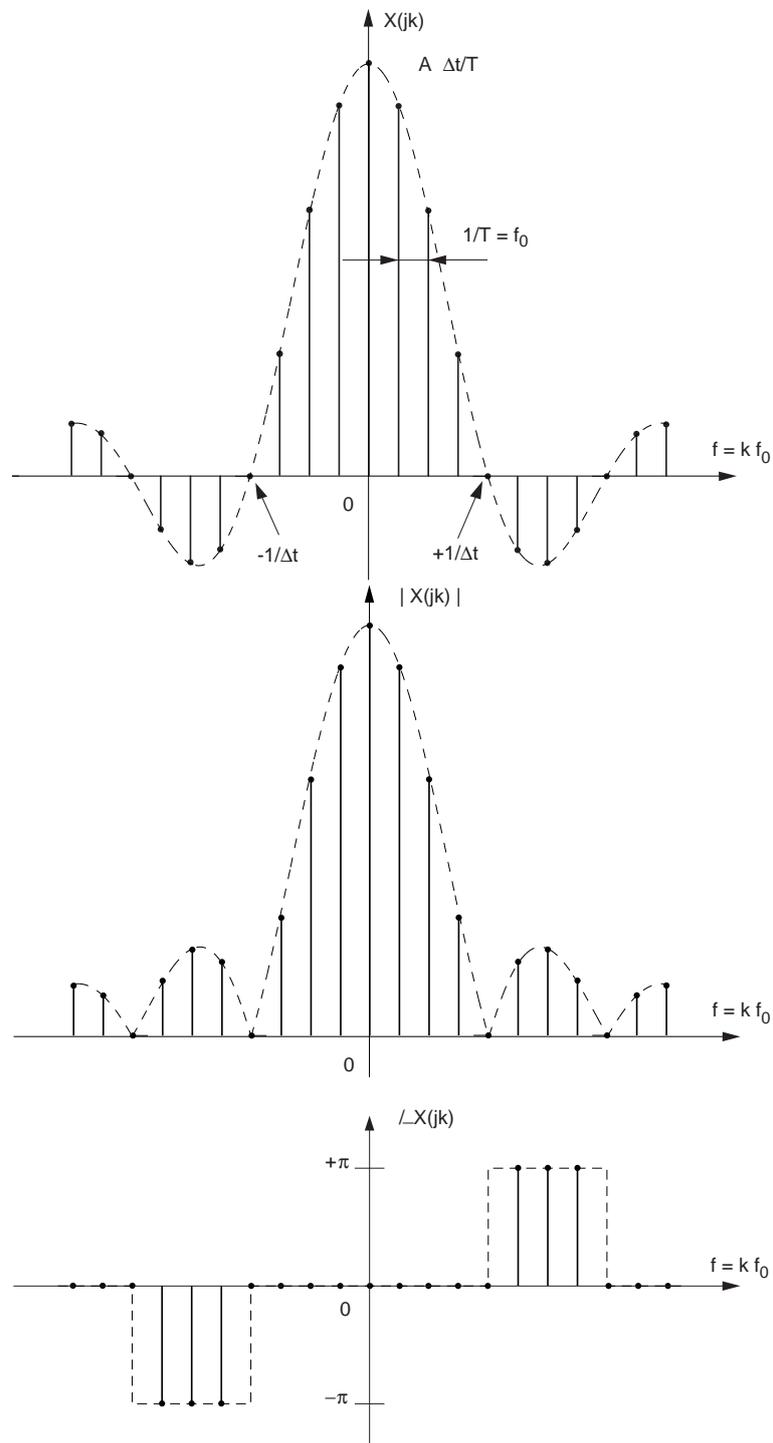


FIGURE 1.10.: Descriptions spectrales d'une suite d'impulsions rectangulaires :
 a) spectre complexe (ici purement réel car la SIR est paire)
 b) spectres d'amplitudes et de phases

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

On notera que l'amplitude du spectre $X(jk)$ est fixée par la valeur moyenne ou composante DC ($k = 0$) de la SIR car la fonction $\sin(x)/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. De plus, et comme on pouvait s'y attendre, les coefficients de Fourier sont purement réels puisque le signal est pair. Leur enveloppe (figure 1.10a) est une fonction en $\sin(x)/x$ qui porte le nom de *sinus cardinal* défini comme suit

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (1.32)$$

Le spectre d'une SIR s'écrit donc sous une des deux formes suivantes

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}(k f_0 \Delta t) \quad (1.33)$$

On remarquera que plus les impulsions sont étroites par rapport à la période T , plus le spectre s'étale. En effet, le premier passage par zéro se fait à la fréquence $1/\Delta t$. Par contre, la distance entre raies spectrales ne change pas puisqu'elle est égale à l'inverse de la période de la SIR $f_0 = 1/T$.

Il est fréquent que le spectre d'un signal soit complexe. Dans ce cas, sa représentation dans un plan ne peut se faire qu'au travers du traçage distinct des spectres d'amplitudes et de phases (figure 1.10b).

On peut relever au passage que la puissance totale d'une SIR vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (1.34)$$

et que le premier lobe du spectre d'une SIR en contient environ le 90%.

1.6.2. Suite d'impulsions triangulaires

Il existe une autre suite d'impulsions qui est également très importante en télécommunications; il s'agit de la suite d'impulsions triangulaires (SIT). Le signal $x(t)$ et son spectre $X(jk)$ sont représentés à la figure 1.11. Afin que les surfaces de la SIR et de la SIT soient égales, la largeur à la base du triangle est égale à $2\Delta t$. L'expression de $X(jk)$ est alors la suivante

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \quad (1.35)$$

La puissance totale d'une SIT vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} 2 \int_0^{\Delta t} \left(\frac{A}{\Delta t} t \right)^2 dt = \frac{2}{3} A^2 \frac{\Delta t}{T} \quad (1.36)$$

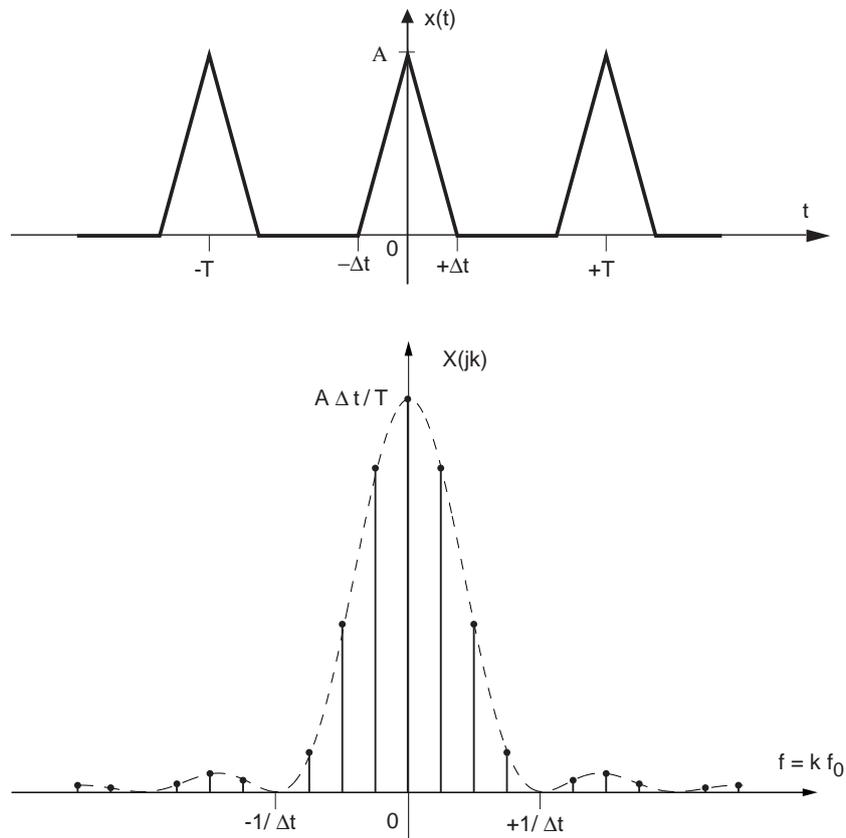


FIGURE 1.11.: Suite d'impulsions triangulaires avec son spectre

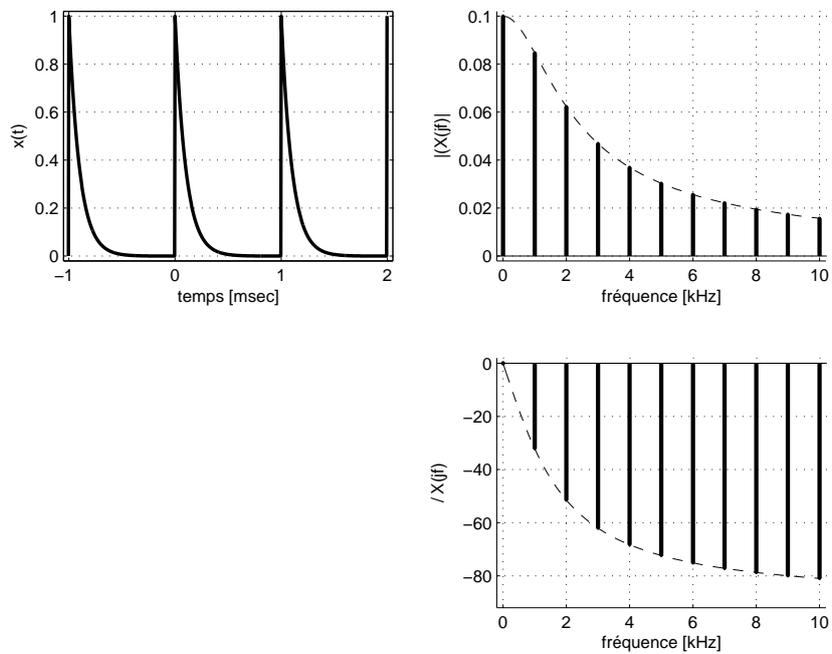


FIGURE 1.12.: Suite d'exponentielles décroissantes ($\tau \ll T$) et sa représentation spectrale

1.6.3. Suite d'exponentielles décroissantes

Considérons une exponentielle qui se répète périodiquement aux instants kT (figure 1.12)

$$x(t) = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

Le calcul de son spectre se fait en appliquant la définition de $X(jk)$

$$\begin{aligned} X(jk) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp(-t/\tau) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right) dt \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{\exp\left(-t\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)\right)}{-\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi k f_0\right)} \Bigg|_0^T \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{-\tau}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \left[\exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

En admettant que la constante de temps τ est beaucoup plus petite que la période T , on permet à l'exponentielle de revenir à zéro à la fin de chaque période. Dans ce cas, le premier terme entre crochets est beaucoup plus petit que 1 et peut être négligé. On obtient alors le résultat intéressant suivant

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T \quad (1.37)$$

On peut relever que dans ce résultat on trouve la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pondérée par le rapport $A \frac{\tau}{T}$. La représentation des raies spectrales d'amplitudes (figure 1.12) coïncidera donc, à un coefficient près, avec le module de la réponse fréquentielle de ce filtre alors que celle des phases seront les mêmes.

Dans le cas où $\tau \ll T$, la puissance totale d'une SIE vaut

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (A \exp(-t/\tau))^2 dt = \frac{A^2}{2} \frac{\tau}{T} \quad (1.38)$$

1.7. Reconstruction des signaux

1.7.1. Synthèse d'un signal

On se souvient que, connaissant le spectre $X(jk)$, on peut toujours reconstruire une approximation d'ordre N du signal temporel. Dans le cas d'une **suite d'impulsions**

rectangulaires cela donne

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Pour la suite d'impulsions triangulaires, on a de même

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= \sum_{k=-N}^{+N} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \sum_{k=-N}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \exp(+j2\pi k f_0 t) \\
 &= A \frac{\Delta t}{T} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Signal carré symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIR vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{2}{\pi} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3\pi} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

Signal triangulaire symétrique Dans ce cas, la valeur moyenne est nulle ($A_0 = 0$) et l'amplitude correspondante A de la SIT vaut 2. Comme le rapport cyclique $\Delta t/T$ vaut 0.5, le sinus cardinal s'annule pour k pair. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 x_N(t) &= 2 \frac{1}{2} \left(0 + 2 \sum_{k=1}^{+N} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 \cos(2\pi k f_0 t) \right) \\
 &= 2 \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \cos(2\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \cos(6\pi f_0 t) + \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \cos(10\pi f_0 t) + \dots \right) \\
 &\simeq x(t)
 \end{aligned}$$

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Une illustration de la synthèse de ces deux signaux est donnée à la figure 1.13. On constate que, contrairement au signal triangulaire, la convergence est très lente pour le signal carré.

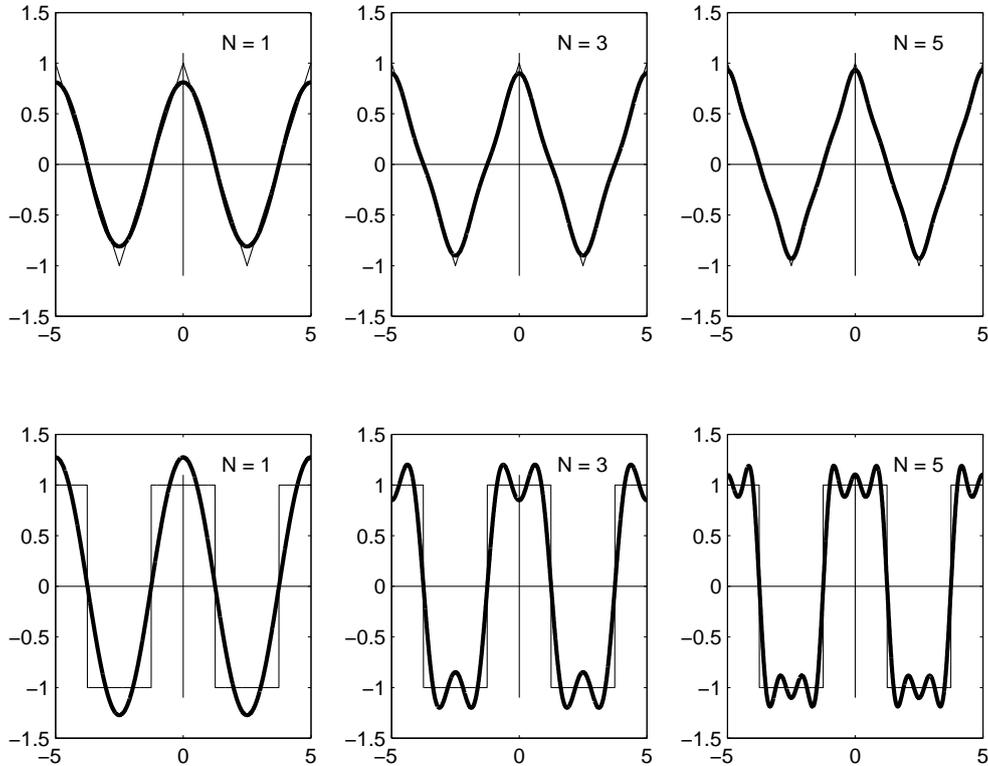


FIGURE 1.13.: Synthèse de signaux triangulaire et carré par l'addition successive des harmoniques

1.7.2. Phénomène de Gibbs

En général, lorsqu'on reconstruit un signal $x(t)$ à partir de ses coefficients de Fourier :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N X(jk) \exp(j2\pi k f_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad (1.39)$$

on remarque une convergence rapide vers le signal original au fur et à mesure que N augmente. Cependant, cela n'est plus vrai lorsque le signal possède des discontinuités d'ordre 0. Il apparaît alors, à l'endroit de la discontinuité, des oscillations que l'on désigne sous le nom de phénomène de Gibbs. L'amplitude du dépassement dû à ces oscillations est égale au 9% de l'amplitude de la discontinuité (figure 1.14).

1.7.3. Importance de la phase

Il est fréquent en traitement du signal de ne parler que des spectres d'amplitudes et de délaisser quelque peu les spectres de phases. Cette attitude est due au fait que

1.7. Reconstruction des signaux

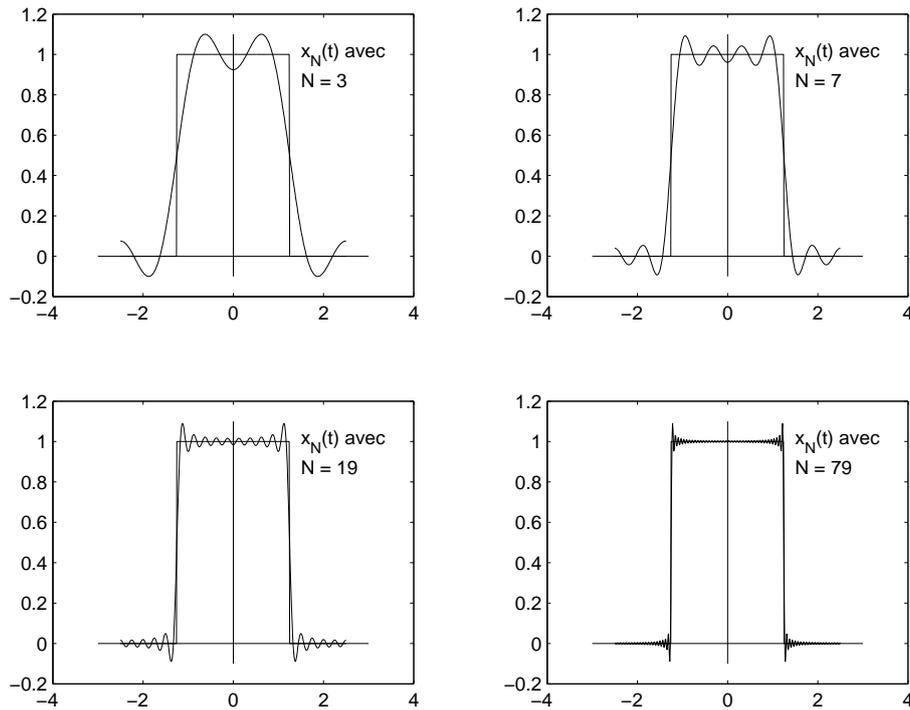


FIGURE 1.14.: Illustration du phénomène de Gibbs

lors du filtrage de signaux audio, on se contente de modifier le spectre d'amplitudes car l'oreille est peu sensible aux distorsions de phase. Cependant, lorsque l'on désire conserver la forme d'un signal, en particulier dans le cas du filtrage d'images, il est très important de ne pas négliger le spectre de phases.

Un exemple en est donné à la figure 1.15 où une série de photos basées sur le portrait de Joseph Fourier illustre l'importance de la phase dans la reconstitution des signaux.

1. L'image du haut de la figure est le portrait de Joseph Fourier.
2. Au centre, on y voit les spectres d'amplitudes et de phases de l'image de Fourier ; les niveaux de gris correspondent à la valeur de ces fonctions.
3. Les deux images du bas sont des images reconstruites par transformation inverse. Pour construire celle de gauche, on a utilisé le spectre d'amplitudes et remplacé le spectre de phases par un spectre de phases nulles. Pour celle de droite, on a fait l'inverse : le spectre de phases a été conservé alors que le spectre d'amplitudes a été remplacé par des amplitudes constantes.

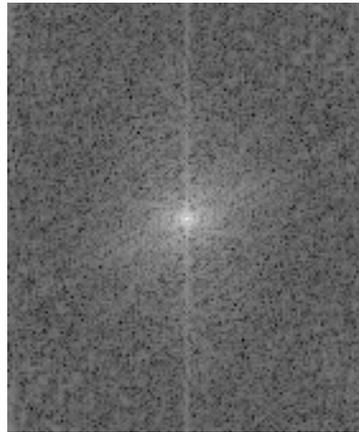
De ces illustrations, on en déduit que la phase contient une part importante de l'information concernant la *forme d'un signal*. Les deux dernières images illustrent particulièrement bien ce fait puisque le portrait initial ne peut pas être reconstruit avec un seul des deux spectres.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

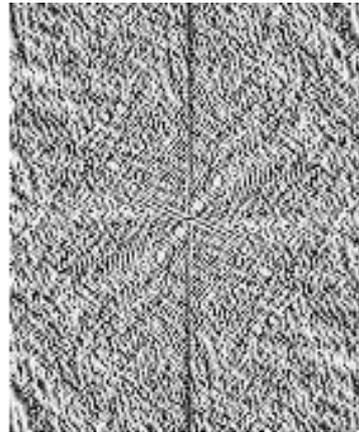
original



module



phase



TF inverse du module



TF inverse de la phase



FIGURE 1.15.: Transformations de Fourier directes et inverses d'une image

1.8. Quelques théorèmes utiles

1.8.1. Décalage temporel

Il est fréquent en analyse des signaux de devoir décaler temporellement un signal $x(t)$; on obtient alors un nouveau signal $y(t) = x(t + t_d)$. Ce décalage t_d peut être positif (signal avancé) ou négatif (signal retardé) (fig. 1.16). On montre alors qu'entre les espaces temps et fréquences, il existe la relation suivante :

$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk) \quad (1.40)$$

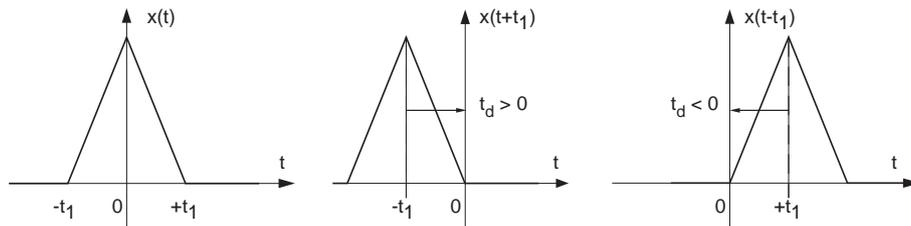


FIGURE 1.16.: Décalage temporel : signal original, signal avancé, signal retardé

Comme le module du phaseur $\exp(+j2\pi k f_0 t_d)$ vaut toujours un, il s'ensuit que seul le spectre de phases est modifié par un décalage temporel. On a donc :

$$|Y(jk)| = |X(jk)|, \quad \beta_k = \alpha_k + 2\pi k f_0 t_d \quad (1.41)$$

À un décalage temporel correspond une phase variant linéairement avec la fréquence.

1.8.2. Modulation d'amplitude

Il est fréquent en télécommunications de devoir émettre des signaux dont le spectre a été préalablement déplacé dans un domaine de fréquences permettant la transmission des messages par ondes électromagnétiques. Une des possibilités consiste à moduler l'amplitude de la porteuse $p(t)$ à l'aide du message $m(t)$.

La modulation d'amplitude est généralement obtenue par la multiplication des deux signaux entre eux (figure 1.17)

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) \quad (1.42)$$

Dans le cas particulier où la porteuse $p(t)$ est une fonction sinusoïdale, on peut la remplacer par deux phaseurs de fréquence $\pm f_p$ grâce aux formules d'Euler

$$\cos(2\pi f_p t) = \frac{1}{2} (\exp(+j2\pi f_p t) + \exp(-j2\pi f_p t))$$

On a donc affaire, de manière plus fondamentale, à une multiplication du message $m(t)$ par un phaseur :

$$x(t) = m(t) \cdot p(t) = m(t) \cdot \exp(\pm j2\pi f_p t) \quad (1.43)$$

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

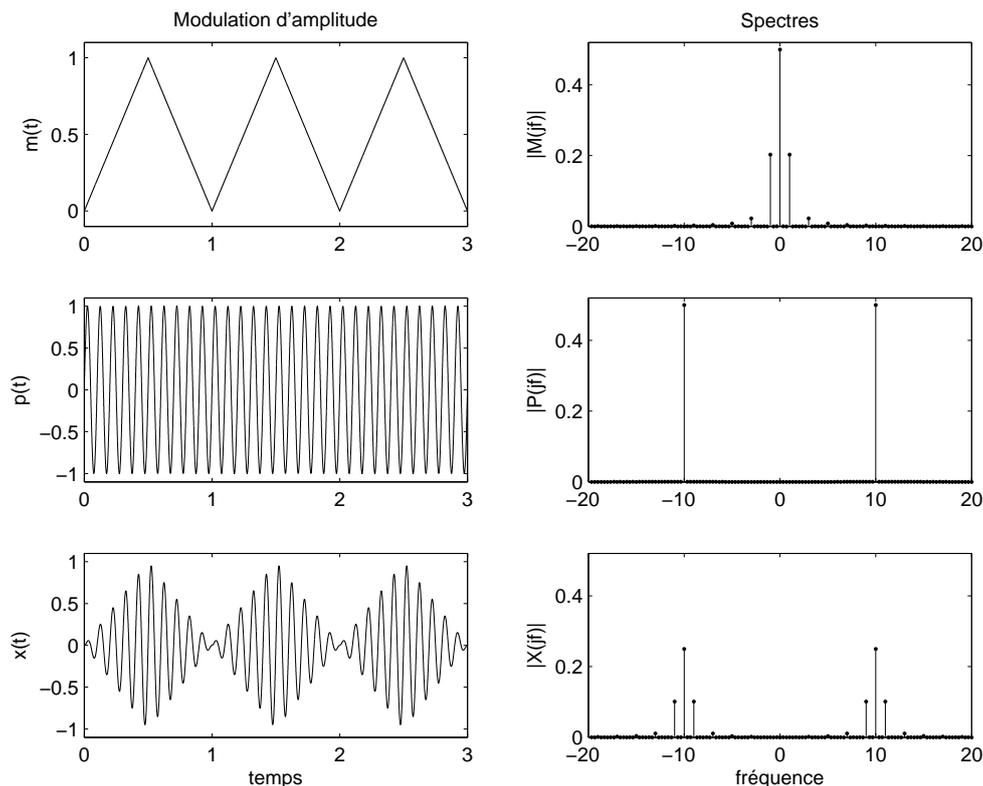


FIGURE 1.17.: Modulation d'amplitude : signaux et spectres

On montre alors aisément la propriété suivante :

$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(j(kf_0 \mp f_p)) \quad (1.44)$$

À une multiplication par un phaseur dans le domaine temporel correspond un décalage dans l'espace des fréquences.

La figure 1.17 illustre la modulation d'amplitude d'une porteuse de fréquence 10kHz par un signal triangulaire de fréquence 1kHz. Au niveau fréquentiel, on voit très bien que le spectre original situé autour de la fréquence nulle est déplacé autour des fréquences de la porteuse ± 10 kHz avec une amplitude réduite de moitié. On notera que le signal modulé $x(t)$ n'est périodique que si le rapport des fréquences f_p/f_0 est rationnel.

1.8.3. Rotation autour de l'ordonnée

La rotation d'un signal autour de son ordonnée est décrite par $y(t) = x(-t)$. Dans ce cas, on montre que

$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X(-jk) = X^*(jk) \quad (1.45)$$

À une rotation du signal temporel autour de l'ordonnée correspond le conjugué complexe dans le domaine fréquentiel.

Par exemple, si l'on s'intéresse à une suite périodique d'exponentielles croissantes décrite par

$$x(t)|_T = A \cdot \exp(+t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

son spectre se calcule aisément à partir de celui de la suite d'exponentielles décroissantes

$$x_o(t)|_T = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \text{si } 0 \leq t < T$$

$$X_o(jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

On voit en effet que l'on a

$$x(t) = x_o(-t)$$

donc

$$X(jk) = X_o(-jk) = A \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{(1 - j2\pi k f_0 \tau)} \quad \text{si } \tau \ll T$$

1.9. Calcul de quelques spectres

Le but de ce paragraphe est de montrer, au travers de quelques exemples simples, comment on calcule, trace et interprète les spectres d'un signal.

1.9.1. Suite d'impulsions composites

Considérant le signal de la figure 1.18a, on aimerait calculer ses composantes spectrales et obtenir son approximation d'ordre 3.

La résolution de ce problème est immédiate dès l'instant où l'on remarque que le signal $x(t)$ est composé d'une somme de deux SIR $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dont les caractéristiques sont, respectivement, leur largeur : $\Delta t_1 = 0.25[msec]$, $\Delta t_2 = 0.5[msec]$, et leur amplitude : $A_1 = 1 [V]$, $A_2 = 2 [V]$.

Utilisant la propriété de linéarité des séries de Fourier, on a :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) \quad (1.46)$$

Comme le signal $x(t)$ et ses deux SIR constitutives sont paires, leurs spectres sont réels

$$X_1(jk) = A_1 \frac{\Delta t_1}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_1)}{k\pi f_0 \Delta t_1} = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}$$

$$X_2(jk) = A_2 \frac{\Delta t_2}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t_2)}{k\pi f_0 \Delta t_2} = 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

$$X(jk) = X_1(jk) + X_2(jk) = 0.25 \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4} + 1.00 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

Le calcul de quelques composantes spectrales fournit les valeurs numériques suivantes :

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

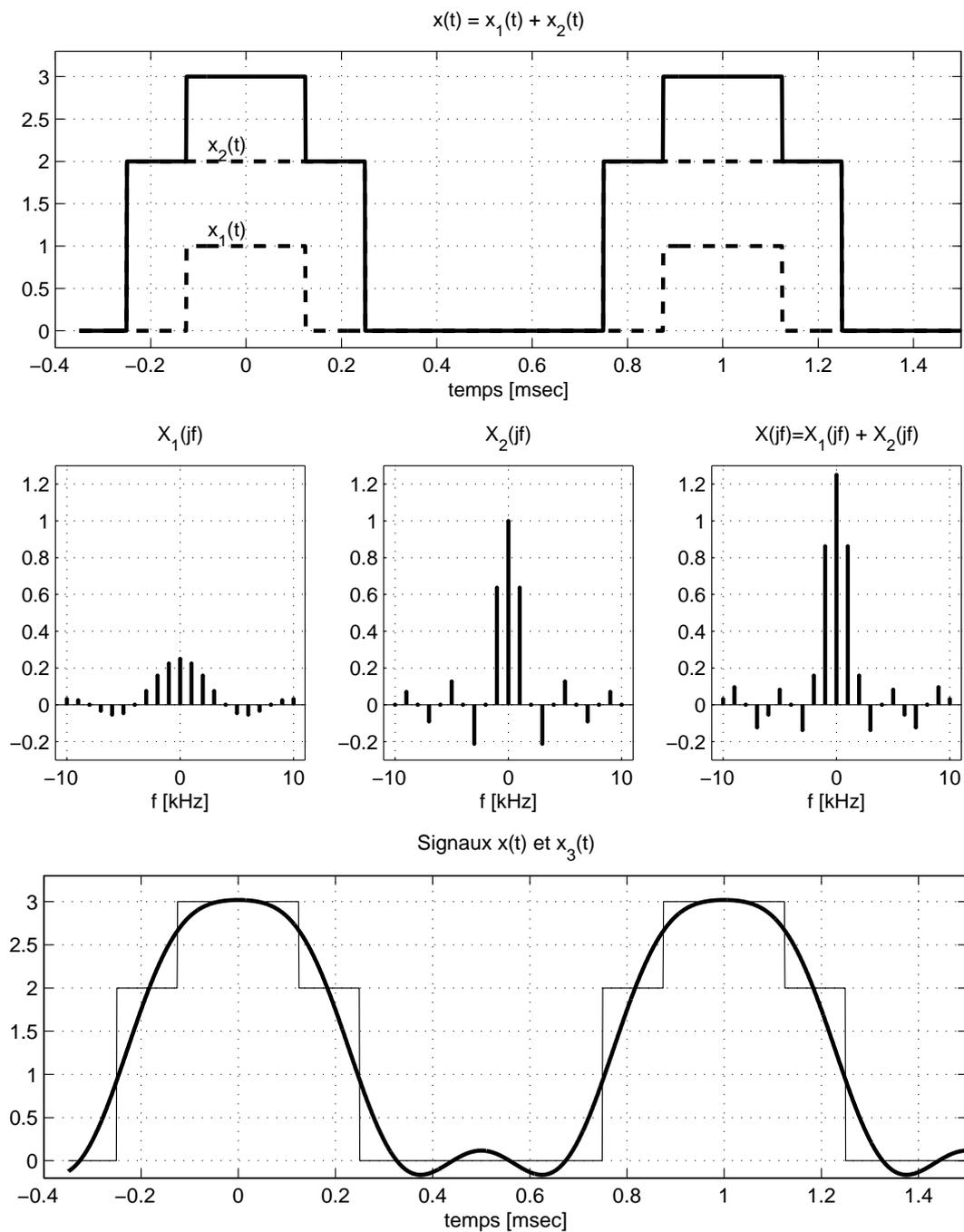


FIGURE 1.18.: Suite d'impulsions composites :

- a) les signaux temporels
- b) les spectres respectifs
- c) la reconstruction d'ordre 3

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
$X_1(jk)$	-0.045	0	+0.075	+0.159	+0.225	+0.25	+0.225	+0.159	+0.075	0	-0.045
$X_2(jk)$	0.127	0	-0.212	0.00	+0.637	1.00	0.637	0.00	-0.212	0	0.127
$X(jk)$	+0.082	0	-0.137	+0.159	+0.862	1.25	+0.862	+0.159	-0.137	0	+0.082
A_k						1.25	1.724	0.318	0.274	0	0.164
α_k							0.00	0.00	π	0	0.00

La figure 1.18c représente l'approximation d'ordre 3 du signal décrite par :

$$x_{(3)}(t) = 1.25 + 1.724 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + 0.318 \cdot \cos(4\pi f_0 t) + 0.274 \cdot \cos(6\pi f_0 t + \pi)$$

À titre d'exercice, on peut montrer que les puissances des signaux $x(t)$ et $x_{(3)}(t)$ valent respectivement $P_x = 3.25 V_{eff}^2$, $P_{x(3)} = 3.14 V_{eff}^2$.

1.9.2. SIR décalée

Considérons le cas d'une SIR non centrée démarrant à l'instant $t = 0$, de largeur Δt et de période T (figure 1.19a). Dans ce cas, la SIR est retardée d'une demi-largeur d'impulsion et le temps de décalage vaut donc $t_d = -\Delta t/2$. Partant d'une SIR centrée et utilisant le théorème du retard, on obtient :

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \exp(-j2\pi k f_0 \frac{\Delta t}{2}) \quad (1.47)$$

Si l'on désigne $X(jk)$ par le produit de 3 facteurs $X(jk) = X_0 \cdot X_1(jk) \cdot X_2(jk)$, le spectre d'amplitudes s'obtient en effectuant le produit des modules

$$\begin{aligned} |X(jk)| &= |X_0| \cdot |X_1| \cdot |X_2| \\ &= A \frac{\Delta t}{T} \cdot \left| \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right| \cdot 1 \end{aligned}$$

alors que le spectre de phases est obtenu en sommant les phases :

$$\begin{aligned} \angle X(jk) &= \angle X_0 + \angle X_1 + \angle X_2 \\ &= 0 + (0; \pm\pi) + (-\pi k f_0 \Delta t) \end{aligned}$$

Considérant que l'on a $\Delta t = 0.1 [msec]$, $T = 1 [msec]$, la combinaison de ces termes spectraux est illustrée par la figure 1.19. Comme attendu, on constate que le décalage temporel du signal ne modifie pas le spectre d'amplitudes, mais introduit une phase variant linéairement avec la fréquence.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

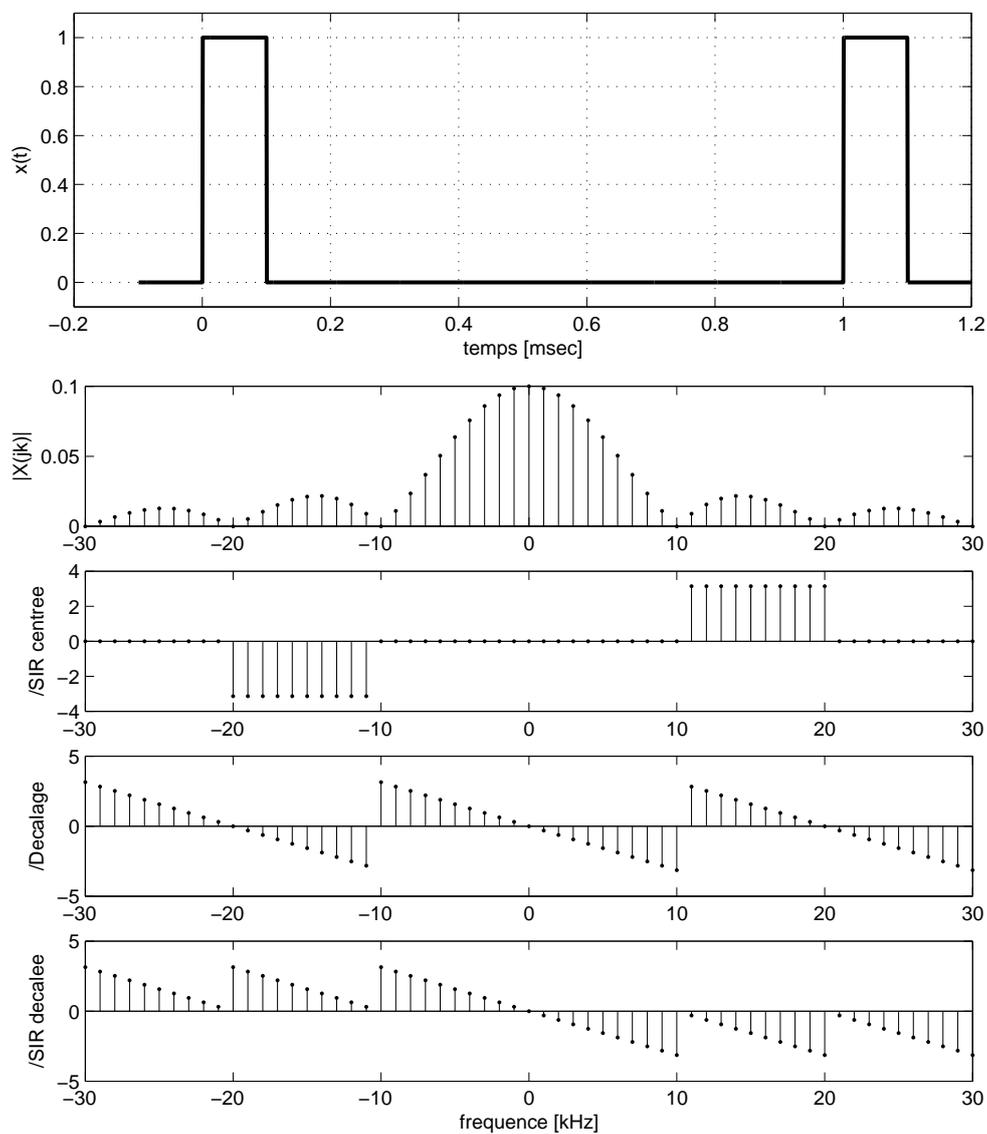


FIGURE 1.19.: SIR démarrant à l'instant $t = 0$ et son spectre

1.10. Réponse d'un système linéaire

Considérons, comme exemple, un filtre attaqué par une SIR (figure 1.20a). Comme ce signal est périodique, on retrouvera à la sortie du circuit un signal périodique $y(t)$ de même période T_0 . La décomposition de ces 2 signaux en série de Fourier donnera les spectres $X(jk)$ et $Y(jk)$ qui seront liés l'un à l'autre par la réponse fréquentielle $G(j\omega)$ du filtre.

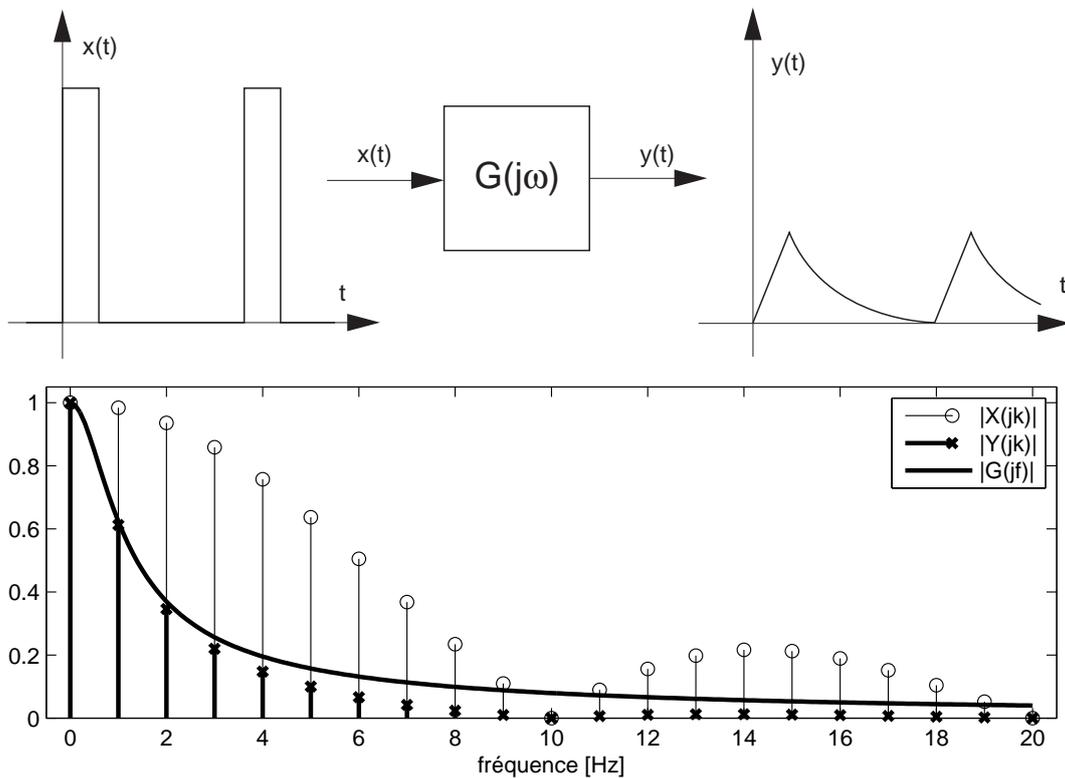


FIGURE 1.20.: Réponses temporelle et fréquentielle d'un filtre à une SIR

Comme les signaux périodiques sont représentés par des ondes sinusoïdales de fréquences kf_0 et que les systèmes linéaires conservent la fréquence des signaux appliqués, on retrouve pour $Y(jk)$ des raies spectrales situées aux mêmes fréquences que celles de $X(jk)$ (figure 1.20b). De plus, l'amplitude et la phase de ces raies spectrales sont liées au signal d'entrée par la relation bien connue $Y(j\omega) = G(j\omega) \cdot X(j\omega)$. Dans le cas de signaux périodiques, la pulsation ω est un multiple de la fondamentale $2\pi f_0$. On a donc

$$Y(jk) = X(jk) \cdot G(j\omega)|_{\omega=2\pi kf_0} \quad (1.48)$$

1.10.1. Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Considérant le circuit L-R de la figure 1.21 et la SIR qui lui est appliquée, on aimerait :

1. connaître la fonction de transfert de ce filtre et sa constante de temps τ ;

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

2. calculer la composante continue $U_{2,dc}$;
3. esquisser le signal de sortie $u_2(t)$ en tenant compte des valeurs numériques $L = 100 [mH]$, $R = 100 [\Omega]$;
4. calculer le spectre $U_2(jk)$;
5. calculer les valeurs efficaces $U_{1,eff}$, $U_{2,eff}$, $U_{2,ac,eff}$;
6. estimer la valeur de crête de l'ondulation $u_{2,ac}(t)$.

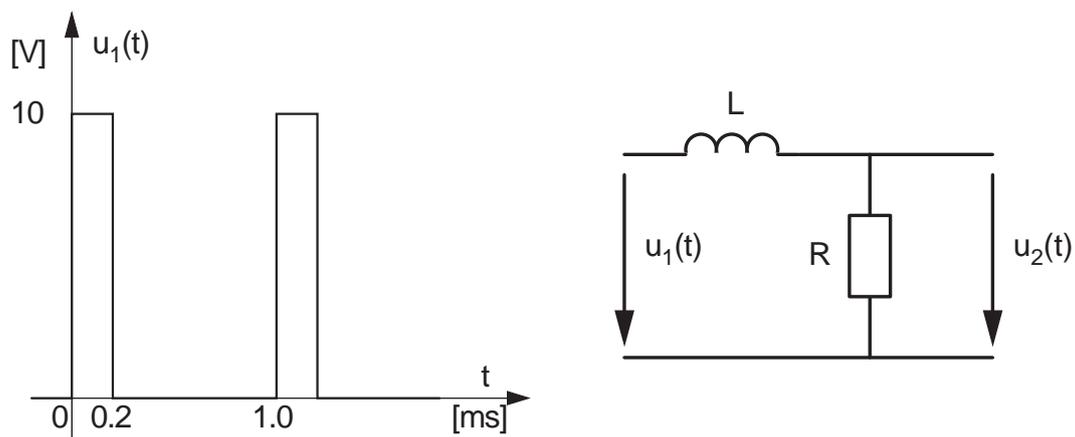


FIGURE 1.21.: Analyse de la réponse d'un filtre passe-bas

Solution :

1.10. Réponse d'un système linéaire

1.11. Réponse d'un système non-linéaire

La caractéristique essentielle des systèmes non-linéaires est de déformer les signaux sinusoïdaux. Le signal de sortie est donc périodique non-sinusoïdal. Il s'en suit que son spectre est constitué d'un grand nombre de raies spectrales, alors qu'à l'entrée il n'y avait qu'une seule raie.

Dans la pratique, il est important de pouvoir chiffrer cette déformation puisque les amplificateurs réels, quelle que soit leur qualité, possèdent des non-linéarités. On mesure cette déformation à l'aide du *taux de distorsion harmonique* (TDH). Celui-ci est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques d'ordre supérieur à 1 avec la valeur efficace du premier harmonique

$$TDH = \frac{X_{eff}(k > 1)}{X_{eff}(k = 1)} = \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \quad (1.49)$$

1.11.1. Distorsion due à une diode

Considérons comme exemple de système non linéaire, une diode à laquelle on applique une tension sinusoïdale superposée à une tension continue (figure 1.22)

$$u(t) = U_0 + \Delta U(t) = U_0 + A \sin(2\pi f_0 t)$$

Cette diode est caractérisée par la loi exponentielle bien connue

$$I_D = I_S (e^{U_D/nV_T} - 1) \quad (1.50)$$

Admettant les valeurs numériques suivantes

$$U_0 = 0.5 [V], \quad A = 0.05 [V], \quad f_0 = 100 [Hz]$$

$$I_S = 10 [pA], \quad n = 1, \quad V_T = 26 [mV]$$

on désire :

1. calculer I_0 , I_{max} et I_{min}
2. esquisser $u(t)$ et $i(t)$
3. calculer $U(jk)$ et $I(jk)$
4. calculer le TDH du courant.

Solution :

1. Le calcul de I_0 , I_{max} et I_{min} se fait par simple application numérique de l'équation de la diode; on obtient alors :
 - a) le courant au point de fonctionnement $I_0 = 2.54 mA$;
 - b) sa valeur maximum $I_{max} = 17.2 mA$;
 - c) sa valeur minimum $I_{min} = 0.36 mA$.

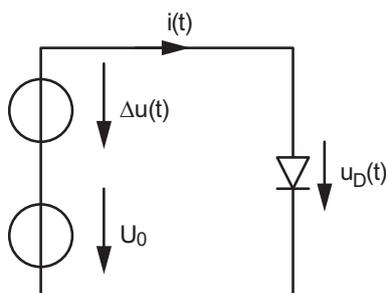


FIGURE 1.22.: Circuit à diode

2. La simulation temporelle avec Spice a donné les résultats de la figure 1.23. On y voit que la variation sinusoïdale de la tension de la diode (50 mV) autour du point de fonctionnement (500 mV) entraîne une variation non sinusoïdale du courant caractérisé par les valeurs calculées ci-dessus.
3. L'analyse spectrale obtenue par FFT (Fast Fourier Transform) donne les résultats suivants.
 - a) La tension de la diode ne contient que 2 raies spectrales (figure 1.24a) :
 - i. la composante DC : $U_{dc} = 0.5 V$;
 - ii. la composante AC : $U_1 = 50 mV$.
 - b) Le courant non sinusoïdal est composé d'un grand nombre de raies spectrales dont les 10 premières sont les plus significatives (figure 1.24b). On y trouve en particulier
 - i. la composante DC : $I_{dc} = 5.41 mA$;
 - ii. la composante fondamentale : $I_1 = 7.43 mA$.
4. Le calcul du taux de distorsion se fait en appliquant la définition du TDH :

$$\begin{aligned}
 TDH &= \sqrt{\frac{X^2(2) + X^2(3) + X^2(4) + \dots}{X^2(1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{3.14^2 + 0.94^2 + 0.22^2 + 0.041^2 + 0.0065^2 + \dots}{7.43^2}} \\
 &= 44\%
 \end{aligned}$$

Cette valeur élevée est le signe de la forte déformation de la sinusoïde causée par la variation exponentielle du courant.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

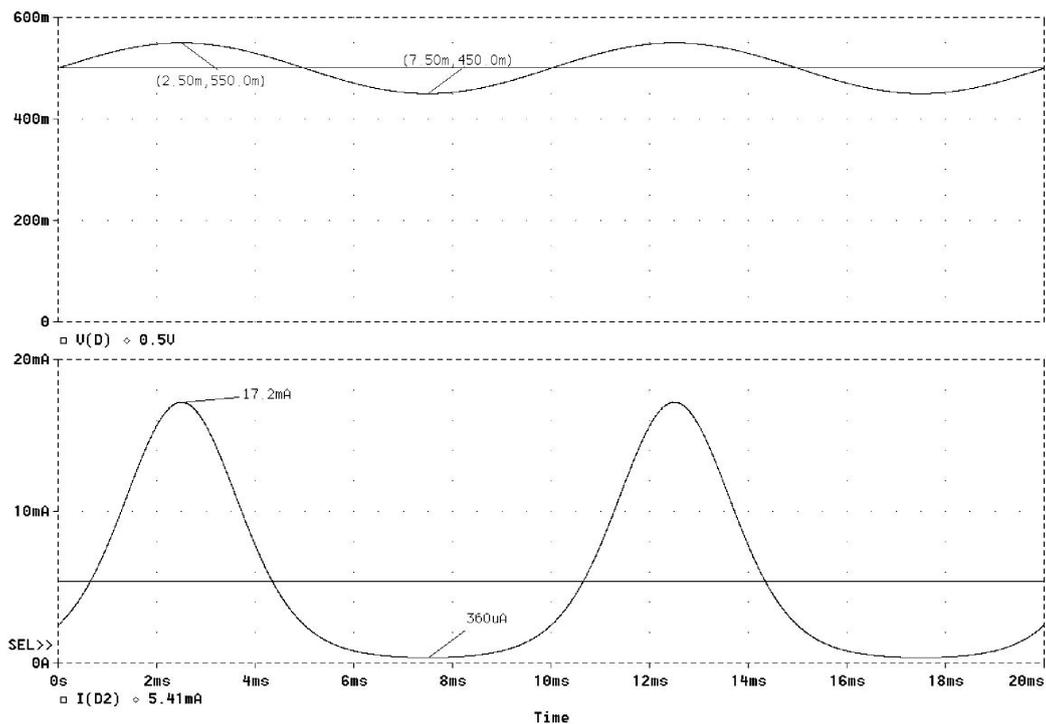


FIGURE 1.23.: Tension et courant de la diode

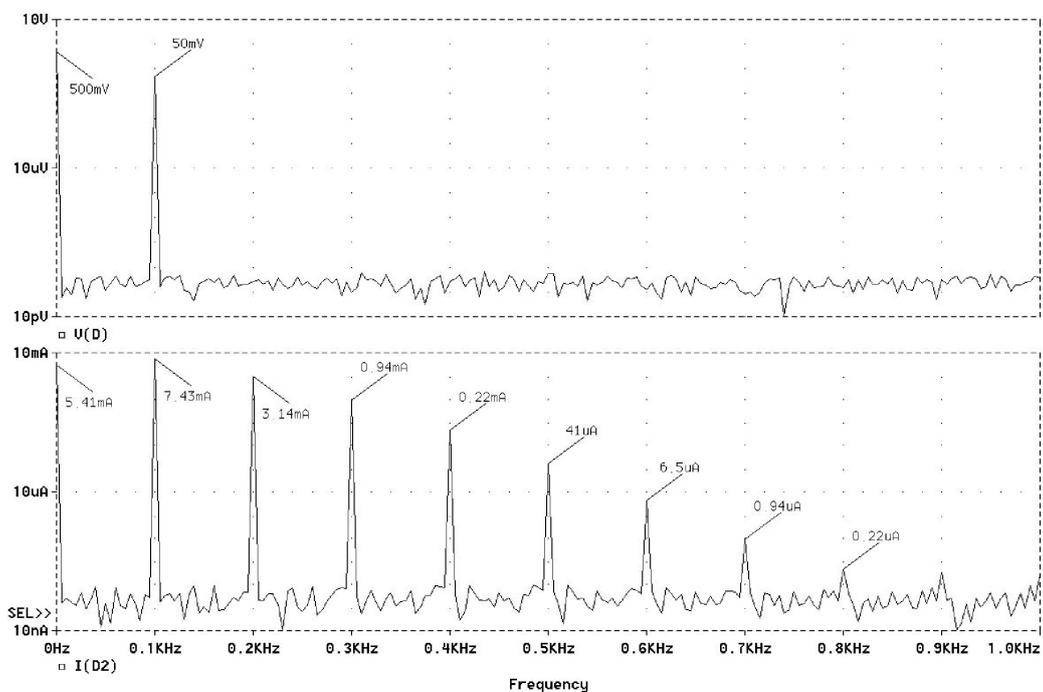


FIGURE 1.24.: Spectres unilatéraux de la tension et du courant de la diode

1.12. Exercices

SF 1 Considérant les 2 signaux suivants pour lesquels $f_0 = 1 [kHz]$:

$$x_1(t) = 6 - 2 \cos(2\pi f_0 t) + 3 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_2(t) = 4 + 1.8 \cos(2\pi f_0 t + \pi/3) + 0.8 \sin(6\pi f_0 t)$$

1. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase unilatéraux et bilatéraux ;
2. écrivez $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sous forme de série de Fourier complexe.

SF 2 Utilisez les formules d'Euler pour montrer que la série de Fourier du signal suivant

$$x(t) = \left(1 + \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot \cos(10\pi f_0 t)$$

est décrite par les harmoniques 4, 5 et 6. Pour ce faire :

1. remplacez chaque fonction cosinus par deux phaseurs ; effectuez le produit ;
2. écrivez $x(t)$ sous la forme d'une somme de phaseurs ;
3. que valent les coefficients $X(jk)$ non-nuls ?
4. dessinez les spectres bilatéraux et unilatéraux d'amplitude et de phase ;
5. calculez sa puissance.

SF 3 Considérant un signal périodique de période $T = 20 [ms]$ décrit par son spectre bilatéral $X(jk)$:

k	0	± 1	± 2
$X(jk)$	2	$-3 \pm j2$	$+1 \pm j3$
$ X $			
$\angle X$			

retrouvez sa description temporelle en cosinus après avoir rempli les cases libres du tableau. Calculez les valeurs de X_{dc} , X_{ac} et P .

SF 4 À partir des spectres d'amplitude et de phase d'une SIR vus au cours,

1. calculez les spectres complexes des deux signaux Ex SF4 ;
2. esquissez leurs spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

SF 5 Considérant les spectres unilatéraux Ex SF5 d'un signal $x(t)$:

1. donnez l'expression de $x(t)$;
2. dessinez son spectre bilatéral ;
3. calculez ses valeurs efficaces AC et totale.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

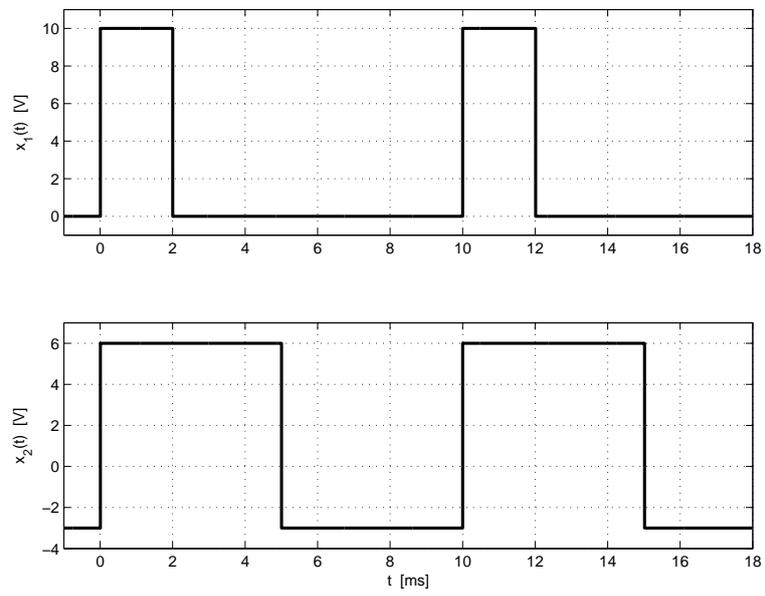


FIGURE 1.25.: Ex SF 4

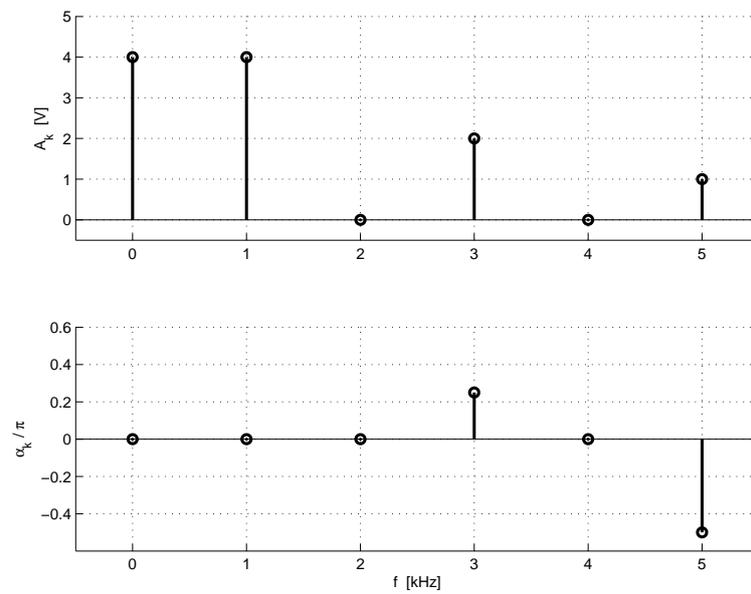


FIGURE 1.26.: Ex SF 5

SF 6 Considérant les trois signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ de période $T = 1 \text{ ms}$ décrits par leurs spectres respectifs (tableau Ex SF6) :

1. donnez l'expression temporelle correspondant à leur représentation ;
2. écrivez ces expressions à l'aide de cosinus seulement ;
3. dessinez leurs spectres d'amplitude et de phase uni- et bilatéraux ;
4. calculez la puissance de chacun des trois signaux.

	k	0	1	2	3	4
$x_1(t)$	a_k	+2	+5	-2	+1	0
	b_k		+4	+3	-1	0
	k	0	1	2	3	4
$x_2(t)$	A_k	1	3	0	2	0
	α_k	0	$-\pi/3$	0	$+\pi/2$	0
	k	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$x_3(t)$	$X(jk)$	5	$4 \pm j3$	0	$-2 \mp j$	0

TABLE 1.1.: Ex SF 6

SF 7 Étant donné un signal caractérisé par les propriétés suivantes :

1. $x(t)$ est réel et impair ;
2. $x(t)$ est périodique avec $T = 2 \text{ [msec]}$;
3. $X(jk) = 0$ pour $|k| > 1$;
4. $P = 1$;

trouvez deux signaux satisfaisant à ces propriétés.

SF 8 Considérant le signal $x(t) = 2 + \sin(2\pi f_0 t) + 0.25 \cos(6\pi f_0 t)$

1. écrivez $x(t)$ dans les formes cosinus et complexe ;
2. donnez les composantes spectrales dans les trois représentations :

$$\{a_k, b_k\}, \quad \{A_k, \alpha_k\}, \quad \{X(jk)\}$$

3. vérifiez que la puissance de ce signal calculée à l'aide des trois représentations donne le même résultat ;
4. comment calculeriez-vous la puissance dans l'espace temps ? voyez-vous des moyens de simplifier ce calcul ? si oui, le résultat est immédiat.

SF 9 On considère une SIR d'amplitude $A = 2 \text{ [V]}$, de période $T = 1 \text{ [ms]}$ de largeur $\Delta t = 0.2 \text{ [ms]}$; cette SIR est avancée de $T/4$ par rapport à une SIR centrée :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez son spectre $X(jk)$;
3. esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase ;
4. calculez la puissance de cette SIR.

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

SF 10 Considérant la suite d'impulsions impaires de la figure Ex SF10 :

1. le spectre sera-t-il réel, imaginaire ou complexe ;
2. calculez ses coefficients de Fourier complexes ;
3. quelle est la puissance de ce signal ?
4. dans le cas où $A = 10 [V]$, $T = 10 [ms]$ et $\Delta t = 1 [ms]$, esquissez les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase.

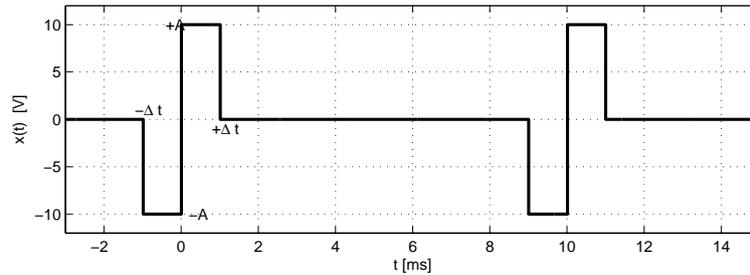


FIGURE 1.27.: Ex SF 10

SF 11 On considère un signal périodique $x(t)$ retardé d'une valeur t_r par rapport au signal original $x_0(t)$. Montrez que :

1. son spectre complexe vaut $X(jk) = X_0(jk) e^{-j2\pi k f_0 t_r}$;
2. son spectre d'amplitude n'est pas modifié ;
3. son spectre de phase vaut $\angle X = \angle X_0 - 2\pi k f_0 t_r$.

SF 12 Esquissez avec soin les spectres bilatéraux d'amplitude et de phase des signaux Ex SF12a et Ex SF12b. Expliquez les différences apparaissant entre les spectres.

SF 13 Partant d'une SIR, calculez le spectre d'un signal carré d'amplitude $A = \pm 5 V$ et de période $T = 1 ms$. Faites de même pour un signal triangulaire à partir de la SIT.

SF 14 Considérant les quatre signaux de la figure Ex SF14 d'amplitude A , de période T , de largeur et constante de temps $\Delta t = \tau = 0.2 T$:

1. calculez leur valeur efficace ;
2. à partir du spectre d'une suite d'exponentielles décroissantes, utilisez deux théorèmes proposés dans le cours pour trouver les spectres des signaux $x_2(t)$ et $x_4(t)$.

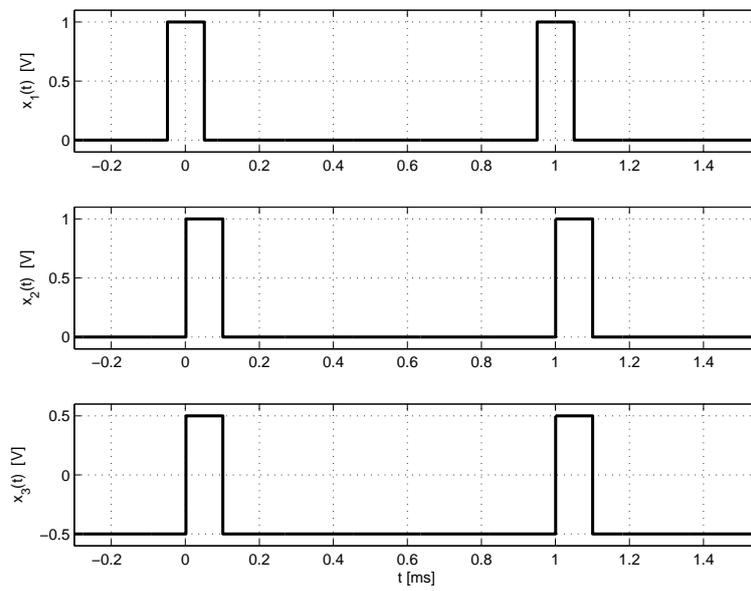


FIGURE 1.28.: Ex SF 12a

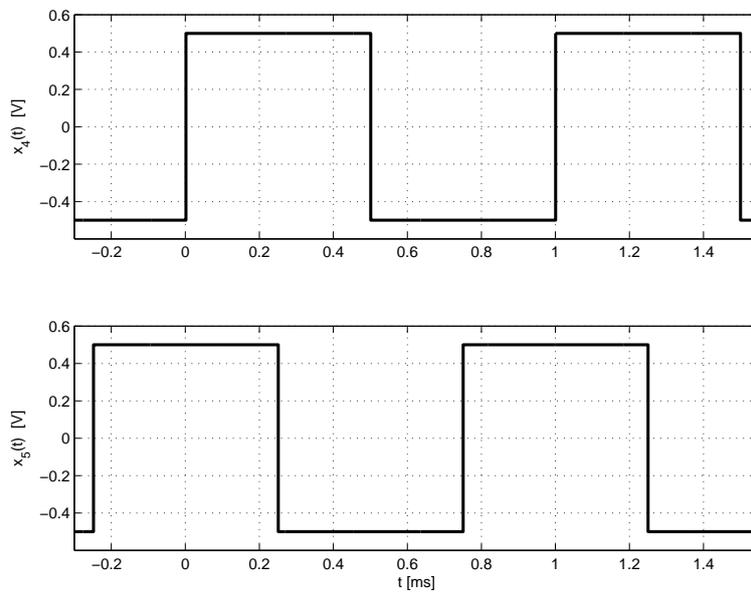


FIGURE 1.29.: Ex SF 12b

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

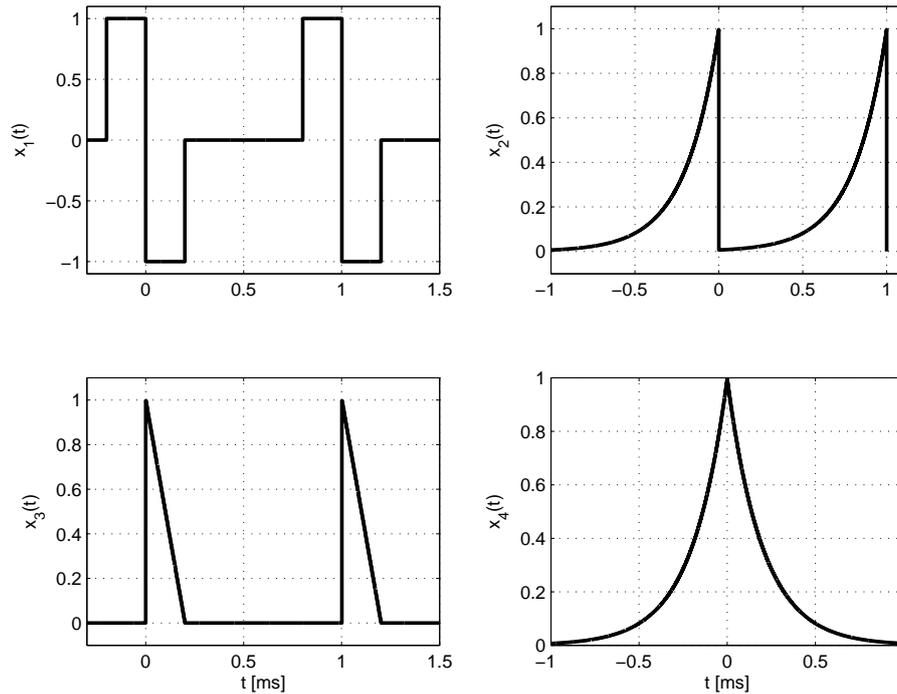


FIGURE 1.30.: Ex SF 14

SF 15 Considérant une SIR centrée de période $T = 100 [\mu s]$, de largeur $\Delta t = 20 [\mu s]$ et d'amplitude $A = 10 [V]$,

1. calculez le pourcentage de puissance comprise dans le premier lobe du sinus cardinal ;
2. admettant que cette SIR est appliquée à un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la fonction de transfert est

$$H(jf) = \frac{1}{1 + jf/f_c}, \quad f_c = 10 [kHz]$$

que valent l'amplitude et la phase des composantes 10 kHz, 40 kHz et 150 kHz ?

SF 16 Un filtre passe-bas RC réalisé avec $R = 1 [k\Omega]$ et $C = 0.1 [\mu F]$ est attaqué par un signal carré $u_1(t)$ de période $T = 1 [ms]$ et d'amplitude comprise entre 0 et 20 V :

1. esquissez le signal de sortie $u_2(t)$ et le courant $i(t)$;
2. pour chacun des 3 signaux $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i(t)$, calculez leurs valeurs DC, efficace totale et efficace AC.

SF 17 Soit un filtre RC passe-bas dont la constante de temps est mal connue. On lui applique une SIR $x(t)$ d'amplitude $A = 10 [V]$, de période $T = 20 [ms]$ et de largeur $\Delta t = 1 [ms]$.

1. que valent les composantes continues des signaux d'entrée et de sortie ?

2. quelle est la fonction de transfert $H(j\omega)$ du circuit ;
3. que valent les spectres bilatéraux $X(jk)$ et $Y(jk)$?
4. admettant que la constante de temps est de l'ordre de 2 ms, esquissez les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$; estimez la valeur maximum de $y(t)$;
5. pour la fréquence $f = 5 f_0$, l'analyseur spectral du signal de sortie fournit le coefficient complexe $Y(j5) = 0.0659 - j 0.154$; calculez l'amplitude et l'argument de la fonction de transfert pour cette fréquence ;
(Rép. : $|H| = 0.37$, $\angle H = -68^\circ$)
6. que valent la constante de temps et la fréquence de coupure du filtre ?
(Rép. : $\tau = 1.6 [ms]$, $f_c = 100 [Hz]$)

SF 18 Pour identifier un système linéaire possédant une résonance, on injecte dans celui-ci une SIR $x(t)$ de période T . La sortie sera donc périodique et son spectre $Y(jk)$ sera constitué de raies distantes de $1/T$. Afin d'obtenir une image spectrale représentative du système $H(j\omega)$, il faut que les raies spectrales soient en nombre suffisant et que le premier lobe de la SIR couvre le domaine de fréquences désiré ($\simeq 10 f_{res}$).

On demande de déterminer les paramètres T et Δt d'une SIR permettant de mesurer la réponse harmonique d'un circuit LC-R dont on connaît approximativement les valeurs $L \simeq 1 mH$, $C \simeq 0.1 \mu F$, $R \simeq 20 \Omega$.

Pour ce faire :

1. esquissez $H(f)$ dans un diagramme linéaire,
2. précisez le nombre de raies spectrales BF et HF que vous estimez nécessaires ;
3. estimez la distance inter-spectrale nécessaire pour observer le pic de résonance ;
4. calculez T et Δt ; adoptez des valeurs entières ;
5. si l'amplitude des impulsions est de 10 V, quelle est l'amplitude de la raie spectrale située près de la résonance f_{res} ? près de $5 f_{res}$?
6. pour ces mêmes fréquences, quelles sont les amplitudes des raies mesurées à la sortie du filtre LC-R ?

SF 19 Un circuit RC de résistance $R = 1 k\Omega$ et de capacité $C = 1 \mu F$ est attaqué par une SIR $u_1(t)$ d'amplitude $E = 10 V$, de largeur $\Delta t = 0.2 ms$ et de période $T = 1 ms$:

1. quelles sont les valeurs moyennes de $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. que vaut la constante de temps du circuit ?
3. esquissez $u_2(t)$;
4. calculez $Z(j\omega)$ et $I(jk f_0)$;
5. quelle est la puissance dissipée dans la résistance ?

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

SF 20 Un circuit redresseur double alternance suivi d'un filtre RC (R et C en parallèle avec le pont redresseur) est utilisé pour réaliser une conversion AC-DC. Tenant compte des hypothèses simplificatrices suivantes

- le courant $i(t)$ est considéré comme une suite d'impulsions rectangulaires de largeur Δt beaucoup plus petite que la période $T = 10$ ms ;
- la réactance du condensateur est négligeable par rapport à la résistance de charge R.

dessinez le schéma du circuit puis :

1. calculez les coefficients de Fourier $U(jk)$ de la tension de sortie $u(t)$;
2. calculez la puissance de chaque harmonique ;
3. calculez une borne supérieure pour la puissance d'ondulation, sachant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. calculez le taux d'ondulation maximum ;
5. si l'on veut un taux d'ondulation inférieur à 0.1, quelle capacité faut-il choisir lorsque la résistance R vaut 100Ω ?
6. estimez l'amplitude du générateur $u_1(t)$ pour que $U_{dc} \simeq 15 V$.

SF 21 Un circuit non linéaire de type parabolique est modélisé par la caractéristique de transfert suivante :

$$u_2(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_1^2(t)$$

Sachant qu'on lui applique une tension sinusoïdale $u_1(t) = A \sin(\omega t)$:

1. déterminez les composantes spectrales que l'on obtient à la sortie ;
2. quelle est la puissance normalisée P_2 du signal de sortie ?
3. que vaut-elle par rapport à celle du signal d'entrée P_1 ?
4. faites l'A.N. avec $A = 10 V$, $\omega = 2\pi 100 \text{ rad/s}$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.21/V$
5. esquissez $u_2(t)$; quel est son taux de distorsion harmonique ?

SF 22 Considérant les deux signaux ci-dessous :

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{20}{7}t\right)$$

précisez si ces signaux sont périodiques ou non. Pour cela, il vous faut trouver :

1. les fréquences constitutives de chaque signal,
2. les rapports existant entre ces fréquences,
3. la fréquence fondamentale si elle existe,
4. les harmoniques présents.

SF 23 : Les deux signaux de la figure Ex SF23 caractérisés par

$$A_1 = 2V, \quad \Delta t = 0.2ms, \quad T = 1ms$$

$$A_2 = 5V, \quad \tau = 0.1ms, \quad T = 1ms$$

passent au travers d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 4.5kHz$. Après avoir rappelé ce qu'est la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas **idéal**,

1. calculez les puissances P_{x1} , P_{x2} de chacun des signaux d'entrée ;
2. calculez les puissances P_{y1} , P_{y2} de chacun des signaux de sortie.

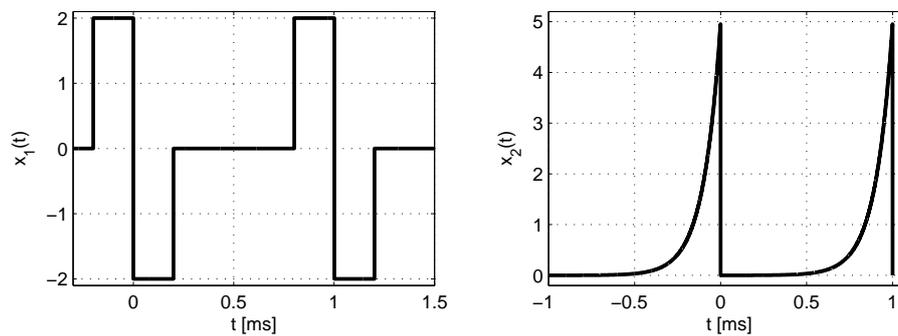


FIGURE 1.31.: Ex SF 23

SF 24 A cause de son taux de variation limité (slew-rate), un amplificateur opérationnel transforme un sinus en un signal triangulaire symétrique d'amplitude A . Calculez le taux de distorsion de cette déformation.

SF 25 Un signal sinusoïdal d'amplitude 10V et de fréquence 1 kHz est appliqué à un filtre RC passe-bas de fréquence de coupure 2 kHz. Calculez le TDH du signal de sortie.

SF 26 On applique un signal sinusoïdal d'amplitude 0.1V et de fréquence 10 kHz à un amplificateur inverseur de gain 100. Visuellement, le signal de sortie semble parfaitement sinusoïdal. Cependant, une analyse spectrale a fourni les composantes A_k du tableau ci-dessous. Calculez la valeur efficace du signal de sortie et son TDH.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_k [V]	81e-3	6.46	87e-6	0.105	55e-6	2.66e-3	58e-6	213e-6	57e-6	48e-6

SF 27 La figure Ex SF27 présente une sinusoïde $x(t)$ d'amplitude 10V et une sinusoïde $y(t)$ saturée à $\pm 9V$ avec les spectres correspondants. Sachant que les composantes spectrales unilatérales fournies par l'analyseur spectral sont les suivantes :

1. ANALYSE DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

k	1	3	5	7	9
$A_x(k)$ [dB]	0.0				
$A_y(k)$ [dB]	-0.33	-30.0	-33.2	-33.8	-50.7
$A_x(k)$ [V]					
$A_y(k)$ [V]					

1. calculez les amplitudes spectrales unilatérales et complétez le tableau ;
2. calculez les valeurs efficaces des deux signaux ;
3. calculez le TDH de $y(t)$;
4. expliquez pourquoi les harmoniques pairs du signal $y(t)$ sont nuls.

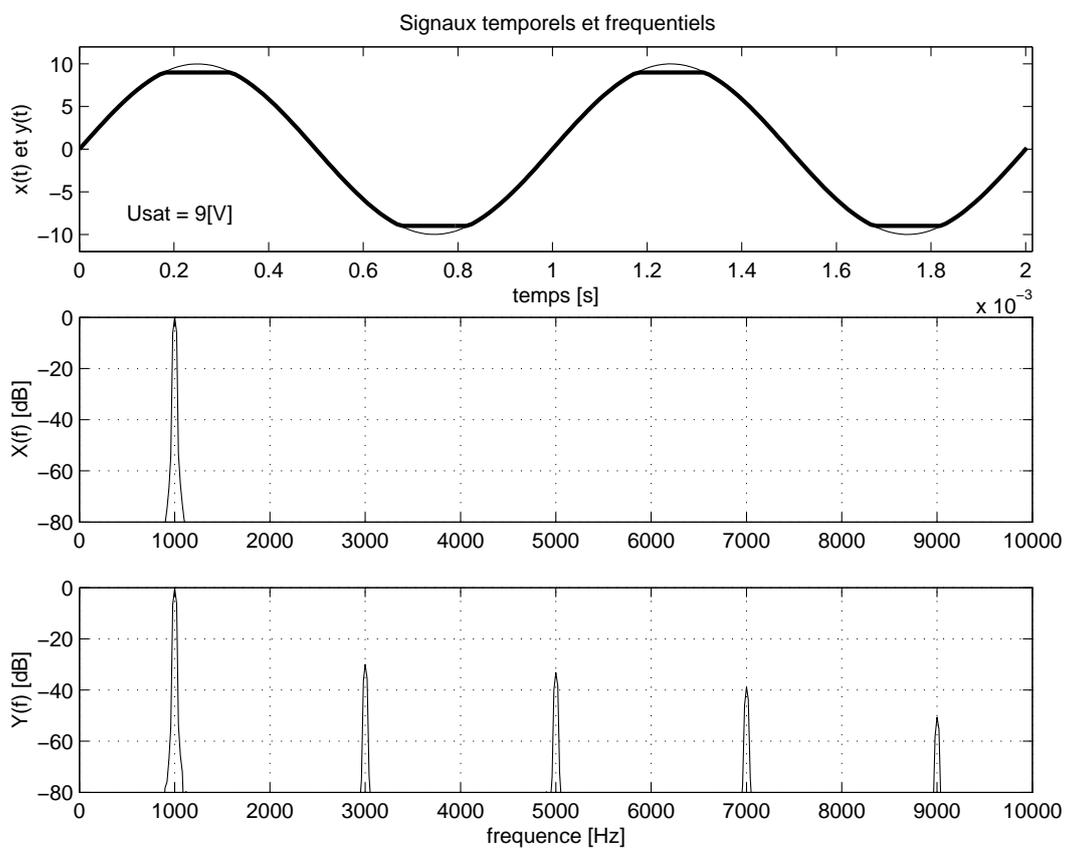


FIGURE 1.32.: Ex SF 27

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, 1983

2. Analyse des signaux non périodiques

2.1. Transformation de Fourier

2.1.1. Passage de la série à la transformation de Fourier

Le passage d'un signal périodique à un signal apériodique peut se faire en considérant que la période T devient de plus en plus grande pour tendre vers l'infini. On constate alors que les raies spectrales distantes de $1/T$ se rapprochent pour se transformer en spectre continu. Mais en même temps, l'amplitude de celui-ci diminue pour tendre vers zéro. Une illustration en est donnée (figure 2.1) pour une suite d'impulsions rectangulaires dont la période augmente alors que la largeur reste constante. Comme la surface de l'impulsion reste constante alors que la période augmente, l'amplitude X_{dc} du sinus cardinal ne cesse de décroître pour tendre vers zéro.

Partant d'un signal périodique décrit par

$$x_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t)$$

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt, \quad k \in Z$$

on évite l'annulation de $X(jk)$ lorsque $T \rightarrow \infty$ en considérant la fonction

$$T \cdot X(jk) = \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

À partir des correspondances suivantes

$$T \rightarrow \infty, \quad f_0 \rightarrow df, \quad k f_0 \rightarrow f, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf)$$

on voit que la série de Fourier discrète devient une fonction continue. Cette fonction $X(jf)$ est une **densité spectrale d'amplitude** qui, par définition, est la transformée de Fourier du signal apériodique $x(t)$:

$$X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt, \quad f \in R$$

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

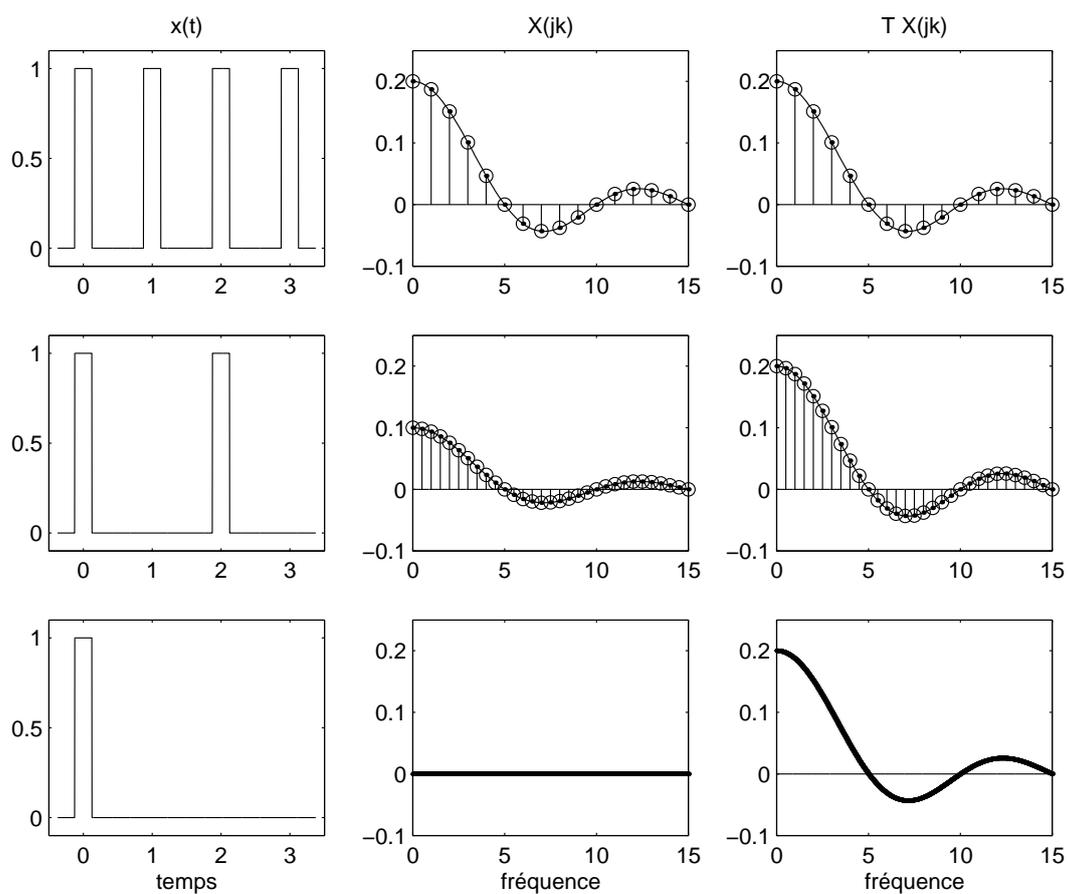


FIGURE 2.1.: Passage de la série de Fourier à la densité spectrale

La transformée inverse s'obtient en considérant la fonction périodique pour laquelle la période T tend vers l'infini ; on a alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} (TX(jk)) \exp(+j2\pi k f_0 t) f_0 \end{aligned}$$

Lorsqu'on passe à la limite

$$T \rightarrow \infty, \quad T \cdot X(jk) \rightarrow X(jf), \quad f_0 \rightarrow df, \quad kf_0 \rightarrow f$$

on obtient la définition de la transformation inverse de Fourier

$$x(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df$$

Il est important de noter que les unités de $X(jf)$ ne sont pas les mêmes que celles du signal original $x(t)$. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique, sa transformée $X(jf)$ s'exprime en [V/Hz].

2.1.2. TF directe et inverse

Les deux relations que nous venons de démontrer constituent les transformations de Fourier directe et inverse. On constate que les descriptions temporelle et spectrale sont parfaitement symétriques :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \quad (2.1)$$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (2.2)$$

En notation abrégée, on décrira ces deux transformations par les opérateurs $TF\{\}$ et $TFI\{\}$. La correspondance réciproque s'écrit alors :

$$x(t) = TFI\{X(jf)\} \longleftrightarrow TF\{x(t)\} = X(jf)$$

Si la fonction $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude $X(jf)$ est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(jf) = X_r(f) + jX_i(f) \quad (2.3)$$

Les densités spectrales du module et de la phase valent alors :

$$|X(jf)| \equiv X(f) = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \quad (2.4)$$

$$\angle X(jf) \equiv \alpha(f) = \arctan \frac{X_i(f)}{X_r(f)} \quad (2.5)$$

2.1.3. Énergie d'un signal non permanent

Dans le cas des signaux non permanents, on prendra garde à parler de leur énergie et non pas de leur puissance, car celle-ci est nulle si l'on considère une durée infiniment longue.

De manière similaire à ce que l'on a vu pour les signaux périodiques, on peut calculer l'énergie d'un signal apériodique aussi bien dans le domaine temporel que dans domaine fréquentiel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (2.6)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (2.7)$$

L'expression de l'énergie d'un signal $x(t)$ dans le domaine des fréquences entraîne la définition de la **densité spectrale d'énergie** $S_x(f)$:

$$S_x(f) \equiv |X(jf)|^2 = X(jf) \cdot X(jf)^* \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (2.8)$$

On notera que ses unités s'expriment en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$ lorsque le signal est une tension.

2.1.4. Propriétés de la transformation de Fourier

Parmi le grand nombre de propriétés associées à la transformation de Fourier, on retiendra particulièrement celles qui ont le plus d'intérêt en traitement du signal. Elles sont présentées dans le tableau 2.1.

2.2. Exemples de spectres continus

Pour illustrer l'utilisation de la transformée de Fourier, calculons les densités spectrales de trois signaux particuliers.

2.2.1. Spectre d'une impulsion rectangulaire

Considérons une impulsion $x(t)$ de largeur Δt et d'amplitude A centrée en $t = 0$ (figure 2.2). Par définition de la transformation de Fourier, on a :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

En tenant compte de la définition de l'impulsion rectangulaire centrée :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2. Exemples de spectres continus

a) linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(jf) + bY(jf)$
b) décalage	$x(t + t_d)$	$X(jf) \exp(+j2\pi f t_d)$
c) amortissement	$x(t) \exp(-at)$, $x(t)$ causal	$X(j2\pi f + a)$
d) modulation	$x(t) \exp(+j2\pi f_0 t)$	$X(j(f - f_0))$
e) dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(jf)$
f) intégration	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j2\pi f} X(jf) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
g) convolution	$h(t) \otimes x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(jf) \cdot X(jf)$ $H(jf) \otimes X(jf)$
h) énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) ^2 df$
j) valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
k) rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(jf) = X(-jf) = X^*(jf)$
l) fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(jf) \in \Re$
m) fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(jf) \in \Im$
n) symétrie	$y(t) = X(t)$	$Y(jf) = x(-jf)$

TABLE 2.1.: Quelques propriétés de la transformation de Fourier

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

il vient :

$$\begin{aligned} X(jf) &= \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} A \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \\ &= \frac{-A}{j2\pi f} \left[\exp(-j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) - \exp(+j2\pi f \frac{\Delta t}{2}) \right] \\ &= \frac{A}{\pi f} \frac{\exp(+j\pi f \Delta t) - \exp(-j\pi f \Delta t)}{2j} \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Euler :

$$\sin u = \frac{\exp(+ju) - \exp(-ju)}{2j}$$

on obtient finalement :

$$X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t) \in \mathfrak{R} \quad (2.10)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la densité spectrale d'amplitude d'une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$ est bien décrite par un sinus cardinal. De plus, comme l'impulsion rectangulaire $x(t)$ est paire, sa densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction réelle. Enfin, on remarquera (figure 2.2) que le spectre passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $1/\Delta t$.

Le spectre de cette impulsion illustre deux points importants concernant les signaux de durée limitée (figure 2.3) :

Un signal de **courte durée** possède un spectre **large bande**.

Un spectre **étroit** correspond à un signal de **longue durée**.

2.2.2. Spectres d'un sinus amorti

Étudions, comme deuxième exemple, la transformée de Fourier d'une sinusoïde de fréquence f_p décroissant exponentiellement au cours du temps (figure 2.4). Son équation s'écrit :

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t), & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2. Exemples de spectres continus

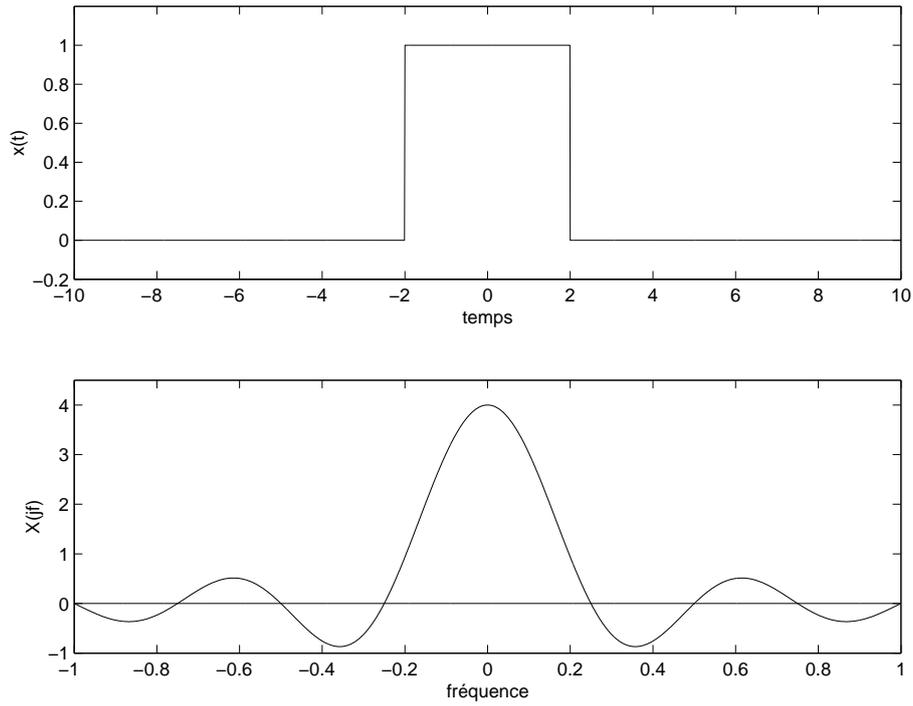


FIGURE 2.2.: Impulsion rectangulaire et sa densité spectrale d'amplitude

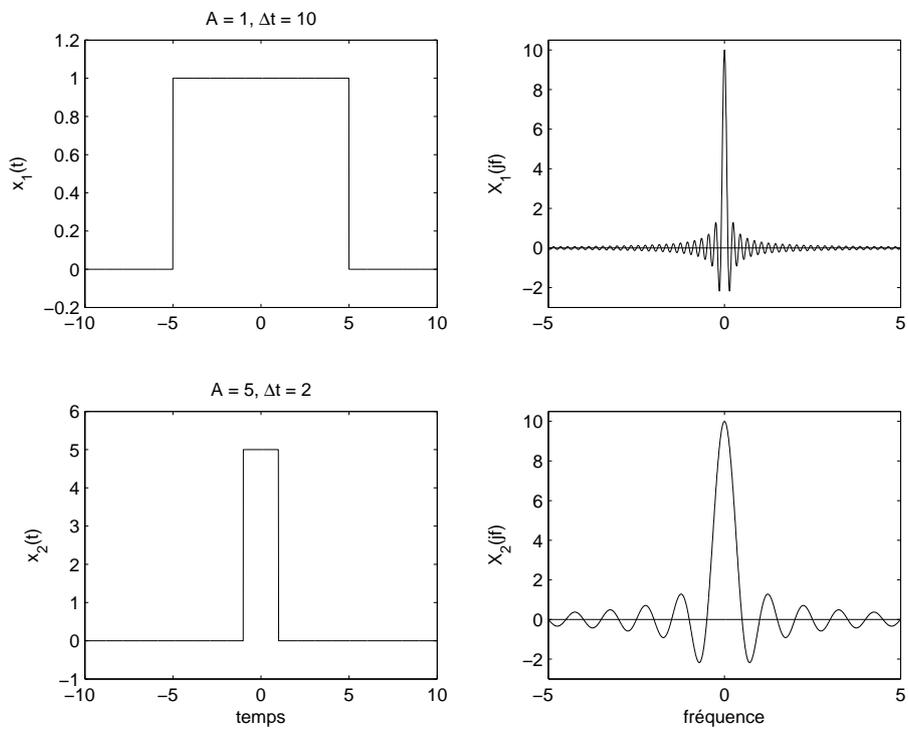


FIGURE 2.3.: Le contenu spectral d'une impulsion dépend fortement de sa durée

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Partant de la définition de la transformée de Fourier, on calcule sa densité spectrale d'amplitude :

$$\begin{aligned} Y(jf) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \sin(2\pi f_p t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_0^{\infty} A \exp(-at) \frac{\exp(+j2\pi f_p t) - \exp(-j2\pi f_p t)}{2j} \exp(-j2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles ; elle est très simple à calculer. Après réduction des deux primitives à un même dénominateur, on obtient :

$$Y(jf) = A \frac{2\pi f_p}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_p)^2} \in \mathcal{C} \quad (2.12)$$

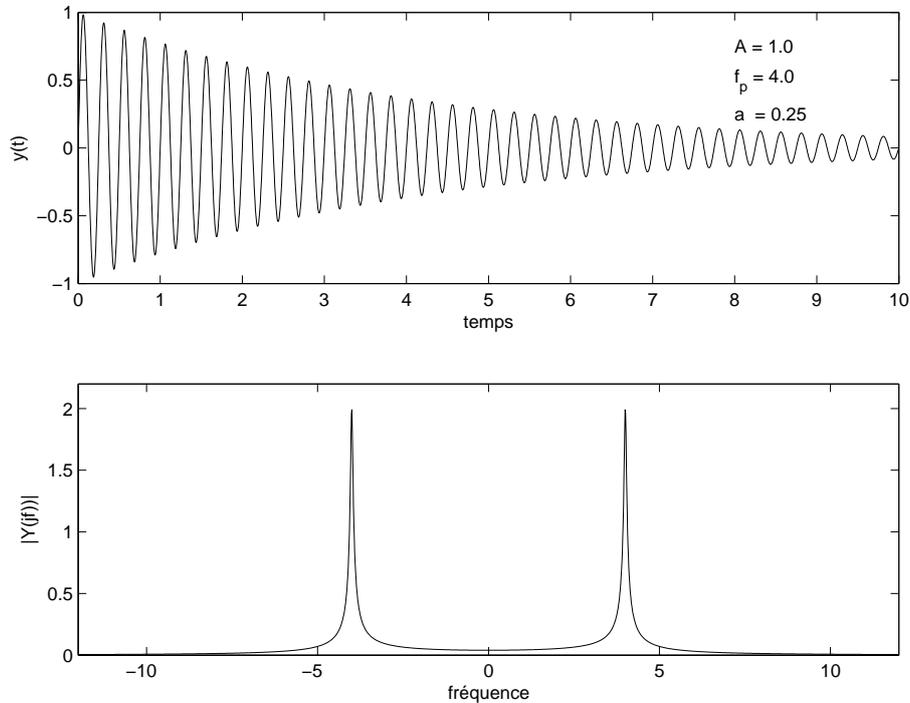


FIGURE 2.4.: Sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude

On remarquera que la densité spectrale d'amplitude $Y(jf)$ est une fonction complexe car la sinusoïde décroissante $y(t)$ ne possède pas de symétrie particulière. La figure 2.4 présente le sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude.

On peut également noter les deux valeurs particulières suivantes

$$\begin{aligned} f = 0 : \quad Y(0) &= A \frac{2\pi f_p}{a^2 + (2\pi f_p)^2} \simeq \frac{A}{2\pi f_p} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p \\ f = f_p : \quad Y(jf_p) &= \frac{A}{a} \frac{2\pi f_p}{a + j4\pi f_p} \simeq \frac{A}{j2a} \quad \text{si } a \ll 2\pi f_p \end{aligned}$$

2.2.3. Spectres de deux impulsions rectangulaires

Considérons un signal constitué de deux impulsions d'amplitude A placées symétriquement en $\pm t_0/2$ (figure 2.5). Ce signal possède un spectre qui se calcule facilement à partir de celui d'une impulsion centrée en $t = 0$ et à l'aide du théorème du décalage.

Comme le signal $z(t)$ est la somme de 2 impulsions décalées de $\pm t_0/2$,

$$z(t) = x(t + t_0/2) + x(t - t_0/2) \quad (2.13)$$

on a :

$$Z(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \left[\exp(+j2\pi f \frac{t_0}{2}) + \exp(-j2\pi f \frac{t_0}{2}) \right]$$

donc

$$Z(jf) = 2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \quad (2.14)$$

De plus, par rapport à ce qui va suivre, il est intéressant de considérer également la densité spectrale d'énergie :

$$S_z(f) \equiv |Z(jf)|^2 = \left[2 A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} \cos(\pi f t_0) \right]^2 \quad (2.15)$$

Les densités spectrales d'amplitude et d'énergie sont représentées à la figure 2.5.

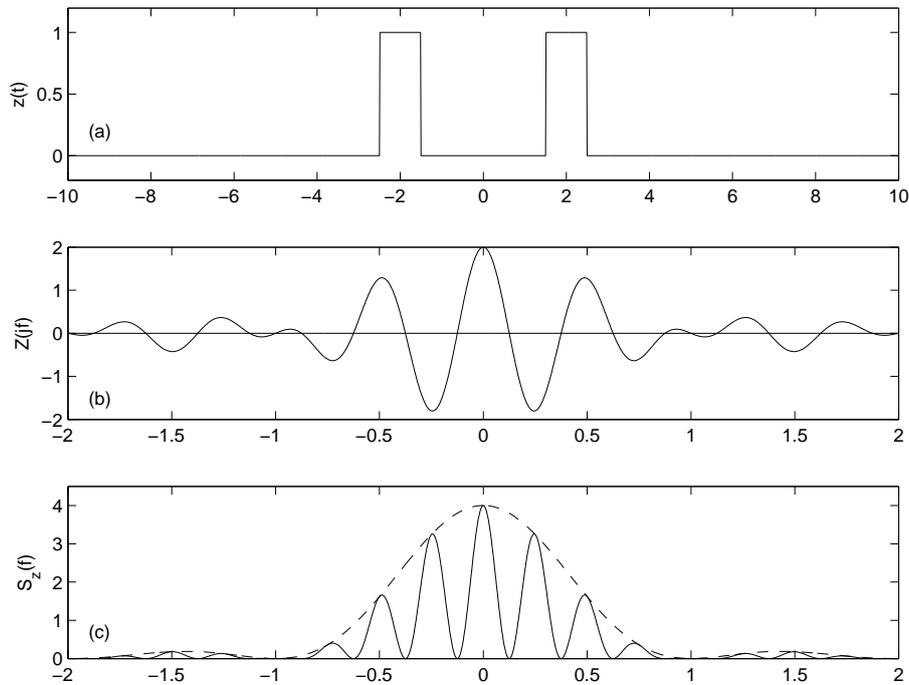


FIGURE 2.5.: Deux impulsions rectangulaires symétriques (a) avec ses densités spectrales d'amplitude (b) et d'énergie (c)

2.3. Calcul de quelques transformées

Afin de mieux saisir les implications de la TF, calculons les transformées de quelques signaux importants en traitement du signal.

2.3.1. Exponentielle décroissante

Dans ce cas, $x(t)$ vaut

$$x(t) = \exp(-at) \epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

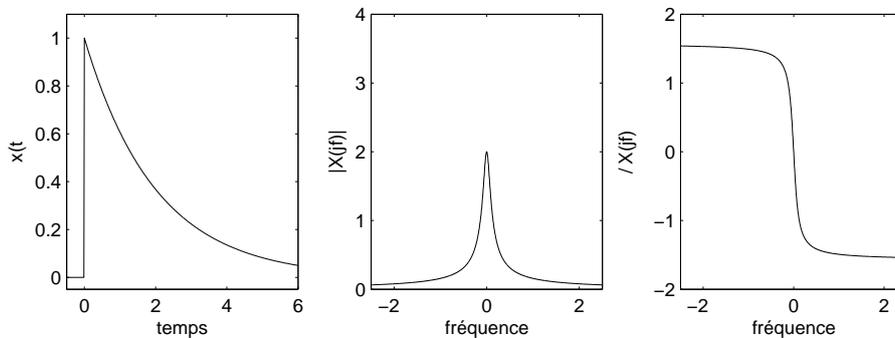


FIGURE 2.6.: Exponentielle décroissante et ses spectres (module et phase)

L'application de la définition de la TF conduit à :

$$X(jf) = \int_0^{+\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi f t) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} \quad (2.17)$$

Pour illustrer le théorème de l'énergie, calculons l'énergie de ce signal dans le domaine temporel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-2at) dt = \frac{1}{2a}$$

et dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2\pi f)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \arctan \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

On retrouve bien entendu le même résultat dans les deux cas.

2.3.2. Exponentielle décroissante symétrique

Ce signal est décrit par :

$$x(t) = \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.18)$$

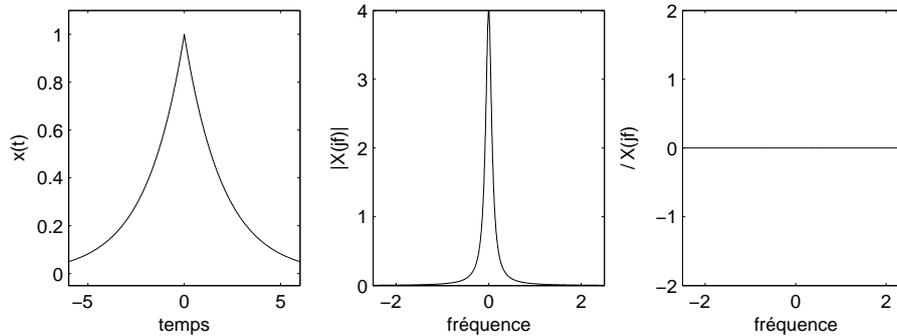


FIGURE 2.7.: Exponentielle symétrique et ses spectres (module et phase)

De manière plus explicite, on peut encore l'écrire sous la forme

$$x(t) = \exp(+at) \epsilon(-t) + \exp(-at) \epsilon(t) \quad (2.19)$$

On a alors :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^0 \exp(+at) \exp(-j2\pi ft) dt + \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-j2\pi ft) dt$$

d'où :

$$X(jf) = \frac{1 - 0}{a - j2\pi f} + \frac{0 - 1}{-(a + j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (2.20)$$

On remarquera que $x(t)$ étant pair, sa transformée est réelle.

2.3.3. Signal constant unité

Le signal constant unité vaut simplement 1 quelque soit $t \in (-\infty, +\infty)$. Au sens des limites, il peut être décrit à partir de l'exponentielle symétrique :

$$x(t) = 1 = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|), \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.21)$$

Ce passage par la limite est nécessaire car le signal constant n'est pas intégrable en valeur absolue et sa transformée de Fourier ne peut donc pas être calculée à partir de sa définition. Par contre, partant de l'exponentielle symétrique, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ \infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Ce résultat coïncide avec la définition d'une impulsion de Dirac. La TF d'un signal unité est donc une impulsion de Dirac située en $f = 0$:

$$X(jf) = \delta(f) \quad (2.22)$$

2.3.4. Saut unité

Le calcul de la TF d'un saut unité $\epsilon(t)$ (figure 2.8) nécessite également quelques précautions, car ce signal n'est pas intégrable en valeur absolue. Mais, constatant que l'on a :

$$1 = \epsilon(t) + \epsilon(-t)$$

et désignant la TF de $\epsilon(t)$ par $E(jf)$, il vient :

$$TF\{1\} = \delta(f) = E(jf) + E^*(jf) = 2 E_r(jf)$$

De ce résultat, on en déduit que la partie réelle $E_r(jf)$ vaut $\delta(f)/2$.

Il reste encore à trouver la partie imaginaire de $E(jf)$. Pour ce faire, on peut remarquer que le saut unité peut également s'écrire sous la forme :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-at) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

dont la transformée (équation 2.17) est purement imaginaire et vaut $1/(j2\pi f)$. On obtient donc finalement :

$$E(jf) = E_r(jf) + j E_i(jf) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (2.24)$$

2.3.5. Phaseur

Pour calculer sa TF, considérons le fait qu'un phaseur de fréquence f_0 peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = \exp(+j2\pi f_0 t) = \lim_{a \rightarrow 0} \exp(-a|t|) \exp(+j2\pi f_0 t) \quad (2.25)$$

Utilisant la TF de l'exponentielle symétrique (équation 2.20) et la propriété de modulation, on a :

$$X(jf) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + (2\pi(f - f_0))^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq f_0 \\ \infty & \text{si } f = f_0 \end{cases}$$

La TF d'un phaseur de fréquence f_0 est donc une impulsion de Dirac située en $f = f_0$:

$$X(jf) = \delta(f - f_0) \quad (2.26)$$

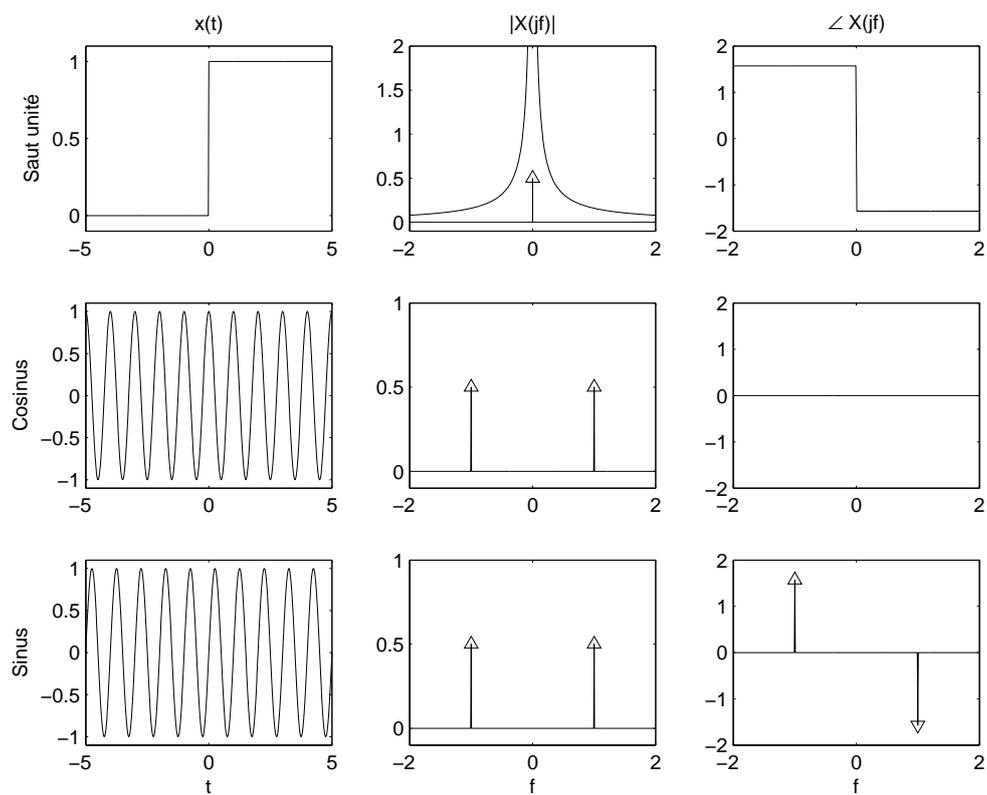


FIGURE 2.8.: Signaux et densités spectrales d'un saut unité, d'un cosinus et d'un sinus

2.3.6. Signal sinusoïdal

Comme un signal sinusoïdal est constitué de 2 phaseurs conjugués complexes (loi d'Euler), sa TF comportera 2 impulsions de Dirac située en $\pm f_0$. Plus précisément, on aura :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \quad (2.27)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} [e^{+j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] \longleftrightarrow X(jf) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} \quad (2.28)$$

La première TF est réelle, car la cosinusoïde est paire, alors que la deuxième TF est imaginaire car la sinusoïde est impaire. On notera que les modules des densités spectrales sont les mêmes et que seuls diffèrent leurs arguments (figure 2.8).

2.3.7. Impulsion sinusoïdale

Parmi les propriétés des transformations de Laplace et Fourier, nous avons vu qu'à un produit de convolution dans le domaine temporel correspond un produit simple dans le domaine complexe :

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (2.29)$$

L'inverse de cette proposition est également vraie et elle est très pratique pour calculer le spectre de signaux modulés en amplitude. Elle s'exprime comme suit. À un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine complexe :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) \quad (2.30)$$

Considérons comme exemple une impulsion sinusoïdale de durée Δt (fig. 2.9c)

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Voyant que ce signal est équivalent à la multiplication d'une sinusoïde permanente (fig. 2.9a) par une impulsion de largeur Δt (fig. 2.9b), on a :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

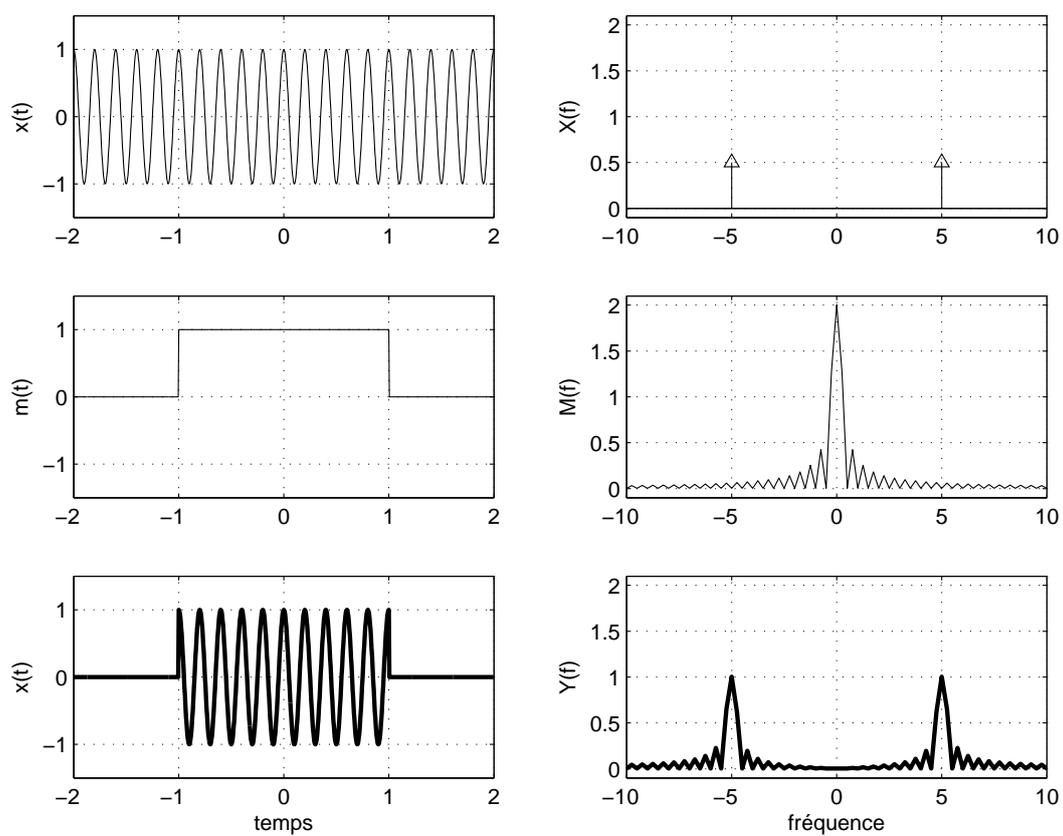


FIGURE 2.9.: Impulsion sinusoïdale et son spectre

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

Sachant que les spectres des signaux $x(t)$ et $m(t)$ valent respectivement

$$X(jf) = \frac{1}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$
$$M(jf) = A \Delta t \operatorname{sinc}(f \Delta t)$$

et que la convolution entre une fonction et une impulsion de Dirac reproduit la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion, on voit que le spectre de l'impulsion sinusoïdale vaut

$$Y(jf) = M(jf) \otimes X(jf) = \frac{A \Delta t}{2} (\operatorname{sinc}((f + f_0) \Delta t) + \operatorname{sinc}((f - f_0) \Delta t))$$

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion sinusoïdale de durée Δt est constitué de deux sinus cardinaux situés en $+f_0$ et $-f_0$ (figure 2.9c).

2.4. Quelques conclusions

2.4.1. TF des signaux périodiques

Du paragraphe précédent, on retiendra que la transformation de Fourier s'applique également à des signaux périodiques, c'est-à-dire à des signaux de puissance moyenne finie. Dans ce cas, les raies spectrales de la série de Fourier sont remplacées par des impulsions de Dirac.

2.4.2. Relations avec la transformation de Laplace

Les définitions des transformées de Fourier et Laplace montrent une forte similitude. On a en effet

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$
$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-s t) dt \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j2\pi f$$

Si on a défini des transformations si proches, mais malgré tout distinctes, c'est que tous les signaux ne sont pas transformables de Fourier et/ou de Laplace. En effet, l'existence de ces transformations entraînent les restrictions suivantes :

- pour la transformation de Fourier, il faut que le signal soit intégrable en valeur absolue et que le nombre de ses discontinuités soit fini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- pour la transformation de Laplace, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-st}| dt < \infty$$

autrement dit, il faut que le signal $x(t)$ pondéré par une exponentielle amortie soit intégrable en valeur absolue.

Des deux points ci-dessus, il découle que les signaux temporaires (à énergie finie) et les signaux permanents périodiques ou non (à puissance finie) possèdent une transformée de Fourier mais pas nécessairement une transformée de Laplace. Ainsi en est-il de l'exponentielle symétrique et, au sens des limites, des signaux périodiques.

Par contre, des signaux démarrant en $t = 0$ tels qu'une rampe $x(t) = a \cdot t \epsilon(t)$, une parabole $x(t) = a \cdot t^2 \epsilon(t)$, ne sont pas transformables de Fourier, alors qu'ils possèdent une transformée de Laplace.

Il existe d'autre part des signaux qui possèdent les deux transformées ; par exemple, les signaux amortis démarrant en $t = 0$. Et d'autres qui n'en possèdent aucune ; par exemple $x(t) = a \cdot t$ pour $-\infty < t < +\infty$.

On trouvera en fin de chapitre une table illustrée des transformées de Fourier tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2].

2.5. Extension de la transformation de Fourier

Le spectre d'énergie des deux impulsions étudiées à la section 2.2.3 montre une grande similitude avec la figure de diffraction de Fraunhofer due à deux fentes étroites (figure 2.10). En réalité, il s'agit bien plus que d'une similitude car on montre en physique que toute figure de diffraction est la transformée de Fourier de l'objet qui en est la cause.

De cette analogie, on déduit que la notion de transformation de Fourier peut être étendue à des espaces à plusieurs dimensions. Cette transformation de Fourier multidimensionnelle est définie de manière similaire à celle que nous avons étudiée jusqu'à présent

$$x(t) \rightarrow X(jf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (2.31)$$

avec f représentant la fréquence des oscillations, c'est-à-dire le nombre de périodes par unité de temps. Cette fréquence est mesurée en [Hz] ou, de manière plus fondamentale, en [1/sec].

Dans le cas particulier d'une image (espace à deux dimensions), on a affaire à une intensité lumineuse i fonction des coordonnées x et y

$$i = i(x, y) \quad (2.32)$$

Sa transformée de Fourier est alors définie comme suit

$$i(x, y) \rightarrow I(jf_x, jf_y) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, y) \exp(-j2\pi f_x x) \exp(-j2\pi f_y y) dx dy \quad (2.33)$$

Ici, les fréquences spatiales f_x et f_y représentent le nombre de périodes par unité de longueur mesurées en [1/m]. Une illustration des spectres spatiaux (ou des figures de diffraction) d'ouvertures circulaire et carrée est donnée à la figure 2.11 ; on y

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

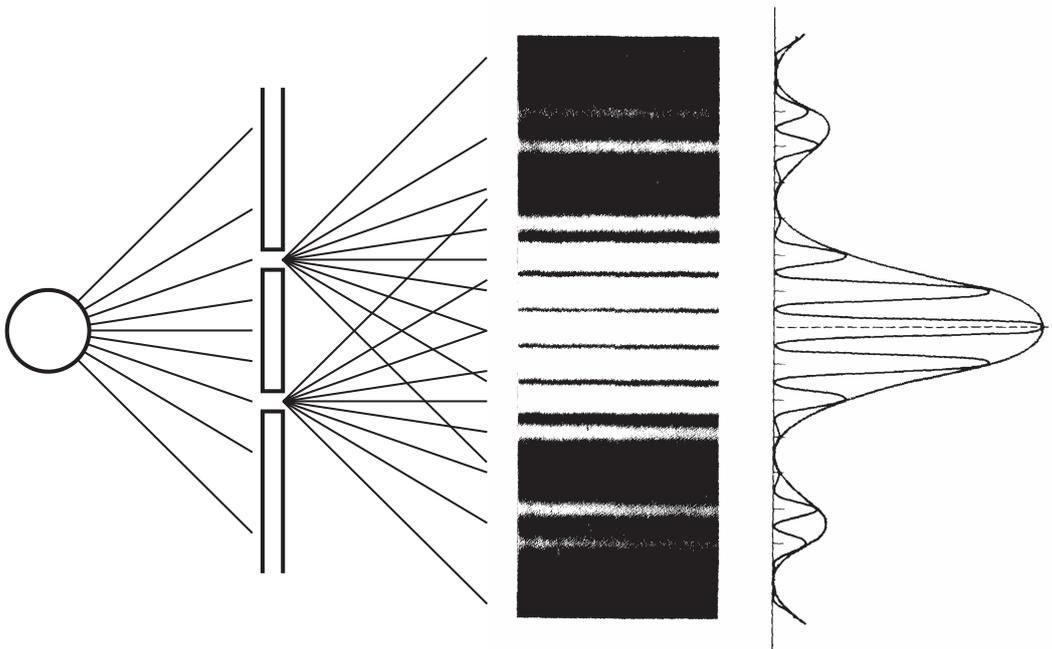
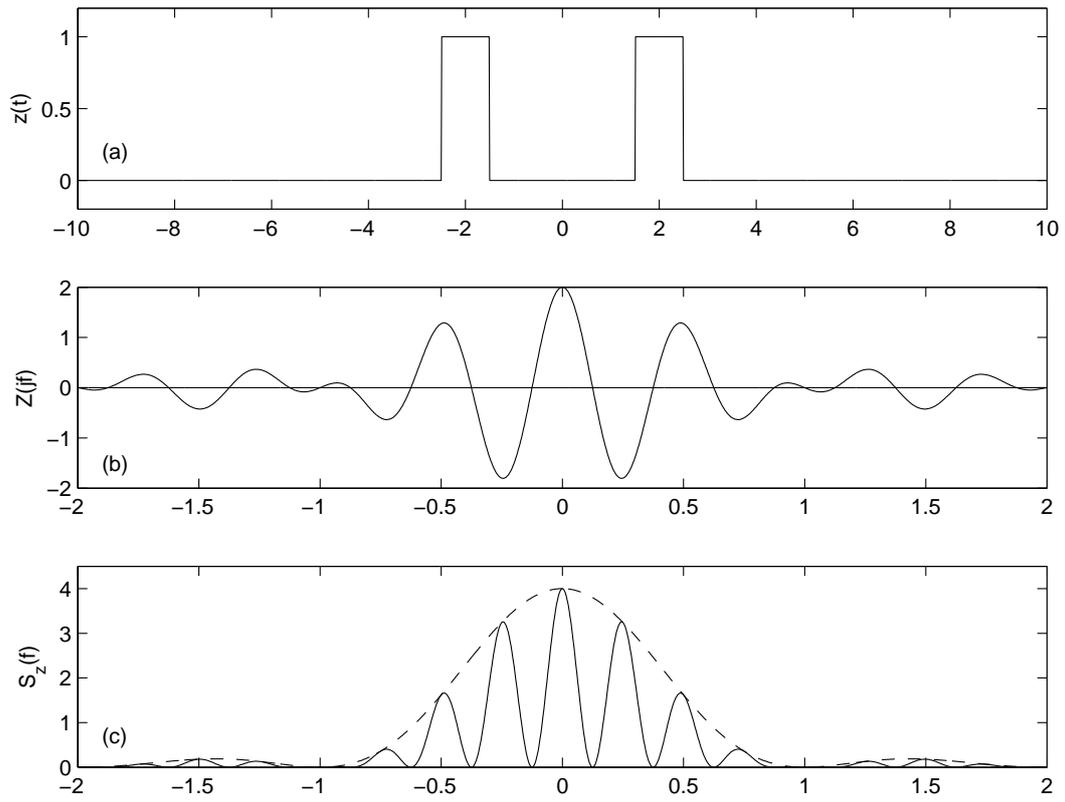


FIGURE 2.10.: a) Deux impulsions rectangulaires et leurs spectres d'amplitudes et d'énergie
b) Figure de diffraction causée par deux ouvertures étroites [3]

2.5. Extension de la transformation de Fourier

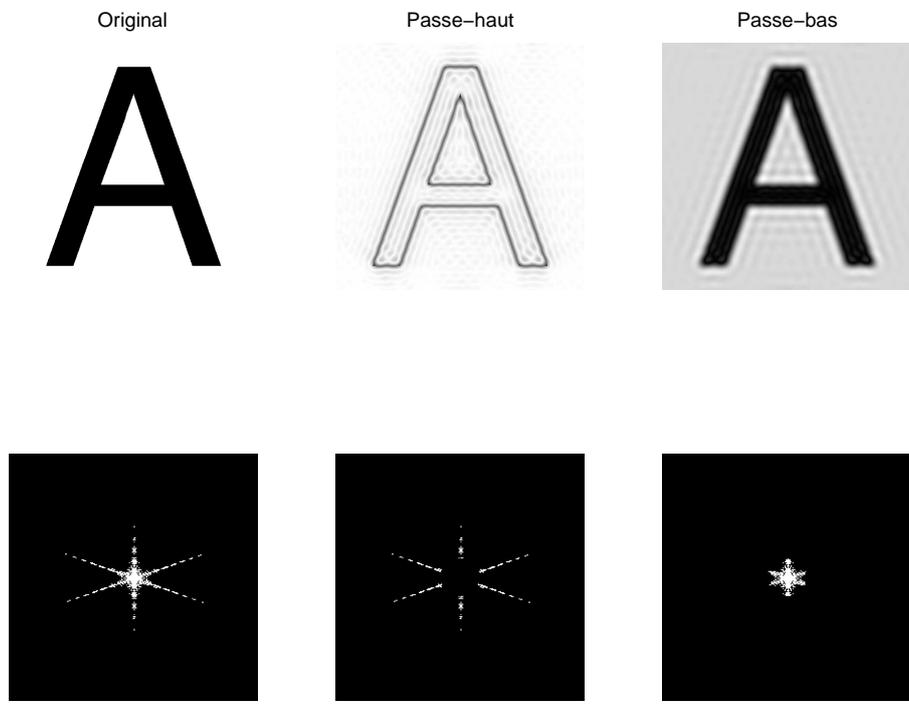
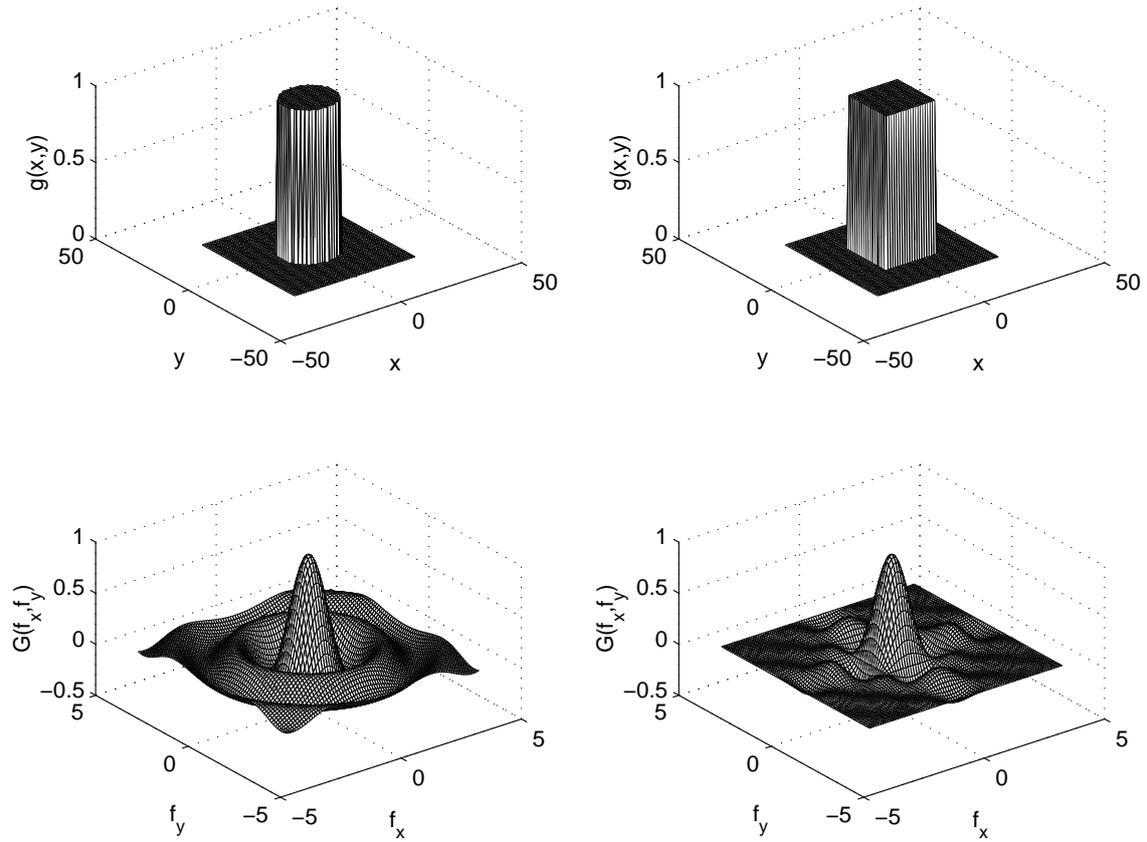


FIGURE 2.11.: a) Transformées de Fourier spatiales d'un rond et d'un carré
 b) Filtrage spatial de la lettre A avec un masque qui ne laisse passer que les hautes ou les basses fréquences

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

reconnait la fonction sinus cardinal distribuée dans l'espace des fréquences spatiales f_x et f_y .

Comme nous venons de le voir, la notion de transformation de Fourier s'applique à des fonctions bidimensionnelles. On imagine donc aisément que les principes de filtrage bien connus en électronique peuvent s'étendre de la même manière à des signaux multidimensionnels. Une illustration en est donnée à la figure 2.11 où l'on voit comment l'application de masques dans le domaine fréquentiel permet d'extraire les bords de l'image (filtrage passe-haut) ou de défocaliser l'image (filtrage passe-bas). On notera qu'un filtrage réalisé avec un masque constitué simplement de 0 ou 1 n'est pas optimum car il entraîne les effets de franges bien visibles sur les images.

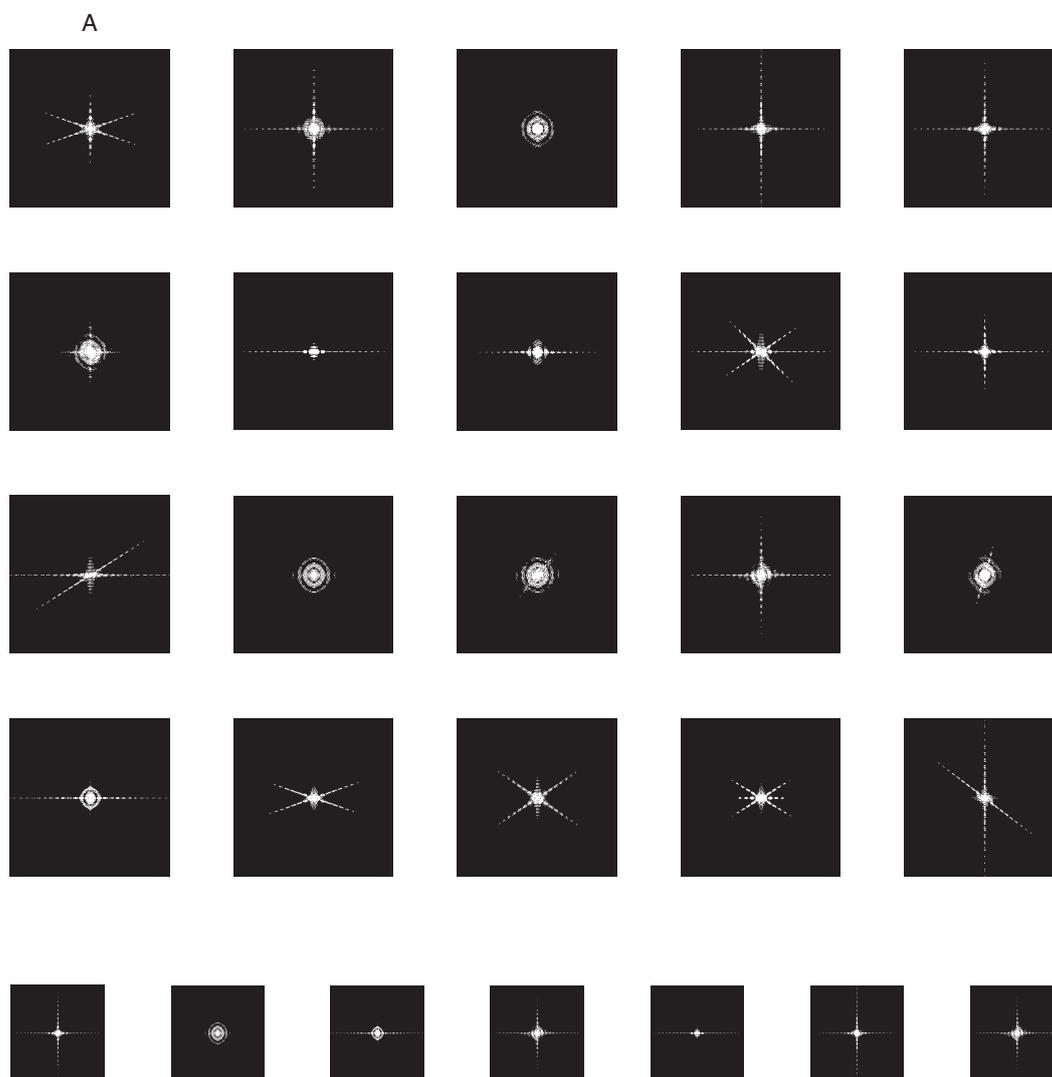


FIGURE 2.12.: Alphabet de Fourier (partiel) avec le mot à découvrir

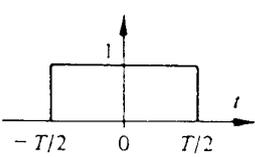
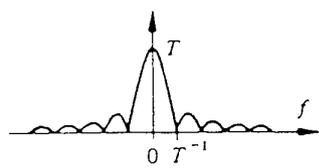
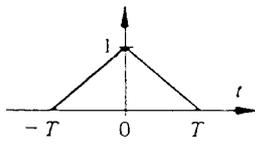
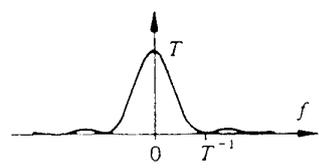
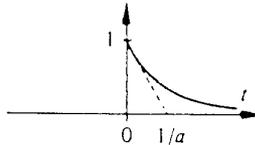
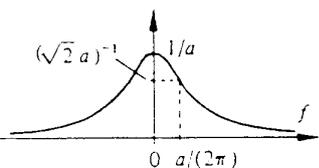
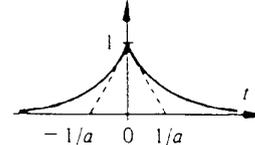
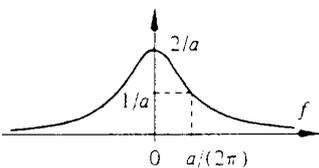
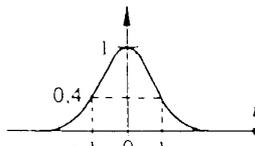
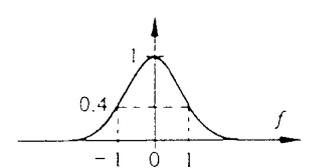
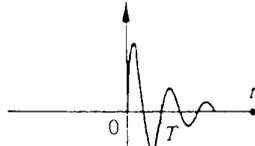
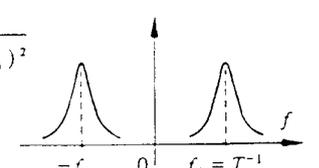
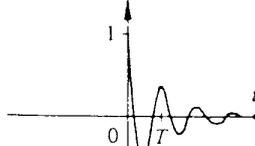
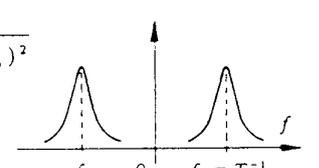
Une expérience amusante consiste à lire un texte dans l'espace de Fourier si, au préalable, on s'est familiarisé avec les spectres bidimensionnels des majuscules de l'alphabet (figure 2.12). Quelques instants d'observation montrent qu'il est possible

2.5. *Extension de la transformation de Fourier*

de reconnaître les lettres de l'alphabet simplement à partir de leur transformée de Fourier spatiale. Dans cette figure, seules vingt images de l'alphabet sont présentées dans l'ordre alphabétique; les lettres manquantes peuvent être retrouvées en essayant de se représenter leur spectre. Après avoir trouvé les lettres manquantes, on peut rechercher le mot écrit avec cet alphabet.

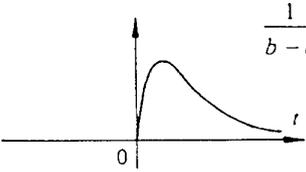
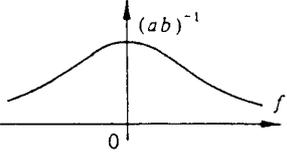
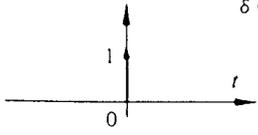
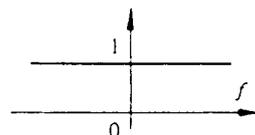
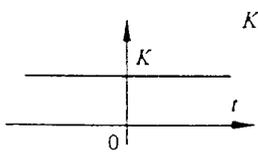
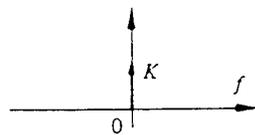
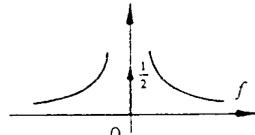
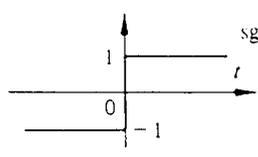
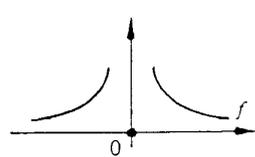
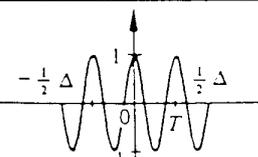
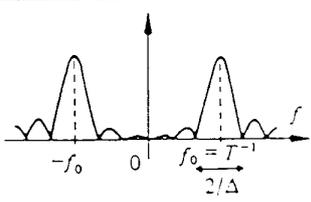
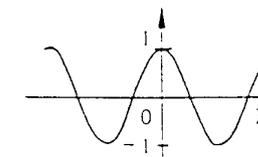
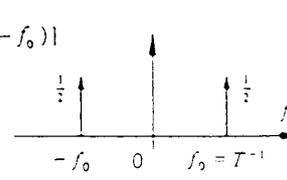
2.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$	$= T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

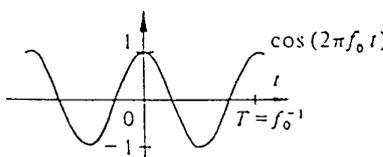
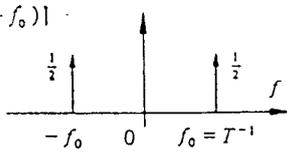
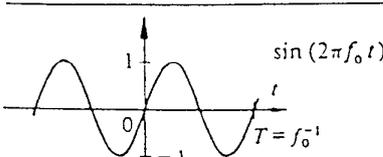
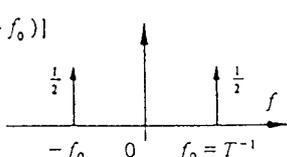
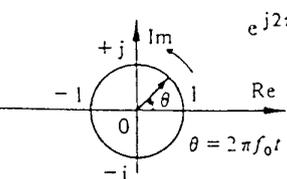
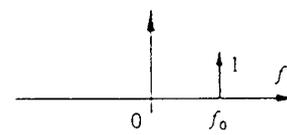
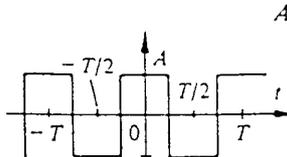
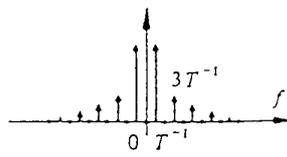
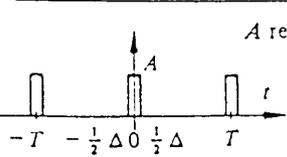
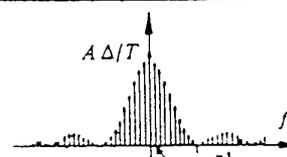
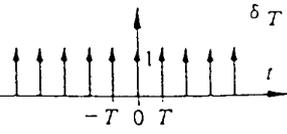
2.6. Table illustrée de quelques transformées de Fourier [2]

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\delta(t)$ <p>impulsion unité (Dirac)</p>	1	
 K <p>constante</p>	$K\delta(f)$	
 $\epsilon(t)$ <p>saut unité</p>	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$ <p>fonction signe</p>	$\frac{1}{j\pi f}$ si $f \neq 0$ 0 si $f = 0$	
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$ <p>impulsion cosinusoidale</p>	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	
 $\cos(2\pi f_0 t)$ <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$	
 <p>$e^{j2\pi f_0 t}$</p>	$\delta(f-f_0)$	
 <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nr}{T}}$	
 <p>onde carrée</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = A \text{sinc}(n/2)$	
 <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T}) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$

2.7. Exercices

TF 1 À partir de la seule observation du signal temporel de la figure 2.13, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ puis calculez et esquissez sa transformée de Fourier.

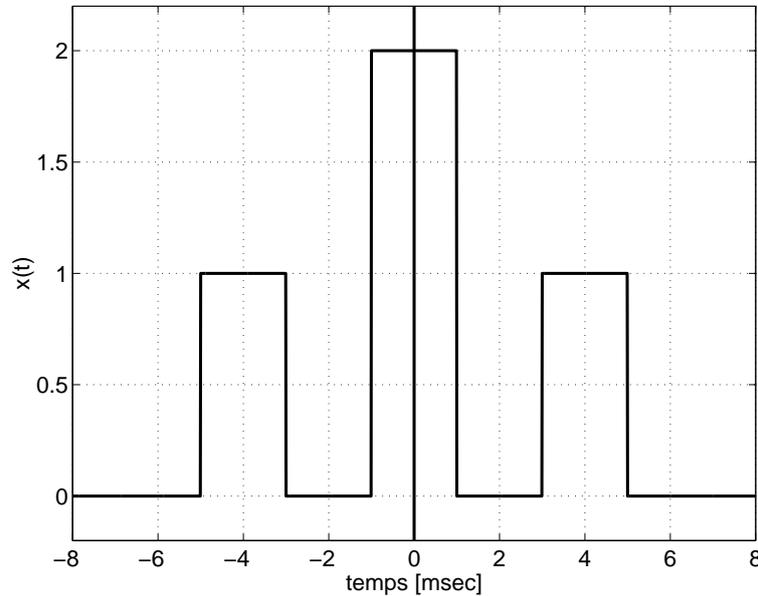


FIGURE 2.13.: Exercice TF1

TF 2 Partant de la TF d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculez les TF de $x(t)$ et $y(t)$ (figure 2.14). Après calculs, vous remarquerez que $Y(jf)$ peut s'écrire sous la forme d'un sinc^2 .

TF 3 Partant de la TF d'une impulsion et d'un saut unité, trouvez celle de $z(t)$ (figure 2.14). Est-il possible de trouver $Z(jf)$ à partir de $Y(jf)$? Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $Z(jf = 0)$ qui doit être égal à $\Delta t/2$.

TF 4 Soit un signal carré périodique symétrique (à valeur moyenne nulle) d'amplitude A . Esquissez

1. le signal $x(t)$;
2. le spectre que l'on obtient avec les séries de Fourier ;
3. le spectre que l'on obtient avec la transformation de Fourier.

TF 5 Considérant le signal $x(t) = \exp(-a|t|)$, calculez et esquissez $x(t)$ et $X(jf)$, puis vérifiez les 2 égalités suivantes :

$$a) \quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt, \quad b) \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$$

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

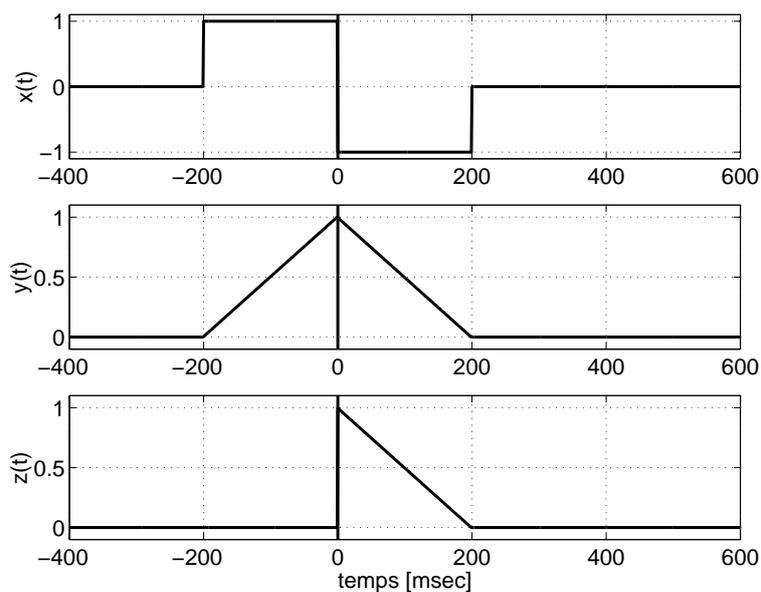


FIGURE 2.14.: Exercices TF2 et TF3

TF 6

	fréquence	temps
1	la partie réelle de $X(jf)$ est nulle	
2	la partie imaginaire de $X(jf)$ est nulle	
3	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est réel	
4	il existe un décalage t_0 tel que $\exp(j2\pi ft_0)X(jf)$ est imaginaire	
5	$X(jf)$ est continu	

1. Considérant les cinq propriétés fréquentielles du tableau ci-dessus, exprimez leur équivalent temporel dans la colonne de droite.
2. Pour chacun des signaux temporels de la figure 2.15, quelles sont les propriétés du tableau qui s'y appliquent ?

3. Construisez un signal qui ne possède aucune des cinq propriétés mentionnées dans le tableau.

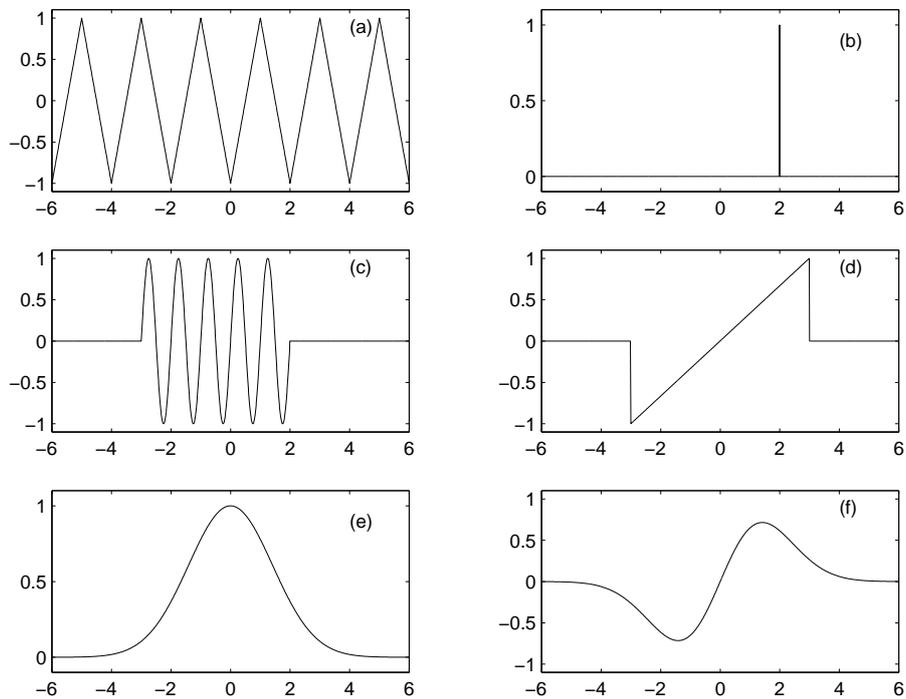


FIGURE 2.15.: Exercice TF6

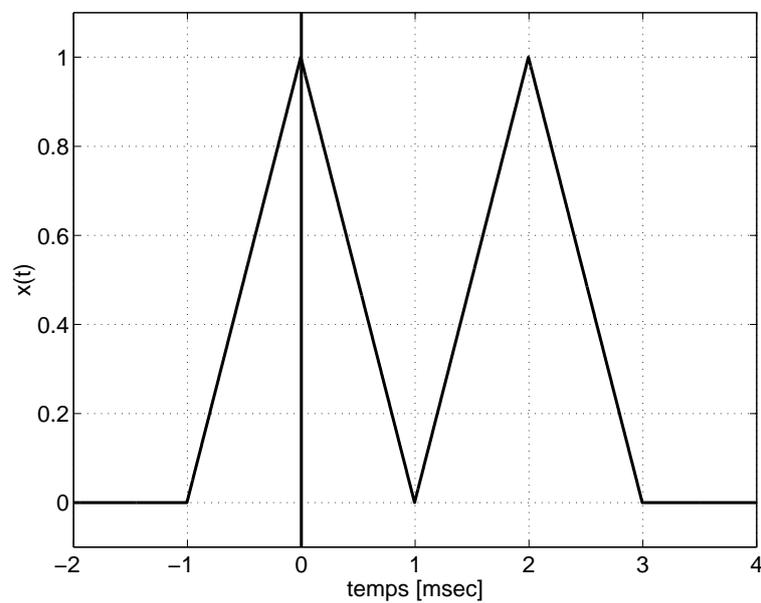


FIGURE 2.16.: Exercice TF7

TF 7 Soit $X(jf)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$ de la figure 2.16. Sans calculer explicitement $X(jf)$, recherchez :

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

1. la densité spectrale de phase de $X(jf)$;
2. la valeur de $X(f = 0)$;
3. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} X(jf)df$;
4. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df$.

TF 8 Connaissant la TF d'une sinusoïde amortie démarrant en $t = 0$

$$X(jf) = \frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$$

1. calculez la TF d'une sinusoïde non amortie démarrant à l'instant $t = 0$;
2. esquissez les modules des spectres $X(jf)$, $Y(jf)$ et celui d'une sinusoïde permanente;
3. discutez les différences existant entre ces trois spectres.

TF 9 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \epsilon(t)$, d'amortissement

$a = 100$ [1/sec] à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1$ [msec];

1. calculez la TF $U_2(jf)$ de la tension de sortie $u_2(t)$ du filtre;
2. utilisez le tableau des transformées pour déduire l'expression temporelle de $u_2(t)$.

TF 10 Soit un message $m(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2\pi f_0 t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_1 t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(jf)|$ si $f_1 = 10$ [kHz] et $f_0 = 800$ [kHz];
3. idem 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(jf)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz].

TF 11 Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $|U(jf)|$ pour $U_0 = 1$ [V], $T = 1/f_0 = 1$ [msec], $t_0 = 10$ [msec].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

TF 12 Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi f_0 t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(jf)$;
3. esquissez $U(jf)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée;
4. observez les différences.

TF 13 Connaissant la transformée $E(jf)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(jf)$ de la fonction signe $s(t)$.

TF 14 Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(jf) = X(jf) \cdot H(jf) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(jf)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(jf)\exp(+j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(jf)X(jf)\exp(+j2\pi ft)df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\exp(-j2\pi f\theta)d\theta$$

TF 15 Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(jf)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(jf)$; ce filtre est-il réalisable? pourquoi?

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

TF 16 Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $U(jf)$;
2. calculez puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut son énergie ?

TF 17 Utilisez la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

TF 18 On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

TF 19 On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \exp(-a|t|)$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

TF 20 On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$; esquissez leur module ;
2. en admettant $U_0 = 10 \text{ [V]}$ et $a = 1000 \text{ [1/sec]}$, calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :
(a) $f_c = 1 \text{ [kHz]}$; (b) $f_c = \frac{a}{2\pi}$.

TF 21 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1 [msec]$ un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(jf) = \begin{cases} 1 [V/Hz] & \text{si } 100 [Hz] \leq |f| \leq 300 [Hz] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(jf)$ du filtre; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(jf)$, $H(jf)$ et $U_2(jf)$ pour $-500 [Hz] < f < +500 [Hz]$;
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

TF 22 On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = RC = 10 [msec]$ une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \exp(-at)\epsilon(t)$ avec $a = 1000 [1/sec]$.

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

TF 23 On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(jf) = \frac{D_0 \frac{jf}{f_0}}{1 + D_0 \frac{jf}{f_0} + \left(\frac{jf}{f_0}\right)^2} \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1 [kHz] \quad D_0 \equiv \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 D_0$$

TF 24 Considérant le spectre $X(jf)$ de la figure 2.17 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface $1/2$, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

1. Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- a) esquissez la fonction à intégrer;
- b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie;
- c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

2. ANALYSE DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES

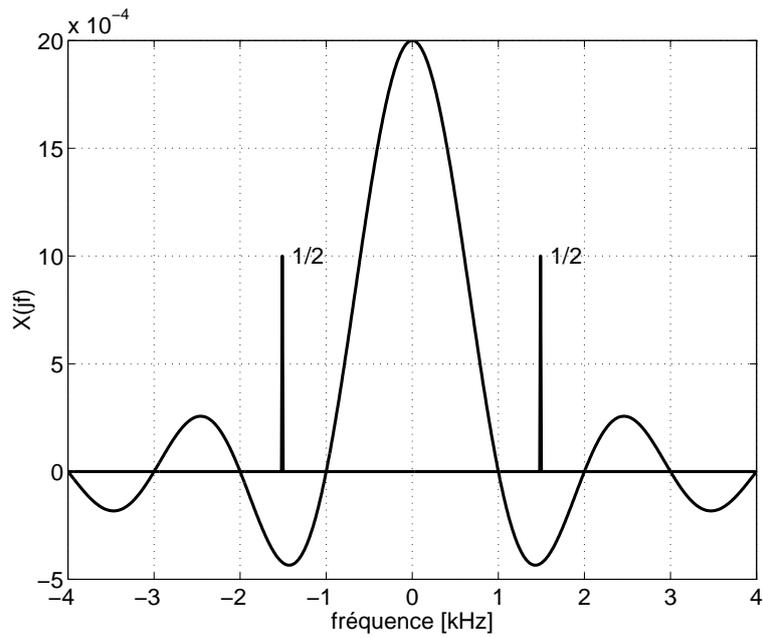


FIGURE 2.17.: Exercice TF24

TF 25 A partir du signal $x(t) = \exp(-at)\epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970

3. Éléments d'analyse spectrale numérique

3.1. Passage de la TF à la TFD

L'échantillonnage des signaux analogiques est étudié en détail par ailleurs. Pour ce qui suit, il suffit de savoir que tout signal analogique $x(t)$ est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage T_e et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux $x[n]$ sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 3.1) et tels que

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_e} \tag{3.1}$$

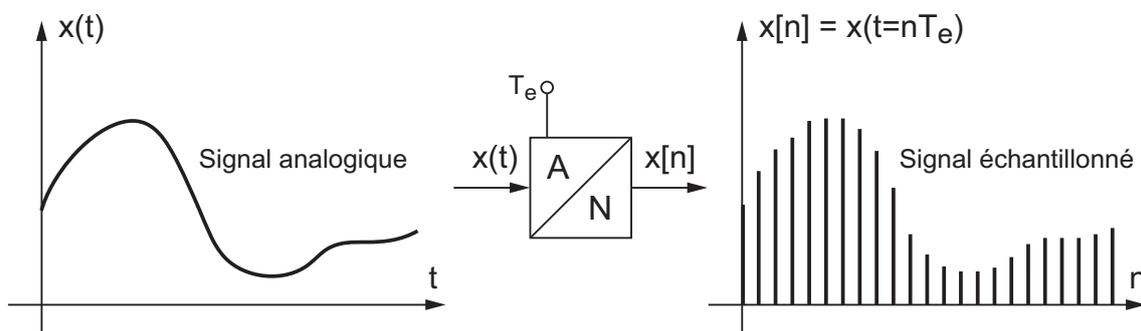


FIGURE 3.1.: Acquisition numérique d'un signal analogique

Le passage de la transformation de Fourier (TF) des signaux analogiques $x(t)$ à la transformation de Fourier discrète (TFD) des signaux numérisés $x[n]$ fait intervenir trois opérations :

- l'échantillonnage du signal analogique ;
- la limitation de la durée de l'enregistrement de ce signal ;
- la discrétisation de la fréquence pour l'analyse spectrale numérique.

Ces trois opérations, apparemment anodines, ont des conséquences dont il est important d'évaluer l'étendue. Pour mémoire, on rappelle trois propriétés de la transformation de Fourier dont on aura besoin par la suite :

- au produit simple dans un espace correspond un produit de convolution dans l'autre

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow X(jf) \otimes Y(jf) \tag{3.2}$$

$$x(t) \otimes y(t) \longleftrightarrow X(jf) \cdot Y(jf) \tag{3.3}$$

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

– la TF d'un peigne d'impulsions de Dirac est également un peigne de Dirac

$$\delta_{T_e}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (3.4)$$

– la TF d'une impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt est un sinus cardinal

$$A \text{rect}(t/\Delta t) \longleftrightarrow A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{sinc}(f \Delta t) \quad (3.5)$$

Afin de concrétiser au mieux les relations existant entre les espaces temps et fréquence, on considérera par la suite que les signaux étudiés sont fournis sous la forme d'une tension électrique que l'on échantillonne régulièrement pendant une durée finie avant de calculer numériquement son contenu spectral. Ainsi, pour chaque équation, on pourra préciser les unités des résultats obtenus.

3.1.1. Signaux continus non-périodiques (\Rightarrow TF)

Un signal analogique $x(t)$ et sa densité spectrale $X(jf)$ sont reliés entre eux par les relations

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V sec}] \quad (3.6)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi ft) df \quad [\text{V}] \quad (3.7)$$

Ces transformations directe et inverse montrent à l'évidence, la parfaite symétrie qui relie les espaces temps et fréquence (figure 3.2.a). À cette symétrie correspond la propriété suivante :

à un signal temporel continu non périodique correspond un spectre continu non périodique.

3.1.2. Signaux discrets de durée infinie (\Rightarrow TFi)

On considère ici que le signal continu $x(t)$ (figure 3.2.a) est échantillonné tous les multiples de la période d'échantillonnage T_e . Cette opération d'échantillonnage peut être représentée mathématiquement par la multiplication du signal $x(t)$ avec un peigne d'impulsions de Dirac distantes de T_e (figure 3.2.b)

$$x(t = nT_e) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (3.8)$$

On obtient ainsi une suite d'impulsions de Dirac pondérées par les valeurs $x(t = nT_e)$ (figure 3.2.c) ; celles-ci représentent alors le signal discret $x[n] = x(t = nT_e)$.

Dans l'espace fréquentiel, le peigne de Dirac temporel $\delta_{T_e}(t)$ devient un peigne de Dirac périodique f_e (figure 3.2.b)

$$\Delta(f) \equiv TF\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (3.9)$$

3.1. Passage de la TF à la TFD

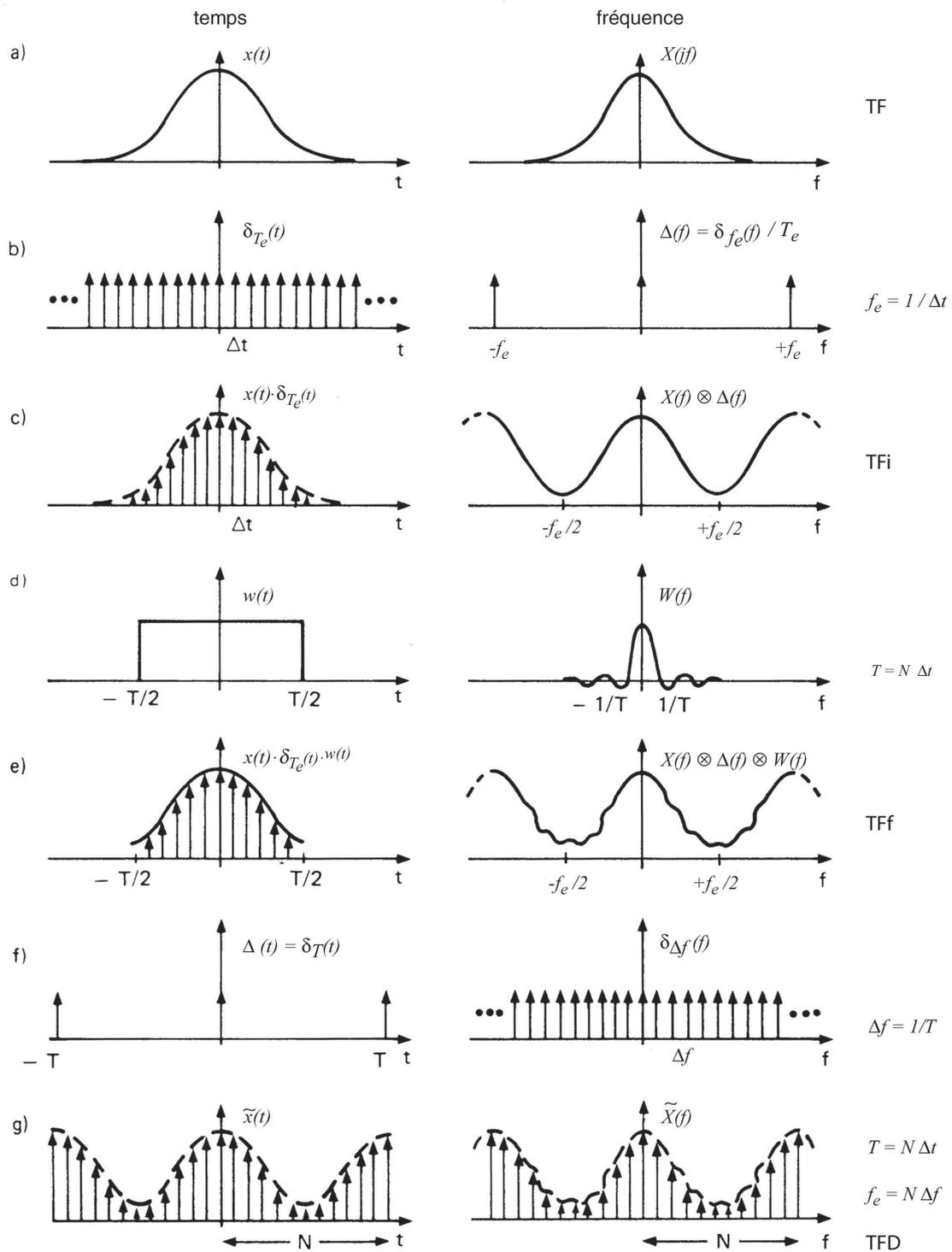


FIGURE 3.2.: Passage de la TF à la TFD [1]

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Comme le produit simple dans l'espace temps conduit à un produit de convolution entre les spectres $X(jf)$ et $\Delta(f)$ (figure 3.2.c), on constate que :

à un signal échantillonné ou discret correspond un spectre continu et périodique f_e .

Le calcul du spectre $X_e(jf)$ d'un signal discret $x[n]$ se fait à partir de la définition de la transformation de Fourier des signaux continus (équation 3.6). On obtient alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (3.10)$$

Partant de ce spectre $X_e(jf)$, on peut bien entendu revenir au signal temporel $x[n]$:

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad -\infty < n < +\infty \quad (3.11)$$

3.1.3. Signaux discrets de durée finie (\Rightarrow TFF)

Dans le cas où l'on désire traiter numériquement un signal, le nombre de valeurs $x[n]$ ne peut pas être infiniment grand. On est donc contraint à ne prendre en compte qu'une partie du signal original. Mathématiquement, cette opération de troncation revient à multiplier le signal $x(t)$ par une fenêtre rectangulaire $w(t)$ de largeur T (figure 3.2.d).

À cette multiplication dans l'espace temps correspond un produit de convolution dans l'espace des fréquences entre le spectre du signal $X(jf)$ et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre $w(t)$. Il en résulte une déformation du spectre original causée par les ondulations du sinus cardinal (figure 3.2.e).

Le signal $x(t)$ est enregistré pendant une durée finie T en échantillonnant N valeurs du signal $x(t)$. On a donc $T = N \cdot T_e$. La suite de valeurs discrètes $x_N[n]$ ainsi obtenue sera énumérée avec le compteur temporel n compris entre 0 et $N - 1$ et le spectre du signal tronqué se calcule alors comme suit

$$X_{e,N}(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}]$$

Il est bien clair que les N valeurs temporelles peuvent s'obtenir par transformation inverse de $X_{e,N}(jf)$

$$x_N[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_{e,N}(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Remarque Par la suite, aucune distinction ne sera faite entre $x_N[n]$ et $x[n]$ d'une part, et $X_{e,N}(jf)$ et $X_e(jf)$ d'autre part, car le contexte permettra toujours de

savoir si la longueur N de la suite considérée est finie ou non ; les 2 relations ci-dessus s'écriront alors

$$X_e(jf) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi fnT_e) \quad [\text{V sec}] \quad (3.12)$$

$$x[n] = \int_{-f_e/2}^{+f_e/2} X_e(jf) \exp(+j2\pi fnT_e) df \quad [\text{V}] \quad (3.13)$$

3.1.4. Discrétisation de la fréquence (\Rightarrow TFD)

Afin de pouvoir calculer numériquement un spectre, il est évidemment nécessaire de discrétiser la fréquence. En divisant le domaine fréquentiel en N intervalles, l'incrément fréquentiel vaut $\Delta f = f_e/N$ et les fréquences analysées, au nombre de N , sont :

$$f = k \cdot \Delta f = k \cdot f_e/N \quad (3.14)$$

Cette discrétisation de la fréquence n'est rien d'autre qu'un échantillonnage dans le domaine spectral et les résultats des opérations d'échantillonnage et de multiplication vues plus haut pour l'espace temps s'appliquent également dans l'espace des fréquences (figure 3.2.f et 3.2.g) et conduisent à la propriété suivante :

à la discrétisation du domaine spectral correspond un signal temporel périodique.

Tout se passe comme si la durée d'acquisition T correspondait à une période du signal temporel $x[n]$. Le spectre considéré à présent est donc un spectre discret que l'on écrit $X[jk]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$. Tenant compte des relations temps-fréquence, l'argument du phaseur s'écrit

$$\pm j2\pi f nT_e = \pm j2\pi k \Delta f nT_e = \pm j2\pi k \frac{f_e}{N} nT_e = \pm j2\pi \frac{kn}{N} \quad (3.15)$$

Le spectre $X[jk]$ et le signal temporel $x[n]$ se calculent alors comme suit

$$X[jk] = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V sec}] \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (3.16)$$

$$x[n] = \frac{1}{NT_e} \sum_{k=0}^{N-1} X[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (3.17)$$

3.2. Relations temps-fréquence

Comme les domaines temporel et fréquentiel sont discrétisés avec le même nombre de points N , on peut relever que

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

1. l'**espace du temps** est caractérisé par la durée de l'enregistrement T et par l'incrément temporel Δt (qui n'est autre que la période d'échantillonnage T_e) tel que

$$\Delta t \equiv T_e = \frac{T}{N} \quad (3.18)$$

2. l'**espace des fréquences** est caractérisé par l'incrément fréquentiel Δf et la fréquence maximum f_{max} qui n'est autre que la fréquence d'échantillonnage f_e

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{f_e}{N} \quad (3.19)$$

Ces deux relations ayant en commun la période d'échantillonnage T_e et son inverse la fréquence d'échantillonnage, on a

$$\Delta t \equiv T_e \equiv \frac{1}{f_e} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta f} \quad (3.20)$$

On en déduit donc trois relations importantes liant les domaines temporel et fréquentiel

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (3.21)$$

$$f_{max} \equiv f_e = \frac{1}{\Delta t} \equiv \frac{1}{T_e} \quad (3.22)$$

$$\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (3.23)$$

De plus, comme le spectre d'un signal échantillonné est périodique f_e , on définit la fréquence de Nyquist f_N comme étant la limite du domaine d'analyse spectrale

$$f_N = \frac{f_e}{2} \quad (3.24)$$

Les relations que nous venons de voir peuvent se traduire par les propriétés suivantes.

1. *L'incrément fréquentiel Δf est l'inverse de la durée temporelle T .*
2. *La période spectrale $f_{max} = f_e$ est l'inverse de l'incrément temporel Δt .*
3. *Le domaine d'analyse spectrale se limite au domaine de Nyquist compris entre $\pm f_e/2 \equiv \pm f_N$.*
4. *Pour un nombre donné de points N , il n'est pas possible d'avoir simultanément une très bonne définition temporelle (Δt petit) et une très bonne définition fréquentielle (Δf petit).*

Une illustration des relations existant entre les domaines temporel et fréquentiel est donnée dans la figure 3.3.

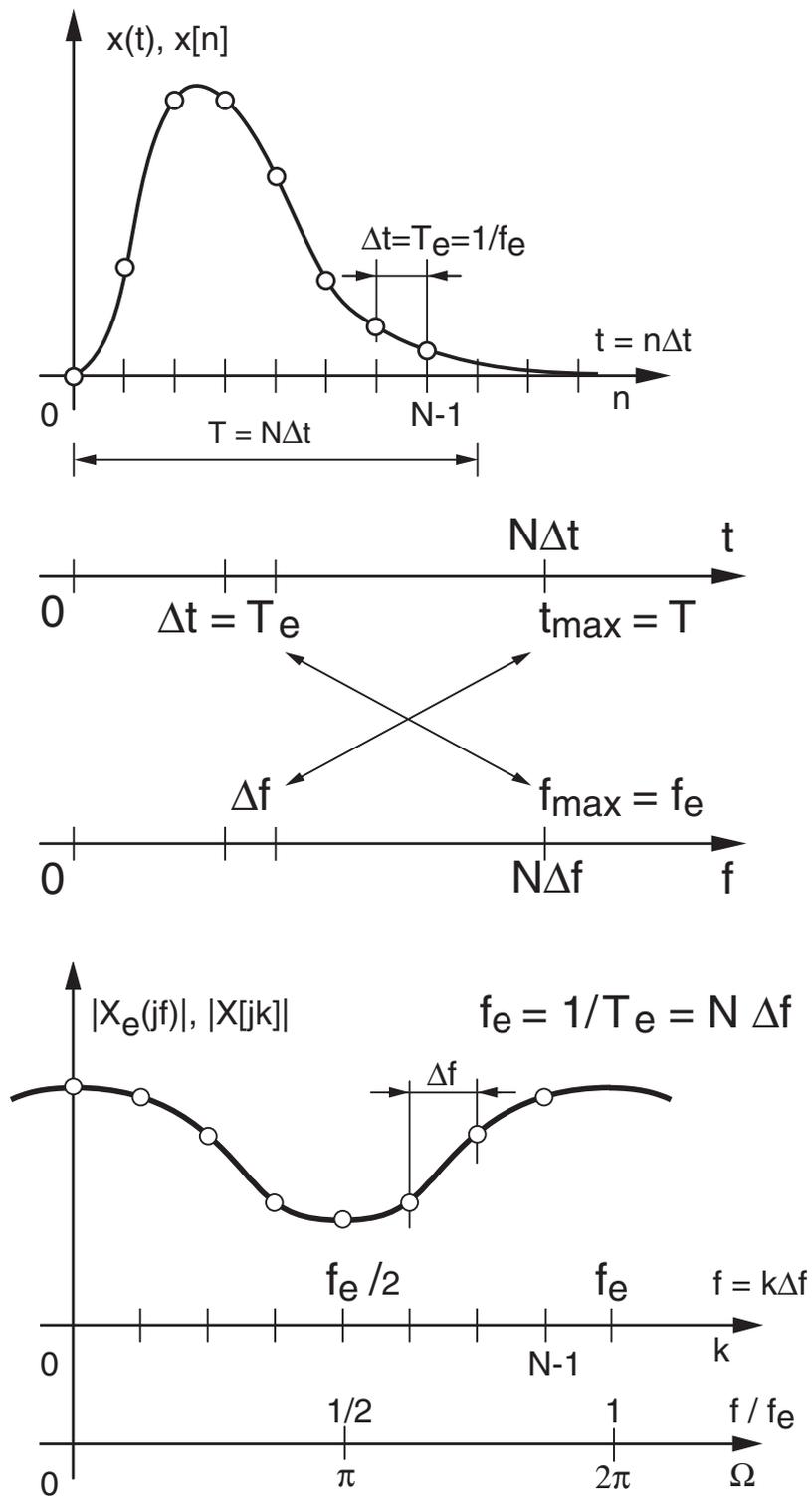


FIGURE 3.3.: Relations temps – fréquence

3.2.1. Analyse spectrale avec Matlab

Dans la section suivante, on précisera ce qu'est la transformation de Fourier discrète ou FFT (Fast Fourier Transform). Mais par rapport à ce que nous venons de voir, il vaut la peine de montrer ici combien l'analyse spectrale d'un signal $x(t)$ est simple à faire. Dans Matlab, elle se réduit aux cinq lignes du programme ci-dessous consacrées au domaine fréquentiel. Le résultat graphique en est présenté à la figure 3.4.

```
% domaine temporel
Te = 0.1e-3;
tmin = -10e-3; tmax = 10e-3;
tn = tmin:Te:tmax - Te;
T0 = 2e-3;
xn = 5*cos(2*pi*tn/T0 + pi/3) + 2*sin(6*pi*tn/T0 - pi/4);

% domaine fréquentiel
fe = 1/Te;
duree = tmax - tmin;
df = 1/duree;
ff = 0:df:fe-df;
Xjf = fft(xn) / length(xn);

% graphes
subplot(2,1,1);
plot(tn,xn);
xlabel('temps [sec]'); ylabel('x(t)');
subplot(2,1,2);
stem(ff, abs(Xjf));
xlabel('fréquence [Hz]'); ylabel('|X(jf)|');
```

3.2.2. Pulsation normalisée

Dans ce qui précède, on a constamment vu apparaître un phaseur faisant intervenir l'argument $\pm j2\pi n f T_e$:

$$\exp(\pm j2\pi n f T_e)$$

Il est donc naturel de chercher à alléger l'écriture en définissant la pulsation numérique ou normalisée Ω qui s'exprime en radians (figure 3.3) :

$$\Omega \equiv 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e} \text{ [rad]} \quad (3.25)$$

Comme le spectre de base est compris entre $\pm f_e/2$, on voit que la pulsation normalisée prendra ses valeurs entre $\pm\pi$ et que les transformations de Fourier s'écrivent :

$$X_e(j\Omega) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad [\text{V sec}] \quad (3.26)$$

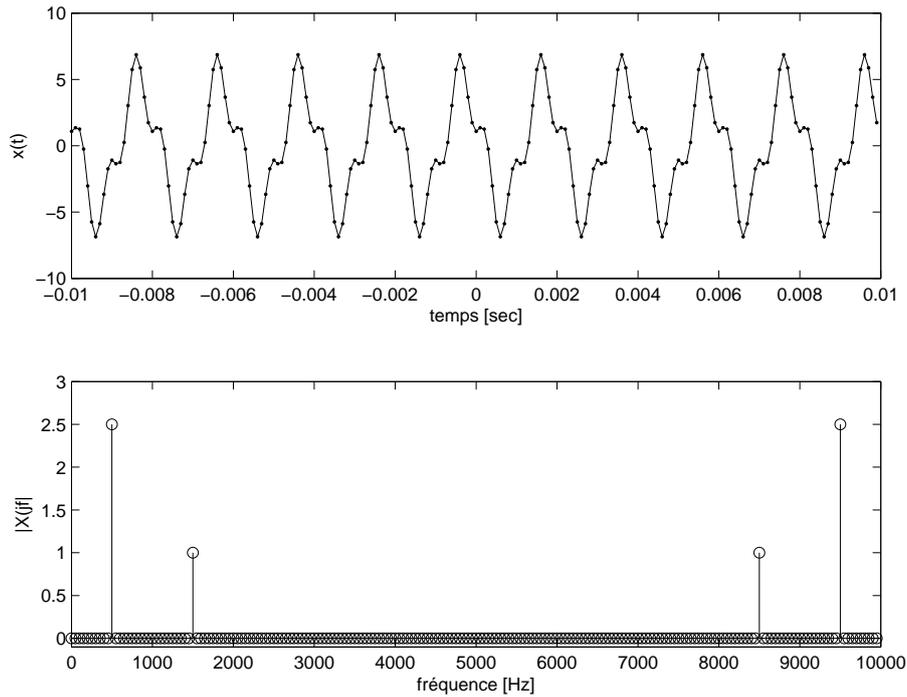


FIGURE 3.4.: Résultats d'une analyse spectrale simple

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X_e(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad [\text{V}] \quad (3.27)$$

3.3. Transformation de Fourier discrète

3.3.1. Définition de la TFD

En observant les relations (3.16) et (3.17), on constate que, mis à part le changement de signe du phaseur et les coefficients précédant la somme, les calculs du spectre $X[jk]$ ou du signal $x[n]$ se font de la même manière. Ceci conduit à définir les algorithmes des transformations de Fourier discrètes directe ou inverse comme suit :

$$X_D[jk] \equiv \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.28)$$

$$x_D[n] \equiv \sum_{k=0}^{N-1} X_D[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kn}{N}\right) \quad [\text{V}] \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.29)$$

Comme ces deux définitions ne diffèrent que par le signe de l'exponentielle qui pondère les signaux $x[n]$ et $X_D[jk]$, on voit qu'un même algorithme peut être utilisé pour les transformations de Fourier directe et inverse. Alors les résultats de la TFD ainsi définie sont reliés aux spectres et signaux réels par les relations suivantes :

$$X[jk] = T_e \cdot X_D[jk] \quad (3.30)$$

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

$$x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (3.31)$$

La figure 3.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique où l'on a, d'un côté, des signaux et des spectres continus alors que de l'autre, on n'a que des valeurs numériques stockées en RAM.

3.3.2. TFD d'un signal périodique

Nous avons vu que le passage de la TF à la TFD peut modifier de manière sensible les résultats de l'analyse spectrale à cause de la troncation. Par contre, si le signal temporel $x(t)$ est périodique, on peut se trouver dans la situation idéale où les raies spectrales du signal $x_T(t)$ sont en parfaite coïncidence avec les raies analysées par la TFD. Pour remplir cette condition, il suffit d'enregistrer très exactement une ou plusieurs périodes du signal temporel.

En comparant les définitions de la décomposition en série de Fourier :

$$X_{SF}[jk] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t) \exp\left(-\frac{j2\pi kt}{T}\right) dt \quad [V] \quad (3.32)$$

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{SF}[jk] \exp\left(+\frac{j2\pi kt}{T}\right) \quad [V] \quad (3.33)$$

avec celles de la TFD (équations 3.28 et 3.29), on voit alors apparaître les relations suivantes :

$$X_{SF}[jk] = \frac{X_D[jk]}{N} \quad (3.34)$$

$$x_T(t = nT_e) = \frac{x_D[n]}{N} \quad (3.35)$$

3.3.3. TFD et FFT

La découverte de la transformation rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey [3] a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier et il est généralement désigné par son appellation anglo-saxonne : FFT (Fast Fourier Transform).

Il est aisé de voir que le nombre d'opérations arithmétiques (sommations et produits) nécessitées par la TFD d'une suite de longueur N est proportionnel à N^2 . Ce qui, pour une suite de longueur 1000, conduit à calculer 1'000'000 de sinus et cosinus suivis d'une addition et d'une multiplication ; les temps de calcul deviennent très vite prohibitifs..

3.4. Relations entre les domaines analogique et numérique

L'algorithme de la FFT utilise le fait que l'opération de la TFD globale peut être décomposée en la TFD de séquences de plus en plus courtes. Il en découle alors que le nombre total d'opérations est bien inférieur à celui imposé par la simple application de l'algorithme de la TFD. En contrepartie, le nombre de points analysés N doit être une puissance de 2. Le nombre d'opérations demandées par le nouvel algorithme est alors fortement diminué et il vaut

$$N_{op} \simeq N \log_2(N) \quad (3.36)$$

Ainsi, pour transformer 1024 points, le nouvel algorithme demande environ cent fois moins de temps que la TFD :

$$\frac{N^2}{N_{op}} = \frac{N}{\log_2(N)} = \frac{1024}{10} = 102.4$$

Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD. Différents algorithmes de FFT sont présentés dans le livre de Burrus et Parks [4].

3.4. Relations entre les domaines analogique et numérique

En conclusion et en résumé de ce que nous venons de voir dans le détail, la figure 3.5 illustre le passage du domaine analogique au domaine numérique. L'interface entre les domaines analogique et numérique est réalisée par un échantillonneur qui acquiert les signaux à un rythme fixé par la période d'échantillonnage $T_e \equiv 1/f_e$. On peut noter que, du côté analogique, on a des signaux et des spectres continus (ou discrets si $x(t)$ est périodique) reliés entre eux par la transformation de Fourier alors que du côté numérique, on n'a que des valeurs numériques $x[n]$ stockées en RAM sur lesquelles on travaille avec l'algorithme de la TFD ou de la FFT pour obtenir $X[jk]$ (figure 3.5).

Si on considère, comme on l'a vu dans la figure 3.2, que la partie enregistrée $x[n]$ du signal analogique $x(t = nT_e)$ représente une période du signal numérique, on voit alors que l'analyse spectrale numérique se ramène tout simplement à la série complexe $X_{SF}(jk)$ de Fourier et que la connaissance des relations suivantes suffisent pour l'analyse spectrale d'un signal analogique dont on a enregistré N valeurs à la fréquence $f_e = 1/T_e$:

$$X_D[jk] \equiv FFT(x[n]) \leftrightarrow x_D[n] = IFFT(X_D[jk]) \quad (3.37)$$

$$X_{SF}(jk) = \frac{X_D[jk]}{N} = \frac{FFT(x[n])}{N} \leftrightarrow x[n] = \frac{x_D[n]}{N} \quad (3.38)$$

$$f = 0, \dots, k \Delta f, \dots, f_e - \Delta f \quad \text{avec} \quad \Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{f_e}{N} \quad (3.39)$$

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

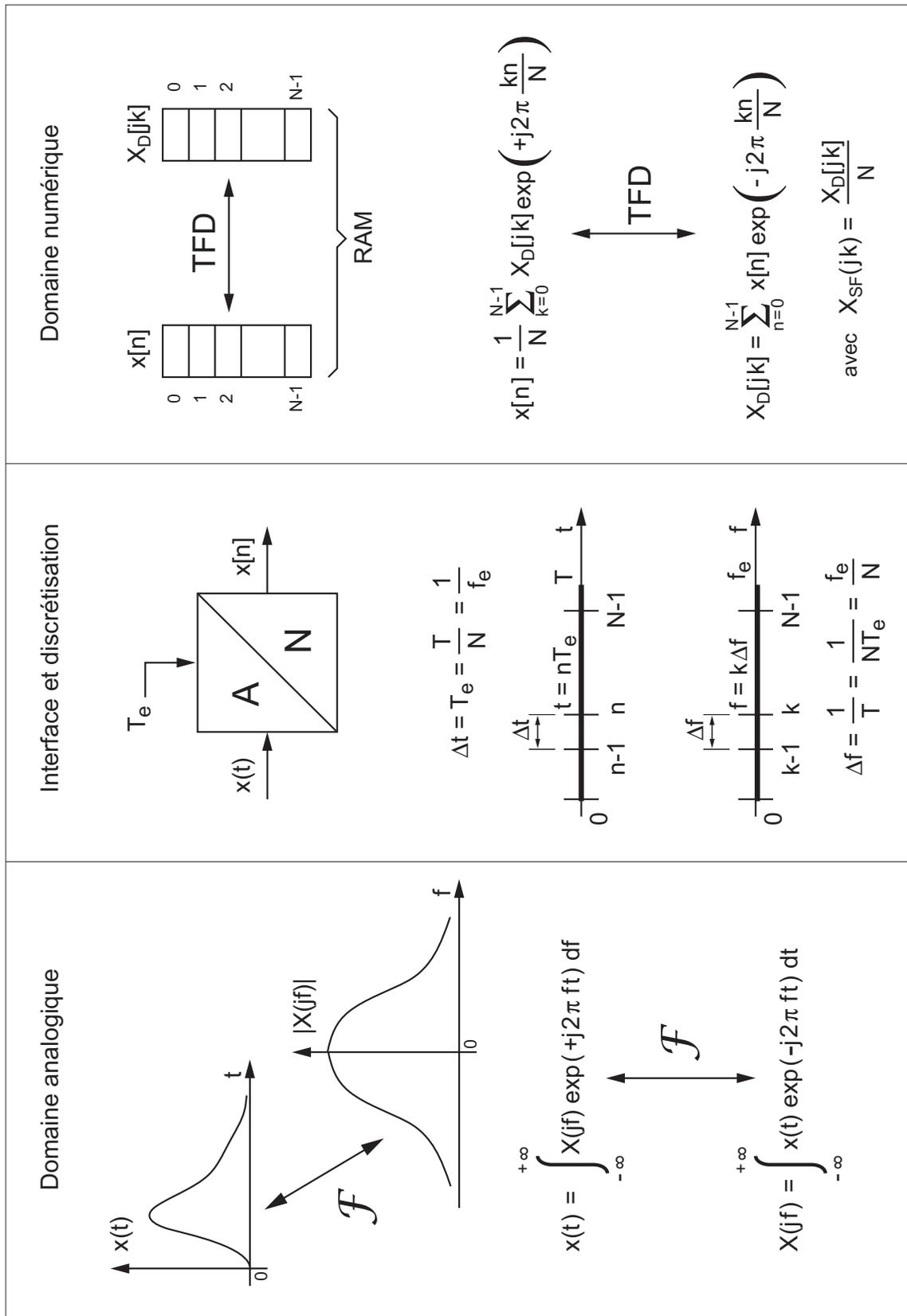


FIGURE 3.5.: Illustration des relations entre les domaines analogiques et numériques

3.4.1. Calcul et analyse d'une TFD

Afin d'illustrer l'usage de ces relations considérons la suite suivante $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$ qui pourrait provenir, par exemple, de l'échantillonnage d'une rampe. Comme la période d'échantillonnage n'est pas donnée, on admet $T_e = 1$ sec. De cette donnée élémentaire, on en déduit immédiatement

$$N = 4, \quad \Delta f = \frac{1}{N T_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (3.40)$$

$$t_n = 0, 1, 2, 3 \text{ sec}, \quad f_k = 0, 0.25, 0.5, 0.75 \text{ Hz} \quad (3.41)$$

Il y a donc quatre échantillons temporels et quatre raies spectrales décrites par

$$X_D[jk] = TFD(x[n]) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{avec } k = 0, \dots, 3 \quad (3.42)$$

Avant de se lancer dans le calcul de $X_D[jk]$, il est intéressant de noter que

$$e^{-j2\pi kn/N} = (e^{-jk\pi/2})^n$$

On obtient ainsi

– pour $k = 0$, $e^{-jk\pi/2} = 1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$X_D[j0] = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

– pour $k = 1$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j1] &= 0 \cdot e^{-0j\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (+j) = -2 + 2j \end{aligned}$$

– pour $k = 2$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\pi} = -1$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j2] &= 0 \cdot e^{-0j\pi} + 1 \cdot e^{-1j\pi} + 2 \cdot e^{-2j\pi} + 3 \cdot e^{-3j\pi} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (+1) + 3 \cdot (-1) = -2 \end{aligned}$$

– pour $k = 3$, $e^{-jk\pi/2} = e^{-j3\pi/2} = +j$; avec $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_D[j3] &= 0 \cdot e^{-0j3\pi/2} + 1 \cdot e^{-1j3\pi/2} + 2 \cdot e^{-2j3\pi/2} + 3 \cdot e^{-3j3\pi/2} \\ &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (+j) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-j) = -2 - 2j \end{aligned}$$

Par simple TFD (ou FFT) directe ou inverse, on bascule ainsi d'un domaine à l'autre et l'on a

$$x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{fft} \rightarrow X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{ifft} \rightarrow x[n] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le passage de la TFD $X_D[jk]$ à la série de Fourier bilatérale $X_{SF}[jk]$ se fait en divisant le résultat de la TFD par le nombre de points de la suite $x[n]$ après avoir

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

redistribué les composantes spectrales supérieures à $f_e/2$ entre $-f_e/2$ et 0. Cette redistribution se fait simplement avec la fonction `fftshift` :

$$X_D[jk] = \begin{pmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{pmatrix} \rightarrow \text{fftshift} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2-2j \\ 6 \\ -2+2j \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{N} \rightarrow X_{SF}[jk] = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5-0.5j \\ 1.5 \\ -0.5+0.5j \end{pmatrix}$$

On notera ici la situation particulière de la première composante qui n'a pas de composante symétrique (un conjugué complexe comme pour la deuxième composante). En effet, *lorsque N est pair*, cette composante se situe sur la fréquence de Nyquist $f_e/2$ et sa valeur sera toujours réelle comme la composante DC. Ce qui fait, que lors du passage à la description (A_k, α_k) , les composantes DC et de Nyquist ne doivent pas être multipliées par le facteur 2.

k ou n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x[n]$?	?	?	?	?	0	1	2	3	?	?	?
$X_D[jk]$...	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$	-2	$-2-2j$	6	$-2+2j$...
$X_{SF}[jk]$					$-0.5-0.5j$	1.5	$-0.5+0.5j$	-0.5				
A_k						1.5	$2/\sqrt{2}$	0.5				
α_k						0	$+3\pi/4$	$+\pi$				

TABLE 3.1.: Résultats de l'analyse spectrale de la suite $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$

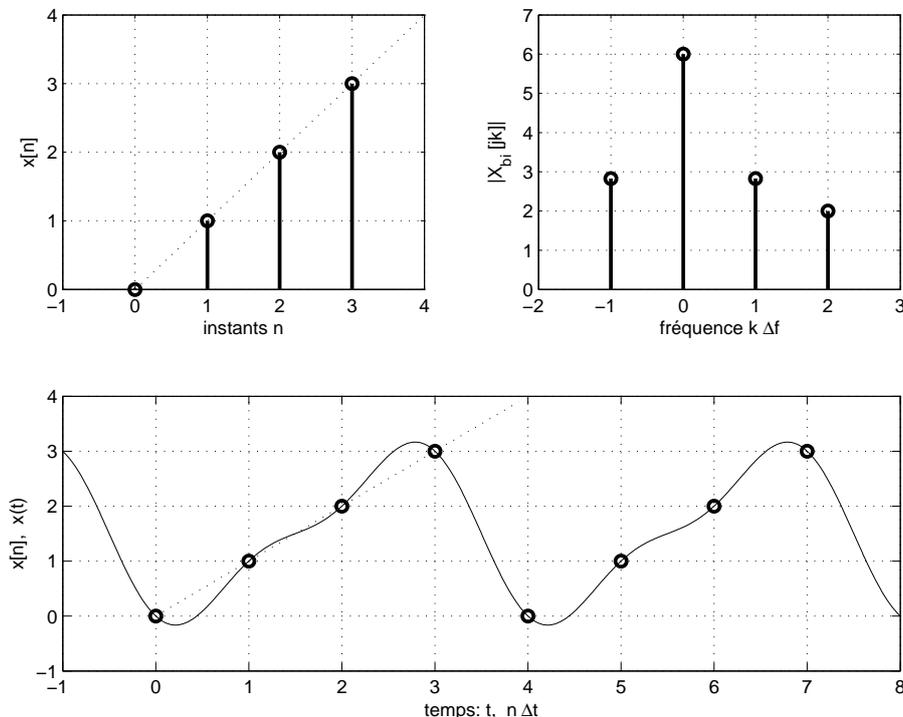


FIGURE 3.6.: Résultats d'une TFD

Les valeurs intéressantes sont réunies dans le tableau 3.1; les cases vides sont non significatives. Les points d'interrogation rappellent qu'après échantillonnage,

on ne sait rien du signal original hormis les valeurs ainsi obtenues. Connaissant les (A_k, α_k) , on peut alors calculer le signal continu qui, au sens de Fourier, passe par les points échantillonnés

$$x(t) = 1.5 + \sqrt{2} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right) + 0.5 \cos(4\pi f_0 t + \pi), \quad f_0 = \frac{1}{NT_e} = 0.25 \text{ Hz} \quad (3.43)$$

Dans la figure 3.6, on peut observer les points échantillonnés (graphe a) et le spectre bilatéral correspondant (graphe b). En revenant au domaine temporel, il est important de se souvenir que, vu par l'algorithme TFD, le signal $x[n]$ est considéré périodique comme le montre également la reconstruction au sens de Fourier du signal $x(t)$ (graphe c).

3.5. Spectre d'une sinusoïde

Il est important de bien comprendre que, dans toute analyse numérique des signaux, on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal et que cette durée finie peut conduire à des effets indésirables lors de l'analyse.

On a vu que la FFT travaille sur un bloc complet d'échantillons considéré comme périodique. Cela ne pose aucun problème dans le cas d'un signal transitoire si celui a le temps de revenir à 0 avant la fin de l'enregistrement. Par contre, dans le cas de signaux permanents, les choses peuvent se compliquer sensiblement. Pour le voir, considérons deux situations pouvant apparaître lors de l'enregistrement d'un signal périodique tel qu'une sinusoïde.

3.5.1. Le nombre de périodes enregistrées est un entier

La figure 3.7a illustre un enregistrement de durée 10 ms contenant *exactement* 10 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, coïncide avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et aucune modification de l'information n'est introduite.

Le résultat de l'analyse FFT pour cette situation confirme ce que l'on attend, à savoir que son spectre est constitué d'une raie spectrale bien définie et située en 1 kHz. Les deux raies supplémentaires que l'on peut observer en 3 et 5 kHz sont dues aux distorsions du signal sinusoïdal fourni par le générateur.

3.5.2. Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier

Dans ce cas, la FFT analyse un signal qui possède une transition brusque au raccordement du début et de la fin de l'enregistrement. Cette transition possède un contenu spectral hautes-fréquences qui peut masquer une partie du spectre réel.

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

La figure 3.7b montre un enregistrement contenant 10.25 périodes d'une onde sinusoïdale permanente d'amplitude 1 et de période 1 ms. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, ne coïncide pas avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et son spectre s'étale dans tout le domaine spectral. Cette dispersion de la puissance du signal dans tout le domaine fréquentiel porte le nom d'*étalement spectral*.

Il est important de réaliser que le phénomène d'étalement spectral est dû à la non-coïncidence des valeurs initiale et finale de la durée enregistrée. Dans le cas de la figure 3.7b, ces effets de bords sont tels qu'ils masquent complètement les composantes spectrales d'ordre 3 et 5 du signal.

Pour éviter ces effets de bords, il faut s'attacher à enregistrer exactement un nombre entier de périodes du signal et, dans le cas où cela n'est pas possible, il faut ramener les deux bords à une valeur identique à l'aide d'une fenêtre qui modifie aussi peu que possible le spectre réel.

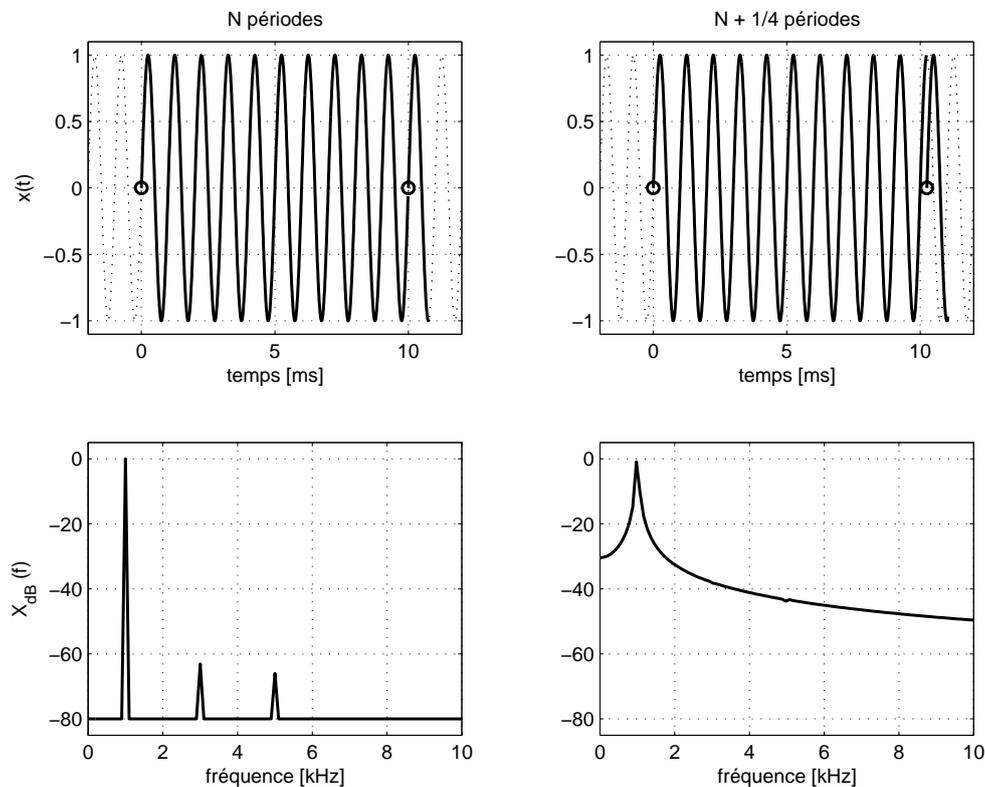


FIGURE 3.7.: Signal sinusoïdal et son spectre

3.6. Fenêtres d'observation

3.6.1. Quatre fenêtres usuelles

Les fenêtres utilisées en analyse spectrale sont nombreuses et elles ont été étudiées extensivement par F.J. Harris [2]. On se contente ici de mentionner quatre fenêtres

fréquemment appliquées à l'enregistrement d'un signal. Elles sont définies comme suit :

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = 1 \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (3.44)$$

Fenêtre de Hann

$$w_c[n] = 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (3.45)$$

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = 0.54 - 0.46 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (3.46)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) + 0.08 \cos \left(4\pi \frac{n}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N \quad (3.47)$$

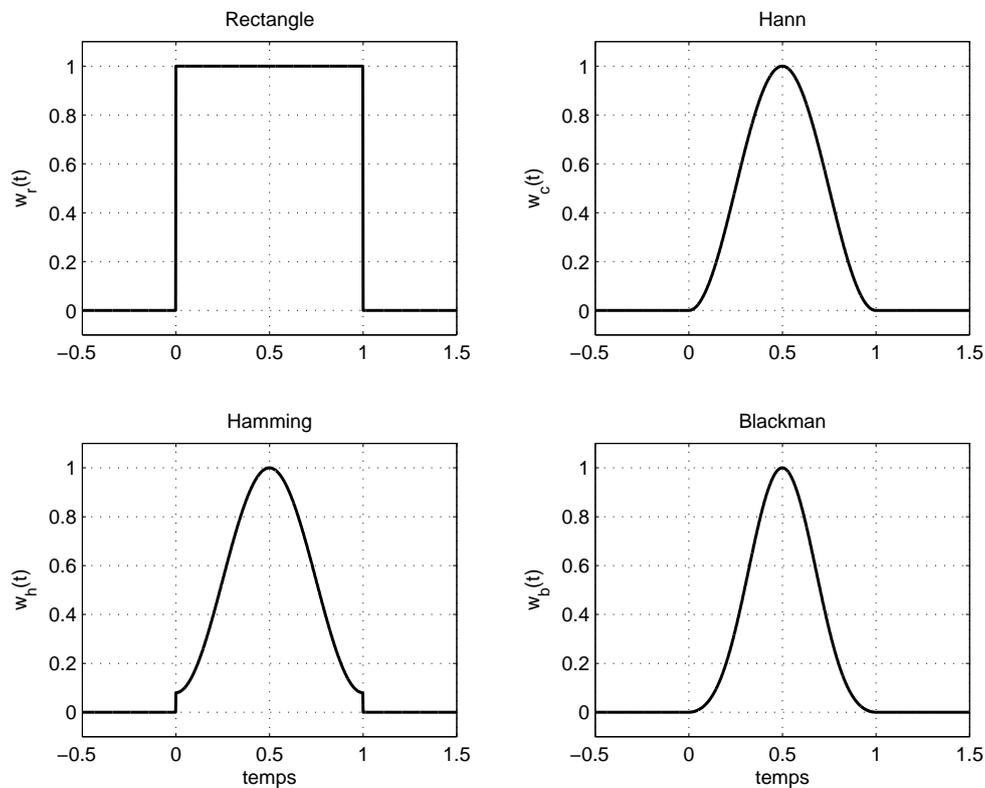


FIGURE 3.8.: Fenêtres d'observation

3.6.2. Effet d'une fenêtre

Pour bien saisir l'effet des fenêtres dans le domaine spectral, on considère ici les deux situations présentées plus haut auxquelles on appliquera les fenêtres de Hann, de Hamming et de Blackman (figure 3.9).

Le nombre de périodes enregistrées est un entier Dans ce cas idéal (figure 3.9a), on peut relever quelques différences spectrales légères.

1. Les raies spectrales du signal original sont également présentes quelle que soit la fenêtre choisie.
2. Grâce au maintien d'une légère discontinuité temporelle, la fenêtre de Hamming offre les raies spectrales les plus étroites.
3. La fenêtre de Blackman qui est la plus étroite temporellement, fournit, comme attendu, des raies spectrales plus larges.

Le nombre de périodes enregistrées n'est pas un entier Dans la figure 3.9b, on a repris l'enregistrement contenant 10.25 périodes. Les résultats spectraux obtenus montrent à l'évidence l'effet de ces 3 fenêtres :

1. la fenêtre de Hann fournit un spectre tout à fait satisfaisant sans diminuer fortement l'étalement spectral ; c'est pourquoi le spectre est un peu large à la base ;
2. la fenêtre de Hamming fournit un spectre étroit mais, à cause de l'effet de bord résiduel, l'étalement spectral n'est pas suffisamment réduit et il masque les deux autres composantes spectrales ;
3. la fenêtre de Blackman donne le meilleur résultat grâce à la double cosinusoïde qui masque bien les effets de bord ; les raies spectrales sont alors étroites et bien définies.

3.6.3. Choix d'une fenêtre

Le choix d'une fenêtre est un compromis entre une bonne définition spectrale (spectre étroit) et un étalement spectral aussi faible que possible (douceur de la fenêtre). Qualitativement, leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit.

1. La *fenêtre rectangulaire* ne modifie pas l'enregistrement ; c'est celle que l'on utilisera dans le cas de **signaux transitoires ou non permanents** et, dans le cas de signaux périodiques, lorsque l'on est sûr que le nombre de périodes enregistrées est un entier.
2. La *fenêtre en cosinus*, dite de Hann, est mathématiquement la plus simple et elle offre de bons résultats dans le cas de **composantes spectrales pas trop proches**.
3. La *fenêtre en cosinus relevé*, dite de Hamming, n'élimine pas complètement l'étalement spectral. Elle offre en contre partie une **meilleure définition spectrale** mais ne permet pas de voir des composantes spectrales de faibles amplitudes.

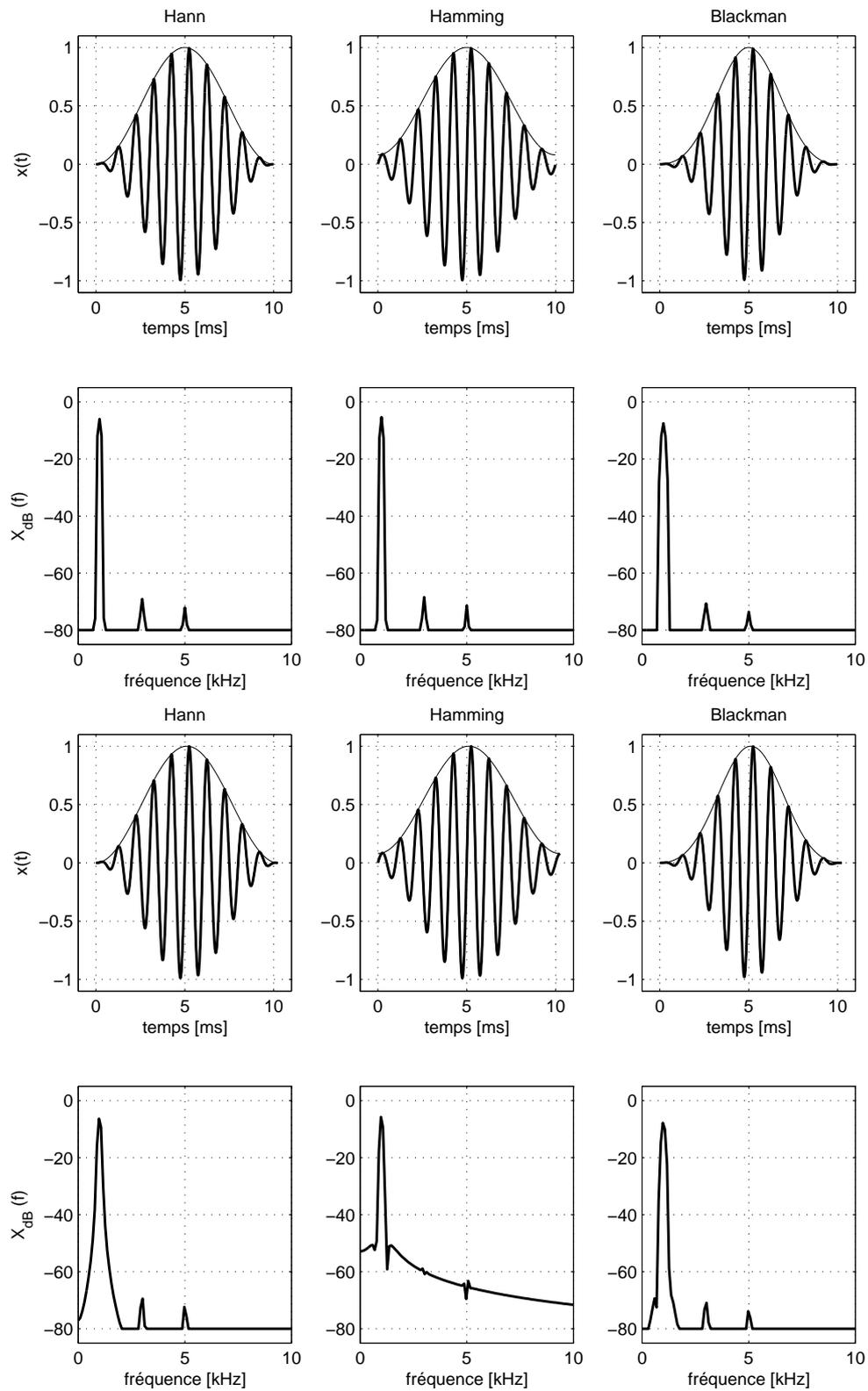


FIGURE 3.9.: Effet des fenêtres d'observation avec : (a) 10 périodes entières ; (b) 10.25 périodes

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

4. La *fenêtre de Blackman*, constituée de deux cosinus, atténue très fortement les effets de bord et permet ainsi de bien distinguer des **raies spectrales proches et de faibles amplitudes**.

3.6.4. Fenêtrage et traitement d'images

Tout ce qui vient d'être dit pour des signaux temporels est bien entendu valable pour des signaux bidimensionnels tels que des images. Et, en plus, visuellement parlant, les artefacts apparaissent de manière évidente. Comme illustration, considérons une image composée de grains de riz (figure 3.10).

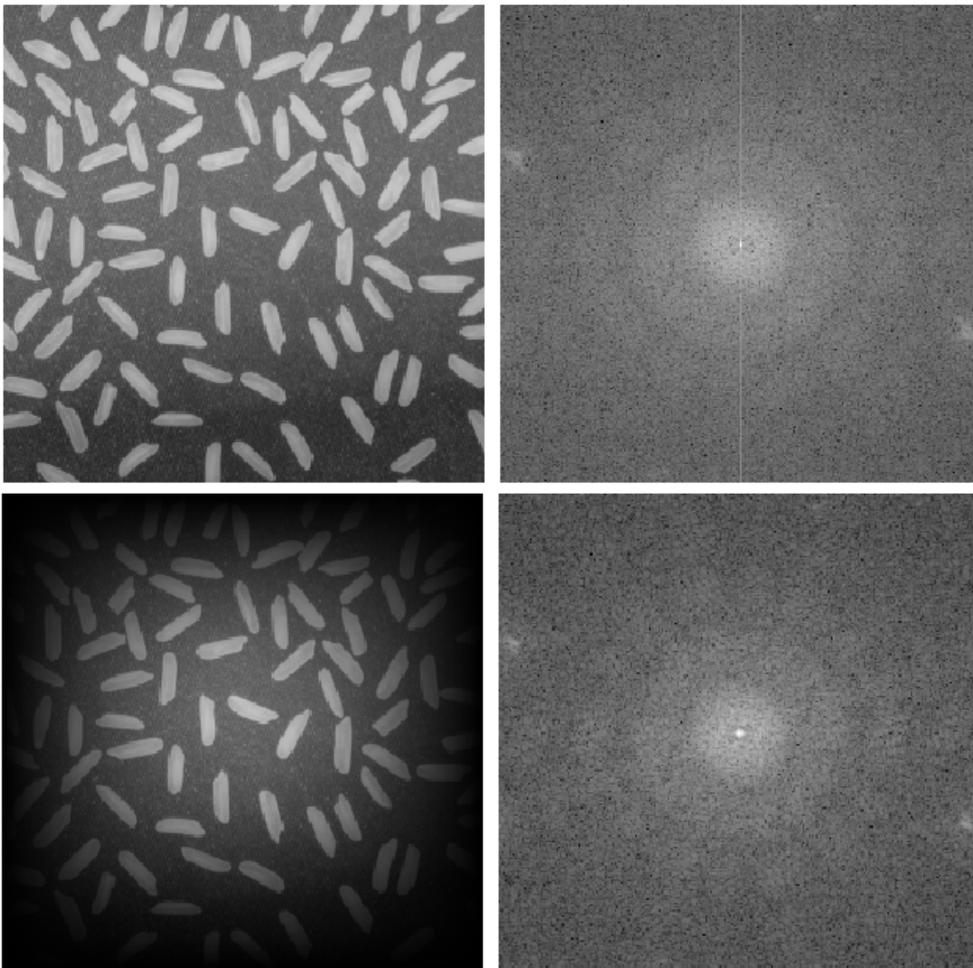


FIGURE 3.10.: Deux images (colonne de gauche) et leur transformée de Fourier respective (colonne de droite) ; a) sans fenêtrage, b) avec fenêtrage

En effectuant une FFT bidimensionnelle sur cette image, on voit apparaître une ligne claire verticale indiquant un contenu spectral fort selon l'axe Oy alors qu'aucune discontinuité ne semble apparaître dans l'image originale. En effectuant la même opération après un fenêtrage en cosinus, la ligne verticale a disparu. D'où cela peut-il bien provenir ?

3.7. Exemple 1: analyse spectrale élémentaire

En observant attentivement la figure originale, il semble que la partie inférieure de l'image soit légèrement plus sombre que le haut. Pour s'en assurer, formons, comme le voit la fonction FFT, une image constituée de deux périodes selon Ox et Oy (figure 3.11). Cette juxtaposition, équivalente à celle que voit la FFT, montre à l'évidence une variation brusque d'intensité selon l'axe Oy , cause de la ligne verticale dans l'espace de Fourier, alors qu'il n'y en a pratiquement pas selon l'axe Ox . De plus, en observant bien l'image de Fourier, on peut noter que la définition spectrale s'est améliorée grâce au fenêtrage.

[Réf : <http://blogs.mathworks.com/steve/2009/12/04/fourier-transform-visualization-using-windowing/>]

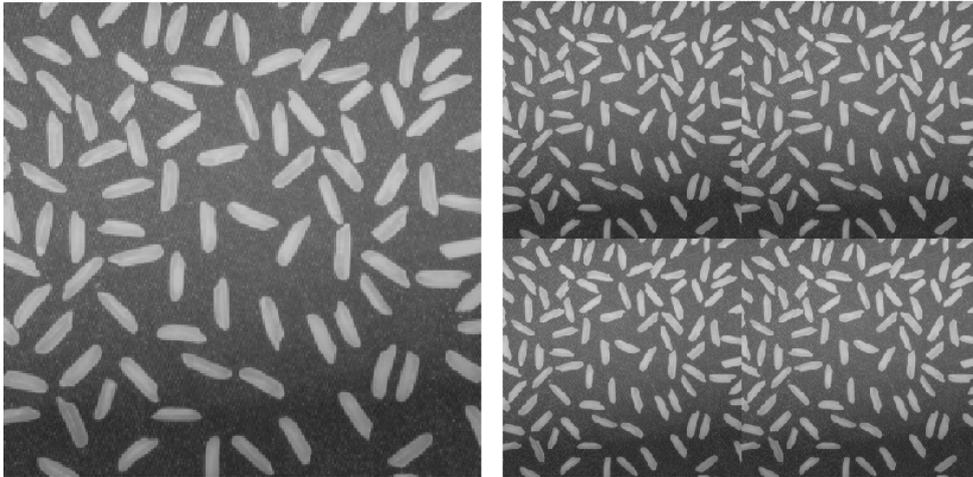


FIGURE 3.11.: Une image et sa réplication selon Ox et Oy

3.7. Exemple 1 : analyse spectrale élémentaire

Données On considère ici un signal temporel fortement bruité ($\text{SNR} \simeq 0$ dB) qui semble contenir une oscillation périodique dont on souhaite connaître la teneur (figure 3.12).

Analyse temporelle De l'enregistrement, on tire

1. la composante DC du signal et sa valeur efficace AC

$$X_{dc} = 0.045 \quad X_{ac} = 1.42$$

2. la période d'échantillonnage T_e et sa durée T

$$T_e = 20 \mu s \quad T = 20 \text{ ms}$$

3. le domaine d'analyse spectrale f_N et la définition spectrale Δf

$$f_N = \frac{1}{2} f_e = \frac{1}{2T_e} = 25 \text{ kHz} \quad \Delta f = \frac{1}{T} = 50 \text{ Hz}$$

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

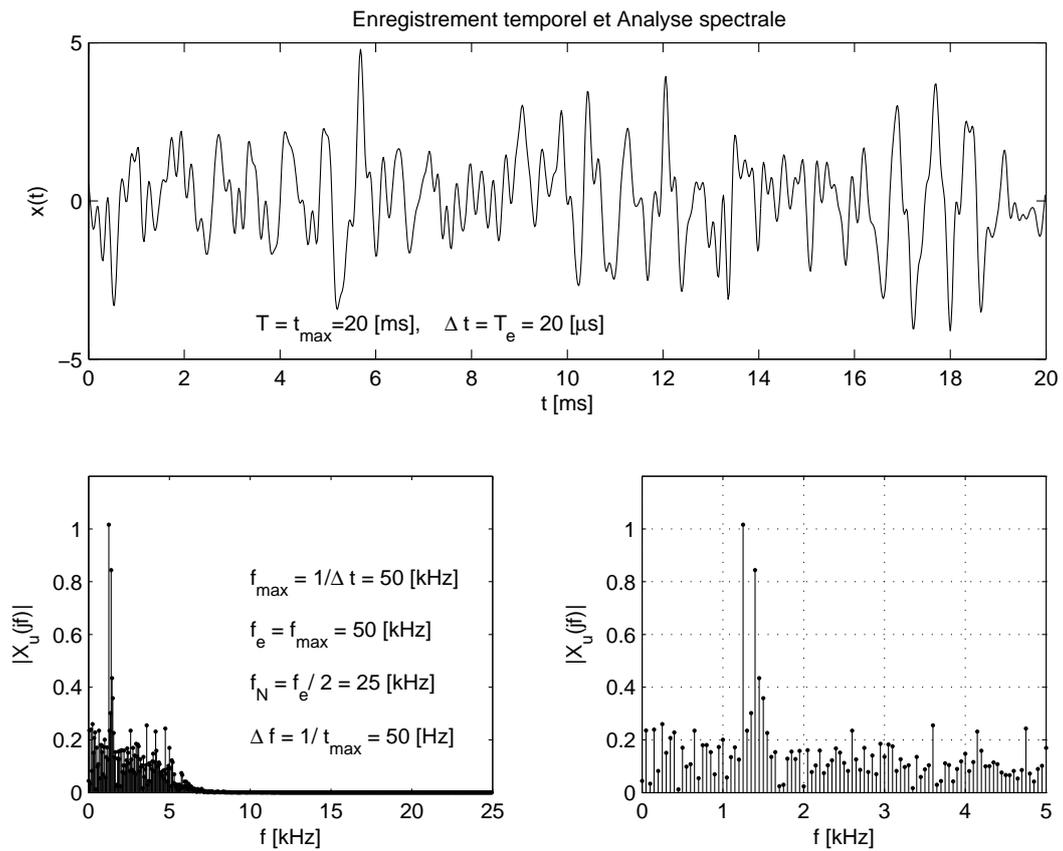


FIGURE 3.12.: Illustration de l'analyse spectrale avec :

- a) l'enregistrement temporel ;
- b) son spectre d'amplitudes pour $0 \leq f \leq f_e/2 = 25$ kHz ;
- c) un zoom spectral entre 0 et 5 kHz

Analyse spectrale Le programme des calculs temporels et spectraux se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```

% lecture de l'enregistrement
enreg = load('enreg.txt');
tt = enreg(:,1);
xt = enreg(:,2);
Xdc = mean(xt)
Xac = std(xt)

% analyse temporelle
Npts = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1)
duree = Npts * dt

% analyse spectrale
df = 1/duree, fmax = 1/dt
ff = 0:df:fmax-df;
Xjf = fft(xt)/Npts;

% spectre unilatéral
Ndemi = round(Npts/2);
fk = ff(1:Ndemi);
Ak = 2*abs(Xjf(1:Ndemi));
Ak(1) = abs(Xjf(1));      % composante DC
ak = angle(Xjf(1:Ndemi));
subplot(2,1,1); stem(f,Ak,'.');

% estimation du rapport signal/bruit (SNR)
Px = Xdc^2 + Xac^2;      % puissance du signal + bruit = 2.023
A1 = 1.02; A2 = 0.85;   % amplitudes mesurées
Px0 = (A1^2 + A2^2)/2;  % puissance du signal original = 0.88
Pn = Px - Px0;         % puissance du bruit = 1.14
SNR = 10*log10(Px0/Pn) % SNR = -1.12 dB

```

Les spectres d'amplitudes, présentés dans la figure 3.12, montrent que deux raies spectrales s'élèvent clairement au-dessus du niveau de bruit situé aux environs de 0.3. Ces deux raies spectrales ont une amplitude et une fréquence valant respectivement

$$A_1 \simeq 1.02 \quad f_1 = 1.25 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

$$A_2 \simeq 0.85 \quad f_2 = 1.40 \text{ kHz} \pm 25 \text{ Hz}$$

La précision des fréquences mesurées est égale à la moitié de la définition spectrale Δf .

3.8. Exemple 2 : reconstruction d'un signal

Données Afin d'analyser et illustrer les résultats fournis par la TFD, on considère ici un signal connu

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t + \pi/4)$$

constitué de trois sinusoïdes d'amplitudes

$$A_1 = 1 \quad A_2 = -0.8 \quad A_3 = 0.5$$

et de fréquences harmoniques

$$f_1 = 50 \text{ Hz} \quad f_2 = 150 \text{ Hz} \quad f_3 = 250 \text{ Hz}$$

Ce signal original est perturbé par un bruit important car le SNR ne vaut que +5 dB. Avec cet exemple, on souhaite :

1. montrer que, malgré la présence d'un fort bruit, il est possible de retrouver le signal original (tout au moins partiellement) ;
2. attirer l'attention sur le fait que d'une raie spectrale peuvent naître deux raies spectrales proches si l'incrément fréquentiel n'est pas un diviseur exact des fréquences présentes.

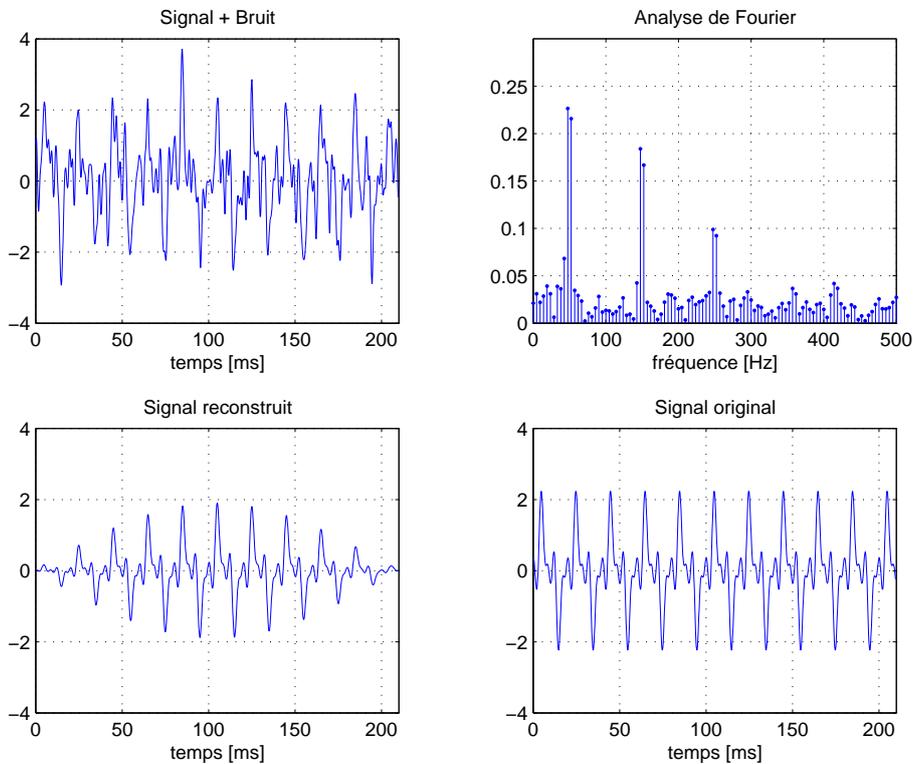


FIGURE 3.13.: Analyse spectrale et extraction des signaux

3.8. Exemple 2: reconstruction d'un signal

Analyse temporelle Le signal bruité a été enregistré avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.2 \text{ ms}$ et il a une durée $T = 210 \text{ ms}$ (figure 3.13a). Ceci permet de prévoir que le domaine des fréquences est caractérisé par :

– la fréquence de Nyquist

$$f_N = \frac{f_e}{2} = 2500 \text{ Hz}$$

– la définition spectrale

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{210 \text{ ms}} = 4.76 \text{ Hz}$$

On notera que la durée enregistrée $T = 210 \text{ ms}$ conduit à une définition spectrale $\Delta f = 4.76 \text{ Hz}$ qui n'est pas un sous-multiple des composantes spectrales. Cela fait que l'on sera dans l'impossibilité de trouver la valeur exacte des fréquences originales. Idéalement, on aurait dû prendre une durée de 200 ms permettant ainsi d'avoir une définition spectrale de 5 Hz . On pourrait bien entendu réduire la durée de l'enregistrement à 200 ms , mais ce n'est pas le but recherché.

Analyse spectrale L'observation du spectre obtenu après fenêtrage (figure 3.13b) montre que les trois raies spectrales sont bien visibles. Mais, on doit cependant constater que ces raies se sont dédoublées à cause de la définition spectrale non-entière et de l'utilisation de la fenêtre d'observation.

Le programme donné ci-dessous permet de rechercher ces raies spectrales. Les fréquences mesurées à $\pm 2.4 \text{ Hz}$ près sont

$$f_{11} = 47.6 \text{ Hz} \quad f_{12} = 52.4 \text{ Hz}$$

$$f_{21} = 147.6 \text{ Hz} \quad f_{22} = 152.4 \text{ Hz}$$

$$f_{31} = 247.6 \text{ Hz} \quad f_{32} = 252.4 \text{ Hz}$$

Leurs amplitudes et phases respectives valent

$$\begin{array}{llll} A_{11} = 0.453 & A_{12} = 0.432 & \alpha_{11} = -0.151 \text{ rad} & \alpha_{12} = +2.98 \text{ rad} \\ A_{21} = 0.368 & A_{22} = 0.334 & \alpha_{21} = -2.87 \text{ rad} & \alpha_{22} = -0.275 \text{ rad} \\ A_{31} = 0.198 & A_{32} = 0.185 & \alpha_{31} = +0.372 \text{ rad} & \alpha_{32} = -2.65 \text{ rad} \end{array}$$

avec

$$A_k = 2 |X(jk)| \quad \alpha_k = \angle X(jk)$$

Reconstruction du signal original Connaissant les amplitudes et phases des composantes spectrales, il est aisé de reconstruire le signal non bruité :

$$x_r(t) = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \alpha_k)$$

Malgré l'effet de la fenêtre d'observation utilisée avant d'effectuer la FFT et le fait qu'il y ait six fréquences au lieu de trois, le signal ainsi extrait (figure 3.13c) reproduit assez bien l'allure du signal original (figure 3.13d).

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

Programme d'analyse et recherche des composantes spectrales Le programme ayant permis d'obtenir ces résultats se résume aux quelques lignes présentées ci-dessous.

```
% signal bruité
yt = xt+nt;
Npts = length(yt);

% analyse spectrale avec une fenêtre de Hann
yht = yt'.*hann(Npts);
Yjf = fft(yht)/Npts;
df = 1/tmax; fmax = 1/dt;
ff = 0:df:fmax-df;

% recherche de N raies spectrales
Nraies = 6;
Yjf_tempo = Yjf(1:end/2);
for kn = 1:Nraies
    [Ymax, kf(kn)] = max(abs(Yjf_tempo));
    Yjf_tempo(kf(kn)) = 0; % mise à zéro de la valeur trouvée
end;

% reconstruction
xtr = zeros(size(yt));
for kn = 1:Nraies
    Xrjf = Yjf(kf(kn)); fr = ff(kf(kn));
    xtr = xtr + Xrjf*exp(+j*2*pi*fr*tt) + conj(Xrjf)*exp(-j*2*pi*fr*tt);
end;

% valeurs des composantes spectrales
fr = ff(kf)';
Ar = 2*abs(Yjf(kf))
ar = angle(Yjf(kf))
```

3.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

3.9.1. Données

On considère ici un signal permanent observé à l'oscilloscope. À partir de l'observation visuelle du signal, on désire choisir les paramètres d'acquisition qui permettront ensuite d'extraire toutes les informations possibles. L'acquisition se fera avec un convertisseur analogique-numérique 8 bits, ± 2 V.

3.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

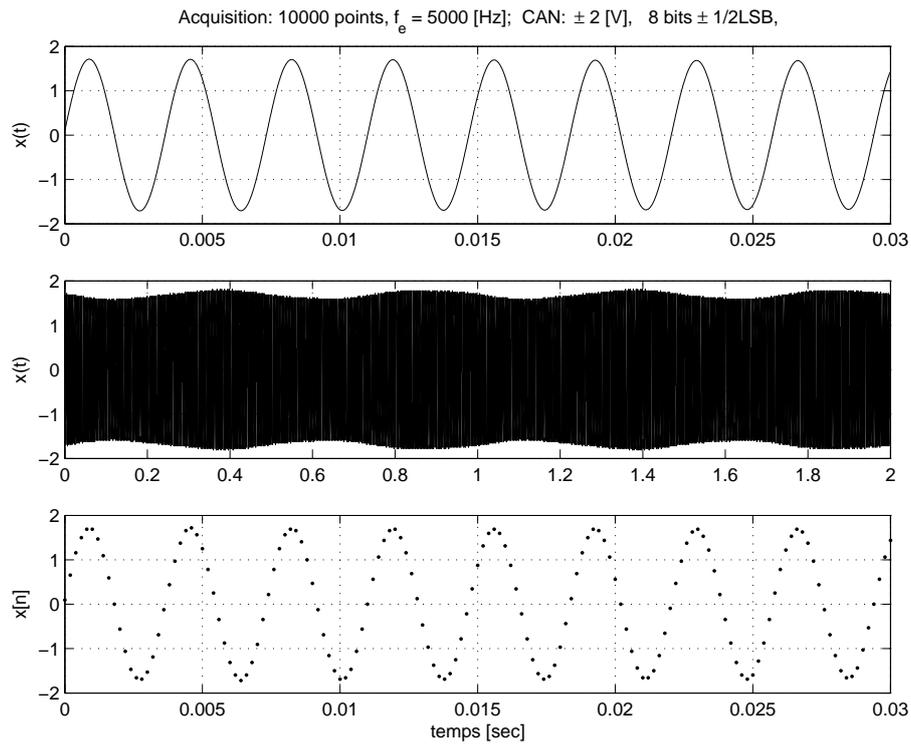


FIGURE 3.14.: Signal analysé

3.9.2. Signal temporel

Le signal $x(t)$ observé à l'oscilloscope (figure 3.14a) apparaît comme une sinusoïde caractérisée par son amplitude $A \simeq 1.7$ V et sa période $T_0 \simeq 3.68$ msec. Cependant, une observation de plus longue durée (figure 3.14b) montre un phénomène de battement de période $T_b \simeq 0.45$ sec ou de fréquence

$$f_b = \frac{1}{T_b} \simeq 2.2 \text{ Hz}$$

On en déduit que ce signal est composé d'au moins deux sinusoïdes de fréquences très proches

$$f_1 \simeq \frac{1}{T_0} \simeq 272 \text{ Hz} \quad f_2 = f_1 \pm f_b \simeq 270 \text{ ou } 274 \text{ Hz}$$

et d'amplitudes fort différentes car la variation d'amplitude de $x(t)$ est faible.

3.9.3. Paramètres d'acquisition

Afin d'avoir une définition temporelle raisonnable, on choisit

$$\Delta t \equiv T_e \simeq \frac{T_0}{10} = 0.35 \text{ msec} \simeq 0.2 \text{ msec}$$

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

et on en déduit la fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{1}{\Delta t} = 5 \text{ kHz}$$

La figure 3.14c présente une partie du signal numérique ainsi acquis.

Comme il faut pouvoir distinguer deux raies distantes de $f_b \simeq 2 \text{ Hz}$, on choisira une définition spectrale suffisamment fine

$$\Delta f \simeq \frac{f_b}{4} = 0.5 \text{ Hz}$$

Sachant que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à la durée d'acquisition, on en tire

$$t_{acq} = \frac{1}{\Delta f} = 2 \text{ sec}$$

Le nombre de points acquis vaudra donc

$$N_{pts} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} = \frac{1}{0.5 \text{ Hz} \cdot 0.2 \text{ ms}} = 10'000$$

L'ensemble des valeurs acquises est représenté à la figure 3.14b.

3.9.4. Analyse spectrale

Utilisation de la FFT On a vu plus haut que l'algorithme FFT exige un nombre de points égal à une puissance de 2. Lorsque cela n'est pas le cas, on complète la suite de valeurs acquises par une succession de zéros permettant d'atteindre un nombre de valeurs égal à la puissance de 2 la plus proche (figure 3.15a).

Du point de vue de l'analyse de Fourier, cela ne change rien aux résultats fournis; seule la résolution spectrale est améliorée. Dans notre cas, on passera donc de $N_{pts} = 10'000$ à $N_{fft} = 16'384$ et la résolution fréquentielle passera ainsi de

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{pts}} = \frac{5000}{10'000} = 0.5 \text{ Hz}$$

à

$$\Delta f = \frac{f_e}{N_{fft}} = \frac{5000}{16'384} = 0.305 \text{ Hz}$$

Fenêtre rectangulaire Dans ce cas, l'analyse spectrale de la suite de valeurs acquises $x[n]$ fournit les spectres présentés dans les figures 3.15b et 3.17a. Le spectre ainsi obtenu fait apparaître une seule raie spectrale aux environs de 270 Hz et, contrairement à ce que l'on attendait, il n'y a pas de deuxième raie spectrale. Manifestement, celle-ci est masquée par l'étalement spectral dû au nombre non entier de périodes.

3.9. Exemple 3 : analyse spectrale détaillée

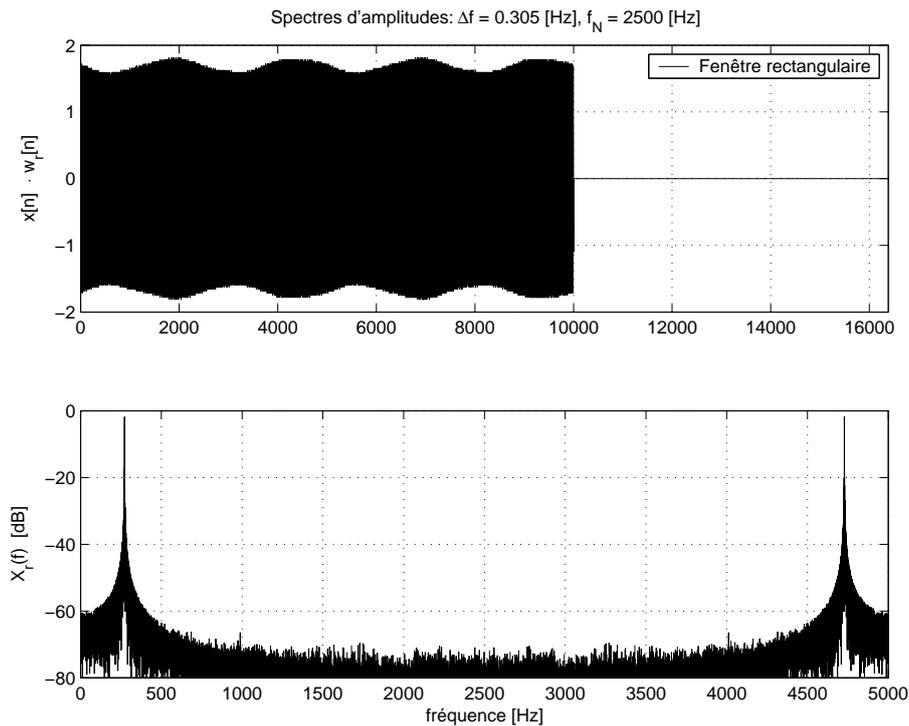


FIGURE 3.15.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre rectangulaire

Fenêtre de Blackman On est donc amené à fenêtrer le signal acquis en le multipliant par une fonction atténuant les effets de bord dus à l'acquisition effectuée. On choisit ici d'utiliser la fenêtre de Blackman définie comme suit :

$$w_b[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{n}{N_{pts}}\right) \quad \text{pour } 0 \leq n < N_{pts}$$

Du point de vue numérique, on analysera donc le signal

$$x_w[n] = x[n] \cdot w_b[n]$$

Après avoir complété le signal fenêtré par des zéros pour atteindre une puissance de 2 (figure 3.16a), on obtient les résultats présentés dans les figures 3.16b et 3.17b où le niveau de bruit causé par l'étalement spectral a pratiquement disparu.

Zoom fréquentiel Étant donné la haute définition spectrale, obtenue au prix d'un long enregistrement, les échelles globales ne permettent pas de voir le détail des raies attendues. Il faut donc zoomer sur la zone intéressante. On voit alors très nettement que la fenêtre rectangulaire (figure 3.17a) est totalement incapable de fournir les informations attendues alors qu'avec la fenêtre de Blackman (figure 3.17b), on retrouve bien la deuxième fréquence recherchée et on peut même apercevoir la présence d'une troisième composante spectrale d'amplitude encore plus faible, qui n'était absolument pas perceptible au niveau temporel.

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

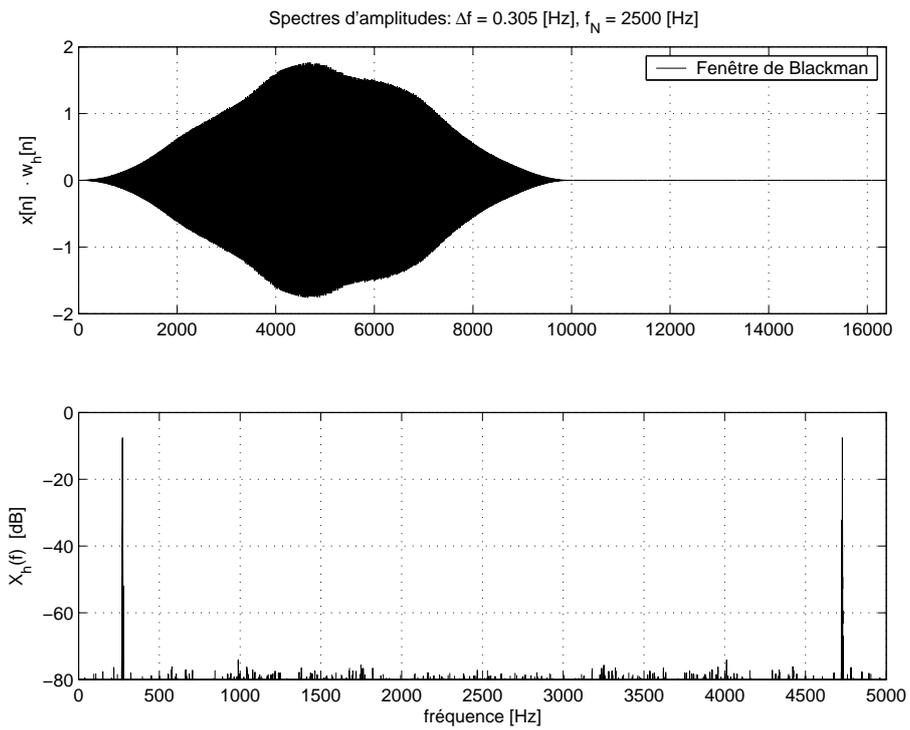


FIGURE 3.16.: Signal et spectre d'amplitudes, fenêtre de Blackman

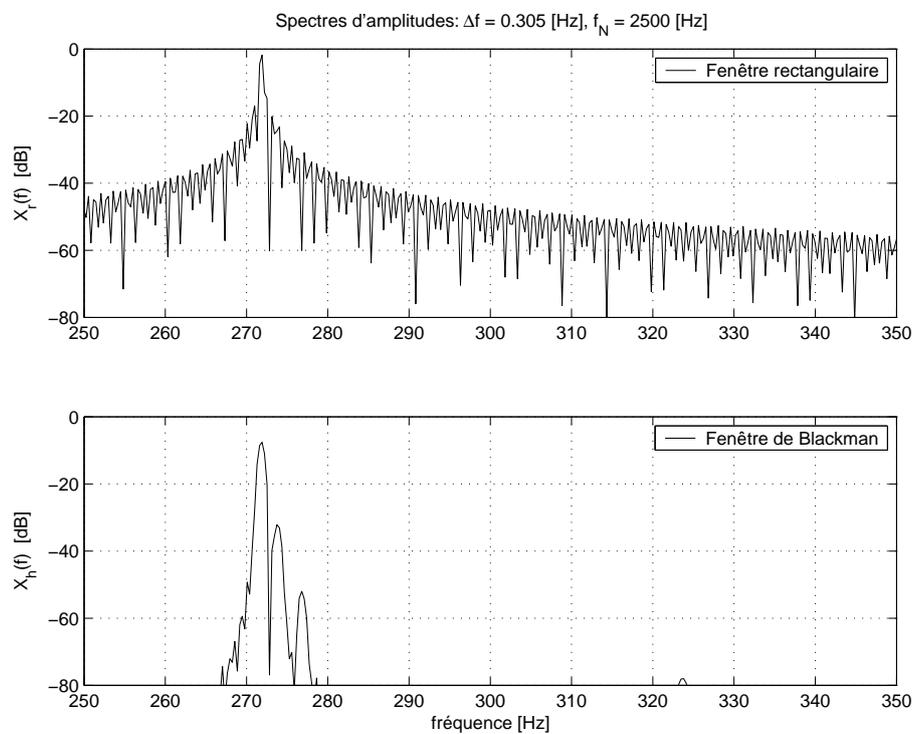


FIGURE 3.17.: Agrandissement spectral

3.9.5. Estimation des amplitudes

Le spectre d'amplitudes de la figure 3.17b permet de mesurer les fréquences des trois composantes spectrales du signal $x(t)$ et les amplitudes relatives des raies spectrales.

k	f_k	$X_{k,dB}$	$X_{k,dB} - X_{1,dB}$	X_k/X_1
1	272 Hz	-7.6	0	1
2	274 Hz	-32.2	-24.6	0.059
3	277 Hz	-52	-44.4	0.006

Il est important de noter que les amplitudes spectrales dépendent de la fenêtre choisie et que seules leurs valeurs relatives peuvent en être déduites

$$\frac{X_k}{X_1} = 10^{(X_{k,dB} - X_{1,dB})/20}$$

Pour obtenir la valeur réelle des amplitudes, on peut passer par l'égalité de Parseval :

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T x_{ac}^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} = \frac{A_1^2}{2} \left(1 + \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \right)$$

Ce qui donne dans notre cas

$$P_{ac} = \frac{A_1^2}{2} (1 + 0.059^2 + 0.006^2) = 1.00352 \frac{A_1^2}{2}$$

À partir du signal acquis, on calcule aisément sa puissance :

$$P_{ac} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \mu_x)^2 = \text{var}(x[n]) = 1.45$$

On en déduit alors la valeur de A_1 et celles des autres composantes :

$$A_1 = \sqrt{\frac{2 P_{ac}}{1.00352}} = 1.70$$

$$A_2 = 0.059 A_1 = 0.1$$

$$A_3 = 0.006 A_1 = 0.01$$

Remarque Une correction des amplitudes spectrales tenant compte de la fenêtre utilisée n'est possible que si le signal acquis possède exactement un nombre entier de périodes. Si cette condition est remplie, il suffit alors de diviser les amplitudes spectrales par la valeur moyenne de la fenêtre : $A_k \rightarrow A_k/\mu(w)$. Ce calcul doit être évité si l'on n'est pas sûr que la condition est remplie.

3.9.6. Détail du calcul des signaux et des spectres

Le fichier créé pour générer le signal $x(t)$, calculer et tracer les spectres dans différentes conditions est donné ci-dessous. Bien qu'il puisse paraître volumineux au premier abord (beaucoup de lignes sont consacrées au traçage uniquement), les parties essentielles de ce fichier sont simplement :

1. la conversion analogique- numérique ± 2 V avec $N_{bits} \pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité (on admet que celle-ci entraîne la perte d'un bit) :
 - `Ucan = 4; Nbits = 8;`
 - `xn = Ucan*round((xn0/Ucan)*(2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1));`
2. le fenêtrage :
 - `wk = (blackman(length(xn)))'`;
 - `xnwk = xn.*wk;`
3. l'ajout de zéros et le calcul du spectre :
 - `Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)));`
 - `xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xn))];`
 - `Xjfh = fft(xnwk)/length(xnwk);`

Initialisation Le programme débute par l'initialisation des paramètres et la création du signal vu sur l'écran de l'oscilloscope

```
% analyse spectrale
clear all; close all; format compact; clc;

% parametres du signal
amp1 = 1.7; amp2 = 0.1; amp3 = 0.01;
f1 = 271.828; f2 = f1+2; f3 = f1+5;
% oscilloscope
tosc = 0.03; kosc = 2000;
dt = tosc/kosc;
tt = 0:dt:tosc-dt;
xt0 = amp1*sin(2*pi*tt*f1)+amp2*cos(2*pi*tt*f2)+amp3*sin(2*pi*tt*f3);
```

Acquisition numérique Il se poursuit avec l'acquisition et la conversion sur une durée plus longue

```
% acquisition
tacq = 2;
Te = 0.2e-3;
tn = 0:Te:tacq-Te;
xn0 = amp1*sin(2*pi*tn*f1)+amp2*cos(2*pi*tn*f2)+amp3*sin(2*pi*tn*f3);
% conversion +/- 2V avec Nbits et +/- 1/2LSB de non linearite
Ucan = 4; Nbits = 8;
xn = Ucan*round(xn0/Ucan*2^(Nbits-1))/2^(Nbits-1);
```

Calcul des spectres Une fois les signaux acquis, on peut calculer leurs spectres et afficher des informations

```
% calcul des spectres
Nfft = 2^ceil(log2(length(xn)))
% fenetres rectangulaire et de Blackman
wr = ones(size(xn));
wk = (blackman(length(xn)))';
xnwr = xn.*wr;
xnwk = xn.*wk;
% ajout de zeros
xnwr = [xnwr, zeros(1,Nfft-length(xnwr))];
xnwk = [xnwk, zeros(1,Nfft-length(xnwk))];
% fft
Xjfr = fft(xnwr)/length(xn);
Xjfh = fft(xnwk)/length(xn);
% domaine spectral
fmax = 1/Te;
df = fmax/Nfft;
ff = 0:df:fmax-df;
% infos
Nbits, tacq, Te, fmax, df
Pac = var(xn)
Npoints = round(tacq/Te), Nfft
```

Graphes On trace les signaux acquis

```
% graphes temporels
figure;
subplot(3,1,1);
plot(tt,xt0); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
texte = ['Acquisition: ', num2str(round(tacq/Te)), ' points,'];
texte = [texte, ' f_e = ', num2str(1/Te,4), ' [Hz];'];
texte = [texte, ' CAN: \pm ', num2str(Ucan/2,2), ' [V], '];
texte = [texte, ' ', num2str(Nbits,2), ' bits \pm 1/2LSB,'];
title(texte);
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2)
plot(tn,xn); grid;
axis([0,tacq,-2,2])
ylabel('x(t)');
subplot(3,1,3); % zoom
plot(tn,xn, '.'); grid;
axis([0,tosc,-2,2])
ylabel('x[n]');
xlabel('temps [sec]');
print -deps ansptemps.eps
```

ainsi que les spectres après fenêtrage

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

```
% spectres
figure; % fenetre rectangulaire
subplot(2,1,1);
    plot(xnwr); grid;
    axis([0,Nfft,-2,2])
    texte = ['Spectres d'amplitudes: \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
    texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
    title(texte);
    ylabel('x[n] \cdot w_r[n]');
    legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
    plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); grid;
    axis([0,fmax,-80,0]);
    ylabel('X_r(f) [dB]');
    xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwr.eps
figure; % fenetre de Blackman
subplot(2,1,1);
    plot(xnwk); grid;
    axis([0,Nfft,-2,2])
    texte = ['Spectres d'amplitudes: \Deltaf = ', num2str(df,3), ' [Hz],'];
    texte = [texte, ' f_N = ', num2str(fmax/2), ' [Hz]'];
    title(texte);
    ylabel('x[n] \cdot w_h[n]');
    legend('Fenêtre de Blackman');
subplot(2,1,2);
    plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh))); grid;
    axis([0,fmax,-80,0]);
    ylabel('X_h(f) [dB]');
    xlabel('fréquence [Hz]');
print -deps anspwk.eps
```

Zoom Les détails sont mis en évidence

```
% zoom spectral
fz1 = 250; fz2 = 350; % domaine interessant
dbmax = 80;
figure;
subplot(2,1,1);
    plot(ff, 20*log10(abs(Xjfr))); hold on;
    axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
    title(texte);
    ylabel('X_r(f) [dB]');
    legend('Fenêtre rectangulaire');
subplot(2,1,2);
    plot(ff, 20*log10(abs(Xjfh)));
    axis([fz1,fz2,-dbmax,0]); grid;
    ylabel('X_h(f) [dB]');
    xlabel('fréquence [Hz]');
```

3.9. Exemple 3: analyse spectrale détaillée

```
    legend('Fenêtre de Blackman');  
print -deps anspzoom.eps
```

3.10. Exercices

TFD 0

1. Montrez que le passage de l'analogique vers le numérique se fait bien avec les deux relations discrètes $X[jk]$ et $x[n]$ de la figure 3.5.
2. Considérant la suite de quatre valeurs $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$, calculez son spectre $X[jk]$. Dessinez la suite $x[n]$ et un signal analogique périodique $x(t)$ lui correspondant.
3. Calculez le signal périodique $x_F(t)$ correspondant à la suite $x[n]$ au sens de Fourier.

TFD 1

L'analyse spectrale, par la FFT, d'un signal $x[n]$ constitué de $N = 8$ valeurs a fourni le spectre discret $X_D[jk]$ partiellement donné dans le tableau ci-dessous.

1. Complétez le tableau sachant que $f_e = 1$ [kHz].
2. Vu par le processeur FFT, le signal temporel $x[n]$ est-il continu, discret, périodique ?
3. Que valent $x[n = 0]$ et X_{dc} ?
4. Quelle est l'expression permettant de calculer $x[n]$? Montrez quelle peut s'écrire sous la forme

$$x[n] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_D[jk] \exp\left(j \frac{k\pi}{4} n\right)$$

5. Calculez quelques valeurs de $x[n]$.

k ou n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k [kHz]											
$X_D[jk]$	2	$1 + j$	$1 - j$	$+j$	1						
$ X_D[jk] $ $\angle X_D[jk]$											
A_k											
α_k											
$x[n]$											

TFD 2 On souhaite calculer le spectre d'une impulsion rectangulaire de largeur $\Delta t = 3$ [msec] et d'amplitude $A = 5$ [V]. Pour ce faire, on acquiert 8 points à la fréquence $f_e = 1$ [kHz].

1. Admettant que l'échantillonnage commence à l'apparition du flanc montant, dessinez $x(t)$ et $x[n]$. Discutez les valeurs choisies pour $x[n]$ lorsque $n = 0$ et $n = 3$.

2. Que vaut la durée d'acquisition t_{max} ?
3. Quel sera le domaine spectral analysé; que vaudra l'incrément de fréquence Δf ?
4. Calculez $X_D[jk]$ pour $k = 0$ et $k = 2$; quel est le domaine de variation du compteur k des fréquences ?
5. Validez votre résultat en analysant la valeur de $X_D[jk = 0]$.

TFD 3 Considérant la suite de valeurs $x[n]$ ci-dessous :

n	-m	-m+1	...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...	+m-1
$x[n]$	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0

1. Esquissez $x[n]$ et une fonction $x(t)$ passant par ces points.
2. Calculez $X_D[jk]$; sa valeur dépend-elle de la longueur $N = 2m$ de la suite ?
3. Qu'est ce qui change si on ajoute des zéros pour doubler le nombre d'échantillons ?

TFD 4 On considère un signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)$ de période $T_0 = 1$ ms. Sachant que ce signal est échantillonné pendant une période à la fréquence $f_e = 8 f_0$:

1. Calculez et dessinez la suite de valeurs $x[n]$.
2. Complétez le tableau ci-dessous avec $x[n]$ et le spectre bilatéral fourni par la décomposition en série de Fourier puis justifiez les résultats $X_D[jk]$ fournis par la la FFT en précisant la relation qui les lie.
3. On échantillonne le signal $x(t)$ sur 4 périodes; que donnera la FFT ?

n ou k	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
$x[n]$								
$X_{SF}[jk]$								
$X_D[jk]$	0	0	4	4	0	4	4	0

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

TFD 5 On échantillonne une exponentielle décroissante

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \epsilon(t) \text{ où } A = 5 \text{ [V]}, \tau = 5 \text{ [msec]}$$

avec une période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ [msec]}$.

1. Que vaut la densité spectrale $X(jf)$ du signal $x(t)$?
2. Calculez la suite des valeurs $x[n]$; exprimez la sous la forme $x[n] = A \cdot r^n$.
3. Calculez la TF $X_e(jf)$ de la suite infiniment longue $x[n]$.
4. On ne prend en compte que les 16 premières valeurs de la suite $x[n]$ et on annule les autres ; que vaut $X_{e,N}(jf)$.
5. Considérant la suite temporelle tronquée $x_N[n]$ avec $N = 16$, on discrétise l'axe des fréquences. Que vaut l'incrément fréquentiel ? Calculez le spectre discret $X_D[jk]$.
6. Que valent, pour chacun des spectres ci-dessus ($X(jf)$, $X_e(jf)$, $X_{e,N}(jf)$, $X_D[jk]$), les composantes spectrales lorsque $f = 0$?

AnSp 1 Lors de l'analyse spectrale d'un signal échantillonné $x[n]$, les paramètres N , T_e , t_{max} et f_e , Δf sont reliés entre eux ; la donnée de deux d'entre eux suffit pour fixer tous les paramètres de l'analyse. Rappelez ces relations puis complétez le tableau ci-dessous.

N	T_e	t_{max}	Δf	f_e
40				2 kHz
	1 msec		50 Hz	
50		10 msec		
100			10 Hz	
			20 Hz	1 kHz
	2 msec	1 sec		
30	1 msec			
		5 msec		5 kHz

AnSp 2 On doit faire l'analyse spectrale numérique des signaux suivants

1	une sinusoïde	5	une impulsion triangulaire
2	une réponse indicielle	6	un signal chirp (wobulé)
3	une impulsion rectangulaire	7	une exponentielle décroissante
4	une suite d'impulsions rectangulaires	8	un signal triangulaire périodique

Pour chacun des signaux :

1. Esquissez leur allure temporelle.
2. Choisissez-vous une fenêtre rectangulaire ou en cosinus ?
3. Précisez les raisons de votre choix.

AnSp 3 On considère ici le signal

$$x(t) = 3 + 4 \cos(2\pi f_0 t) + 2 \sin(4\pi f_0 t), \quad f_0 = 100 \text{ Hz}$$

représenté à la figure 3.18 dont on a enregistré deux périodes. Sachant qu'on souhaite obtenir numériquement son spectre $X[jk]$, on l'échantillonne avec une période $T_e = 1$ msec.

1. Dessinez les points échantillonnés $x[n]$. Quelle fenêtre faut-il utiliser avant l'analyse spectrale ?
2. Que valent N , t_{max} , f_e , Δf ?
3. Quelles raies spectrales seront présentes ? Quel sera le nombre de valeurs spectrales analysées ?
4. Donnez les fréquences, les amplitudes et les phases de chaque valeur spectrale $X[jk]$, $k = 0, \dots, N - 1$.
5. Quel serait le résultat de l'analyse spectrale si l'on avait échantillonné six périodes au lieu de deux ?

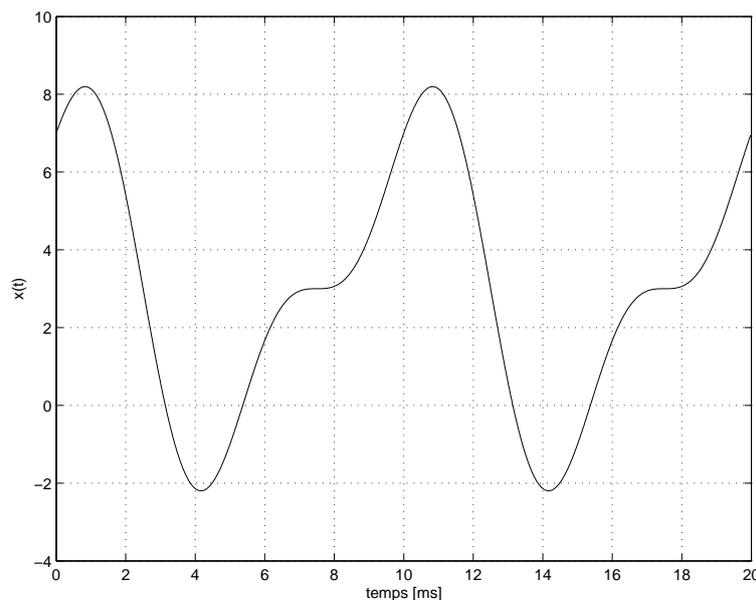


FIGURE 3.18.: Ex AnSp 3

AnSp 4 On considère le signal

$$x(t) = 1 + 5 \sin(2\pi f_a t) + 2 \sin(2\pi f_b t), \quad f_a = 1 \text{ [kHz]}, \quad f_b = 1.5 \text{ [kHz]}$$

1. Quelle est la période de ce signal ? Dessinez le spectre unilatéral de $x(t)$. Que valent X_{dc} et X_{ac} ?
2. Son enregistrement a été effectué avec une période d'échantillonnage de 125 μsec pendant exactement 10 msec.
 - a) Quel sera le domaine d'analyse spectrale et sa résolution.

3. ÉLÉMENTS D'ANALYSE SPECTRALE NUMÉRIQUE

- b) Pensez-vous devoir utiliser une fenêtre d'observation ? Si oui, laquelle choisissez-vous et pourquoi ?
 - c) Les raies spectrales fournies par la FFT seront-elles situées aux fréquences attendues ? Sinon, précisez la valeur de ces fréquences.
3. Idem 2), si l'enregistrement a duré exactement 11 msec.

Bibliographie

- [1] Randall R.B., *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, 1987
- [2] Frederic J. Harris : *On the use of windows for harmonic analysis with DFT*, Proceedings of IEEE, vol. 66, no.1, january 1978
- [3] Cooley J.W., Tukey J.W., “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965
- [4] Burrus C.S., Parks T.W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms*. John Wiley & Sons, New York, 1985
- [5] B.P. Lathy, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992

4. Description et comparaison des signaux

Ce chapitre présente et analyse quelques signaux types avant de définir et illustrer l'utilisation des fonctions d'auto- et d'intercorrélation au travers de trois exemples concrets. Il se termine par une présentation succincte des signaux aléatoires, de quelques modèles associés et de leurs relations spectrales et temporelles.

4.1. Classification des signaux

Sans entrer dans les détails de la classification des signaux, il faut mentionner que plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, on en citera deux :

- la classification phénoménologique qui met l'accent sur le comportement temporel du signal ;
- la classification énergétique où l'on classe les signaux suivant qu'ils sont à énergie finie ou à puissance finie.

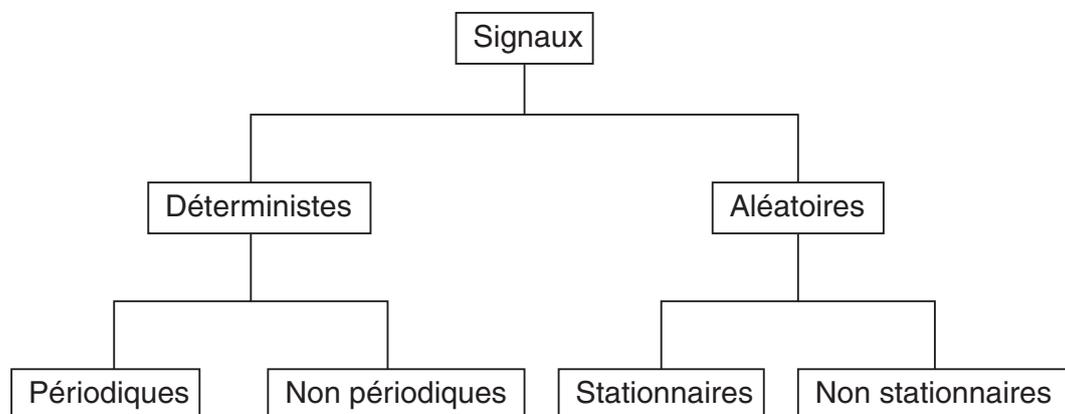


FIGURE 4.1.: Classification phénoménologique des signaux

4.1.1. Classification phénoménologique

Dans cette classification, on répartit généralement les signaux en deux classes principales et quatre sous-classes illustrées par la figure 4.1.

Dans les deux classes principales, on trouve :

- les signaux déterministes dont l'évolution temporelle parfaitement définie peut être prédite par un modèle mathématique approprié ;

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

– les signaux aléatoires qui ont un comportement temporel imprévisible et dont la description ne peut se faire qu’au travers d’observations statistiques.

Parmi les *signaux déterministes* (figure 4.2.1), on distingue :

- les signaux périodiques dont la forme se répète régulièrement ;
- les signaux pseudo-aléatoires qui sont des signaux périodiques mais avec, à l’intérieur de la période, un comportement aléatoire ;
- les signaux quasi-périodiques qui résultent d’une somme de sinusoides dont le rapport des périodes n’est pas rationnel ;
- les signaux non-périodiques ; ils sont essentiellement représentés par des signaux transitoires dont l’existence est éphémère.

Parmi les *signaux aléatoires* (figure 4.2.2), on distingue :

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (p.ex : le bruit électronique) ;
- les signaux non-stationnaires dont le contenu statistique évolue au cours du temps (p.ex. : la parole).

4.1.2. Énergie et puissance des signaux

Considérant la puissance moyenne P_x ou l’énergie totale W_x des signaux, on observe que ceux-ci peuvent alors être classés dans une des deux catégories suivantes :

1. Les signaux à énergie finie tels que

$$W_x < \infty \text{ alors que } P_x = 0$$

Dans cette catégorie, on rencontre tous les signaux temporaires qu’ils soient déterministes ou aléatoires.

2. Les signaux à puissance finie tels que

$$P_x < \infty \text{ alors que } W_x \rightarrow \infty$$

Cette catégorie englobe les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux permanents aléatoires ou non.

Suivant les caractéristiques des signaux, on calculera donc soit leur puissance P_x , soit leur énergie W_x . Selon Parseval, ce calcul peut, bien entendu, se faire dans le domaine temporel

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.1)$$

$$W_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (4.2)$$

ou dans celui des fréquences :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2] \quad (4.3)$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (4.4)$$

à condition d’avoir à sa disposition

4.1. Classification des signaux

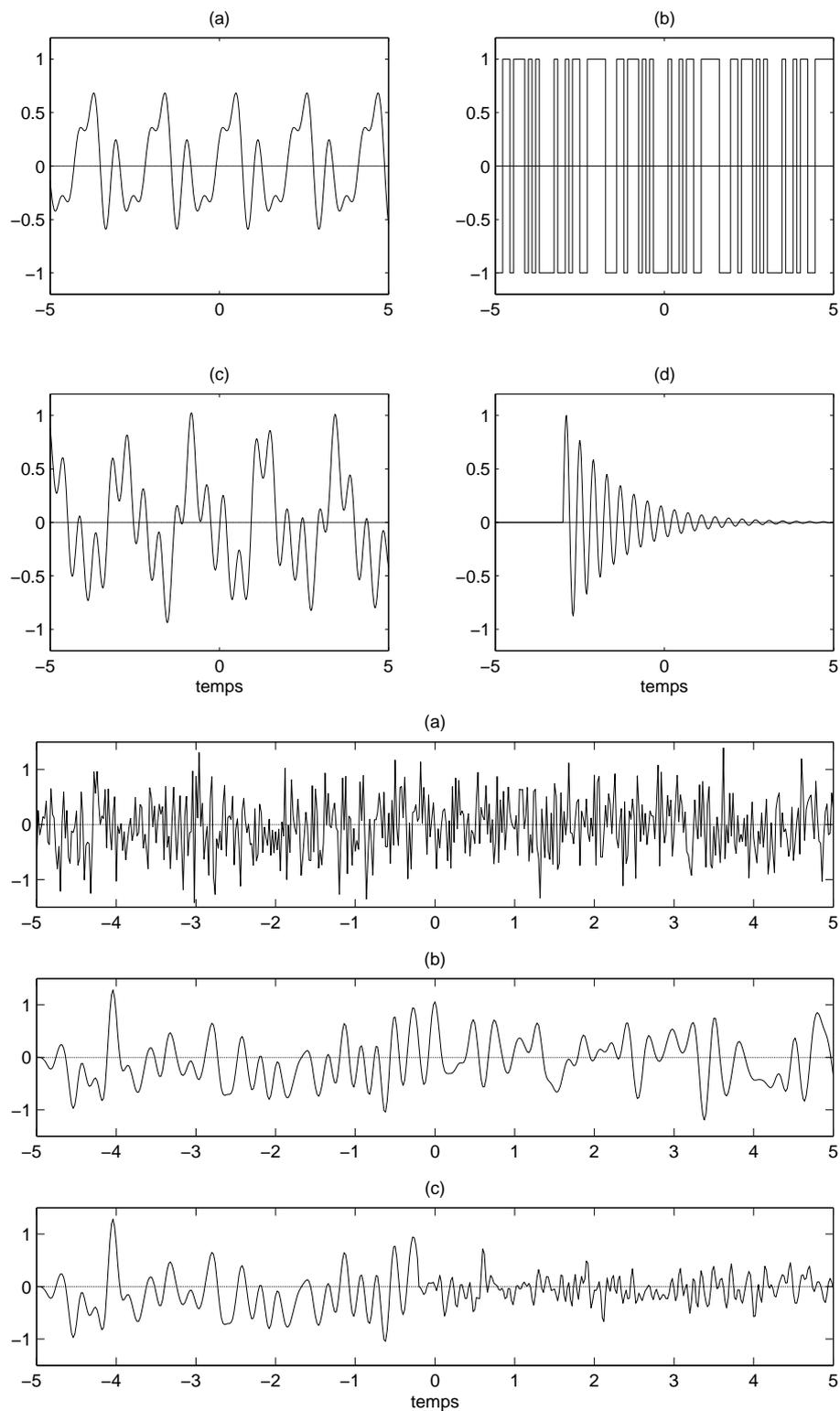


FIGURE 4.2.: 1) Quatre signaux déterministes : (a) périodique, (b) pseudo-aléatoire, (c) quasi-périodique, (d) non-permanent.
2) Trois signaux aléatoires : (a) bruit blanc (spectre infiniment large et constant), (b) bruit large bande (spectre de largeur finie), (c) bruit non-stationnaire.

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

– la densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ qui s'exprime en $[V^2/Hz]$

ou

– la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ dont les unités sont $[V^2/Hz^2]$.

On notera que, pour le calcul de la puissance des signaux périodiques, la durée d'intégration T sera prise égale à une période T_0 du signal. On se souviendra également que la puissance moyenne P_x d'un signal $x(t)$ est, par définition, égale au carré de sa valeur efficace

$$P_x \equiv X_{eff}^2$$

Enfin, il faut relever que certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune des deux catégories présentées ci-dessus. C'est le cas, par exemple, de l'exponentielle $x(t) = e^{-at}$ pour t s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$.

4.1.3. Signaux numérisés

Dans le cas où les signaux étudiés proviennent de signaux analogiques $x(t)$ numérisés pendant une durée $T = NT_e$, on remplace les intégrales par des sommes et l'incrément temporel dt par la période d'échantillonnage T_e . On montre alors aisément que l'on obtient :

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \equiv X_{eff}^2 \quad [V^2] \quad (4.5)$$

$$W_x = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad [V^2 \text{ sec}] \quad (4.6)$$

4.2. Quatre signaux types

Afin de clarifier les choses, considérons comme exemple des signaux-types (figure 4.3) illustrant les quatre classes de signaux :

1. **Déterministes temporaires** tels que l'exponentielle amortie $x_1(t)$ ou les signaux périodiques de durée finie.
2. **Permanents et périodiques** tels que le signal carré $x_2(t)$.
3. **Permanents quasi-périodiques** tels que le signal $x_3(t)$ constitué de quatre composantes spectrales non rationnelles.
4. **Aléatoires stationnaires permanents** tels que $x_4(t)$ pour lequel il n'existe pas de description temporelle.

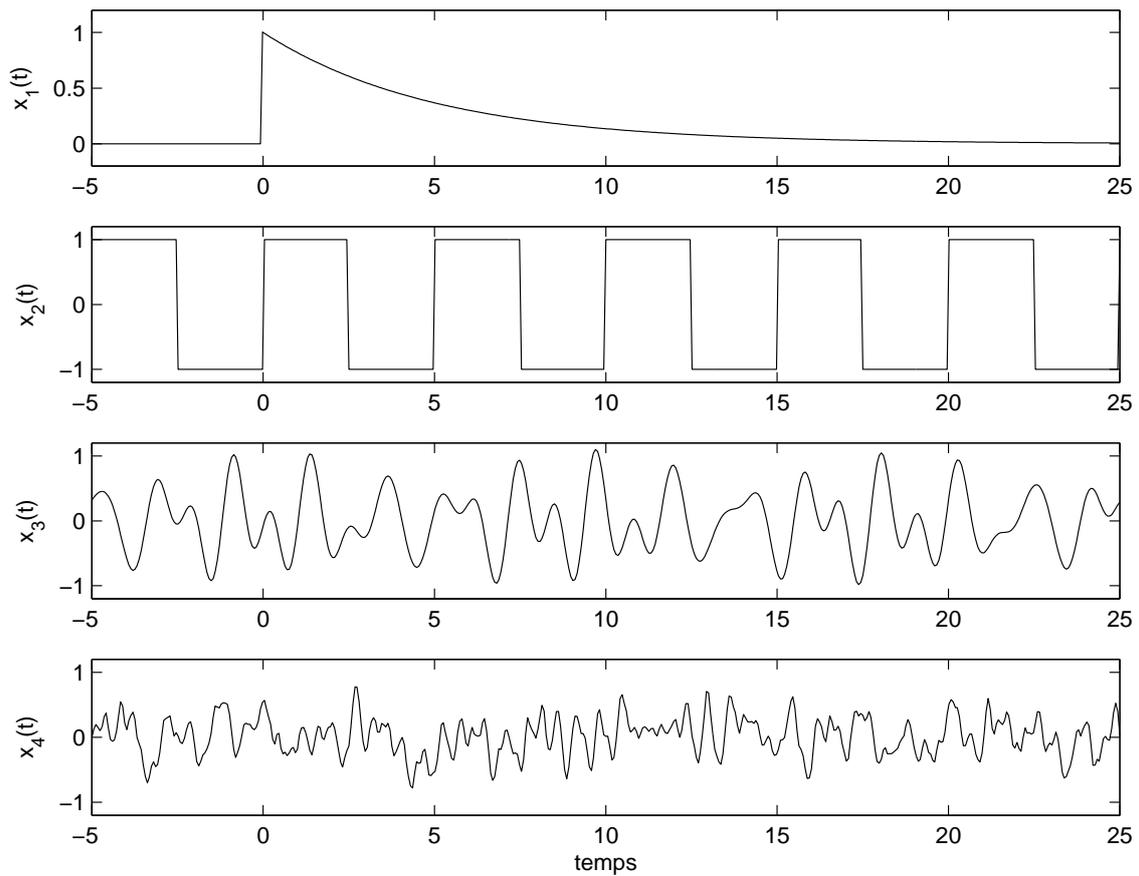


FIGURE 4.3.: Quatre signaux types : (a) déterministe temporaire, (b) déterministe permanent périodique, (c) quasi-périodique permanent, (d) aléatoire à bande étroite

4.2.1. Signaux déterministes temporaires

Les signaux déterministes temporaires tels que $x_1(t)$ sont des signaux à puissance moyenne nulle mais énergie finie. Ils possèdent un spectre continu défini par leur densité spectrale d'amplitude. Celle-ci n'est autre que la transformée de Fourier du signal :

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] = [\text{V/Hz}] \quad (4.7)$$

Leur énergie se calcule soit au niveau temporel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt \quad [\text{V}^2 \text{sec}]$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (4.8)$$

à partir de la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ exprimée en $[\text{V}^2/\text{Hz}^2]$. Dans le cas des signaux temporaires, on peut montrer que la densité spectrale d'énergie est liée à la densité spectrale d'amplitude par la relation

$$S_x(f) = X(jf) \cdot X(jf)^* = |X(jf)|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.9)$$

Exemple L'exponentielle décroissante $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = 0$$

$$W_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1^2(t) dt = \frac{A^2}{2a} = \frac{A^2 \tau}{2} < \infty \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (4.10)$$

Cette énergie peut également se calculer dans le domaine fréquentiel. En effet, comme au signal $x_1(t) = A \exp(-at) \epsilon(t)$ correspond la densité spectrale d'amplitude

$$X_1(jf) = \frac{A}{a + j2\pi f} \quad (4.11)$$

on peut calculer sa densité spectrale d'énergie $S_1(f)$:

$$S_1(f) = |X_1(jf)|^2 = \left| \frac{A}{a + j2\pi f} \right|^2 = \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.12)$$

puis son énergie

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{a^2 + (2\pi f)^2} df \quad (4.13)$$

$$= \frac{A^2}{2\pi a} \operatorname{atg} \left(\frac{2\pi f}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{A^2}{2a} \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \quad (4.14)$$

4.2.2. Signaux permanents périodiques

Un signal déterministe permanent est un signal périodique dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad [\text{V sec}] \quad (4.15)$$

Pour tous signaux périodiques, on obtient alors une densité spectrale d'amplitude constituée d'impulsions de Dirac. Ces impulsions correspondent aux raies spectrales du signal périodique qui, comme on le sait, possède un spectre discret.

Plutôt que de travailler avec les impulsions de Dirac, il est alors plus simple et plus pratique d'en rester à la description bien connue des séries de Fourier

$$X(jk) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt \quad [\text{V}] \quad (4.16)$$

La puissance des signaux périodiques se calcule soit au niveau temporel

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.17)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad [\text{V}^2] \quad (4.18)$$

Exemple Le signal carré $x_2(t)$ d'amplitude A possède une puissance finie et une énergie infinie :

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt = A^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (4.19)$$

$$W_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x_2^2(t) dt \rightarrow \infty$$

Dans le domaine fréquentiel, partant des composantes de Fourier du signal carré périodique d'amplitude A et à valeur moyenne nulle

$$X(jk) = 2A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(\pi k f_0 \Delta t)}{\pi k f_0 \Delta t} = A \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2A}{k\pi} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad (4.20)$$

on peut calculer, sa densité spectrale de puissance $R_2(f)$

$$R_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left| \frac{2A}{k\pi} \delta(f - k f_0) \right|^2 \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.21)$$

Partant de celle-ci, il vient

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(f) df = 2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{+\infty} \left(\frac{2A}{k\pi} \right)^2 = A^2 \quad [\text{V}_{eff}^2] \quad (4.22)$$

4.2.3. Signaux permanents aléatoires

Un signal permanent est un signal dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Parmi ceux-ci, on trouve essentiellement les signaux aléatoires tels que $x_4(t)$. Ces signaux n'ont pas de transformée de Fourier car leur intégrale en valeur absolue est infinie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \rightarrow \infty \quad (4.23)$$

On devra donc tenter de trouver une modélisation spectrale par une approche différente de celles vues jusqu'ici. C'est ce que l'on verra à la section 4.7.

Par contre, si l'on est en possession d'une suite de valeurs enregistrées de durée finie $T = N \Delta t$, on peut calculer la puissance et le spectre d'amplitudes $X(jf)$ de cette suite $x[n] = x(t = n \Delta t)$:

$$P_x \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad [\text{V}^2] \quad (4.24)$$

$$X(jf) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f n \Delta t) \quad [\text{V}] \quad (4.25)$$

4.2.4. Signaux permanents quasi-périodiques

Un signal permanent tel que le signal $x_3(t)$ est constitué de quatre composantes spectrales dont les fréquences sont dans un rapport irrationnel. Cela signifie que, malgré la présence de fréquences discrètes, le signal n'est pas périodique ; on doit alors le considérer comme un signal aléatoire permanent. L'estimation de la puissance et de son spectre se fera donc comme ci-dessus à partir d'une suite de valeurs enregistrées.

4.3. Comparaison des signaux

La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission, le GPS (Global Positioning System), etc.

Dans chaque cas, on dispose de deux fonctions : le signal de référence $x(t)$ et le signal à analyser $y(t)$. Il faut alors trouver une opération mathématique permettant de comparer ces signaux et d'en mesurer la ressemblance ou la corrélation. Ceci se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad (4.26)$$

On obtient alors une opération mathématique qui, de par sa forme, est très proche de la convolution. Cependant, contrairement à la convolution qui permet de calculer le signal de sortie d'un filtre linéaire, la corrélation sert à mesurer le degré de ressemblance de deux signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée.

Deux illustrations en sont données dans les figures 4.4 et 4.5. Dans la première, on compare deux signaux dont la superposition (maximum de ressemblance) apparaît après un décalage temporel égal à 0.8. Dans la deuxième, on compare un signal chirp (signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement avec le temps) avec sa version décalée. On y voit que la corrélation d'un tel signal avec sa version décalée possède un maximum très bien défini à l'endroit correspondant exactement au décalage des deux signaux.

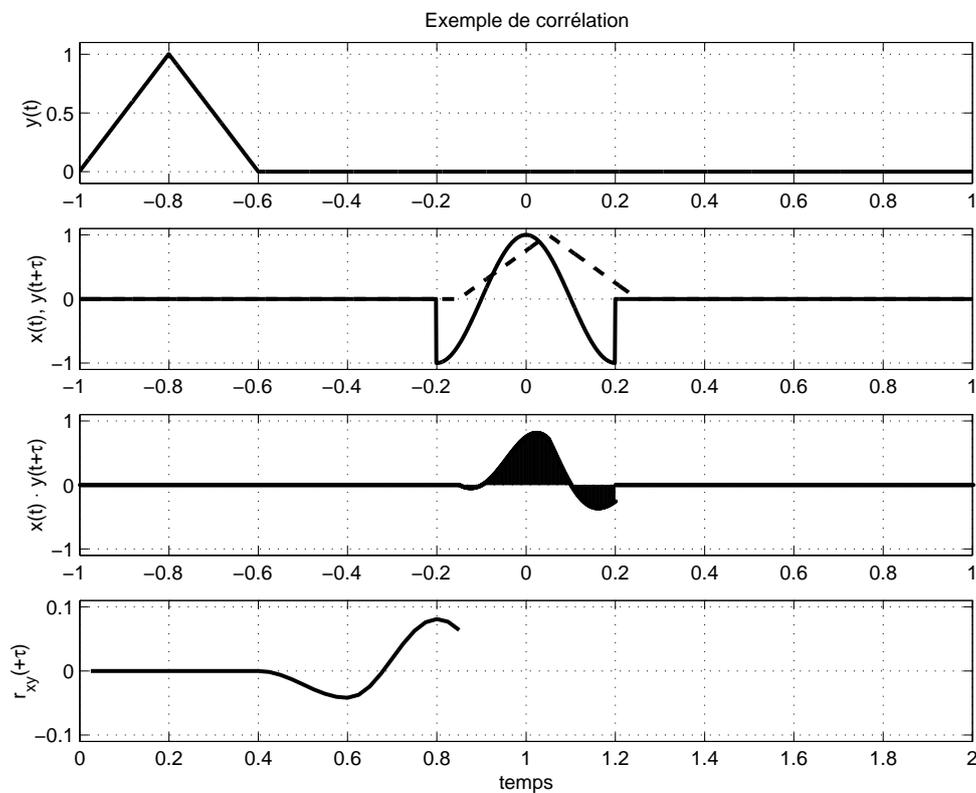


FIGURE 4.4.: Intercorrélation de deux signaux

4.3.1. Corrélation de signaux à énergie finie

Intercorrélation de deux signaux

Considérant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, on définit la fonction d'*intercorrélacion* (fic) comme l'intégrale du produit du signal $x(t)$ avec le signal $y(t)$ décalé d'une valeur τ :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad [V^2 \text{ sec}] \quad (4.27)$$

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

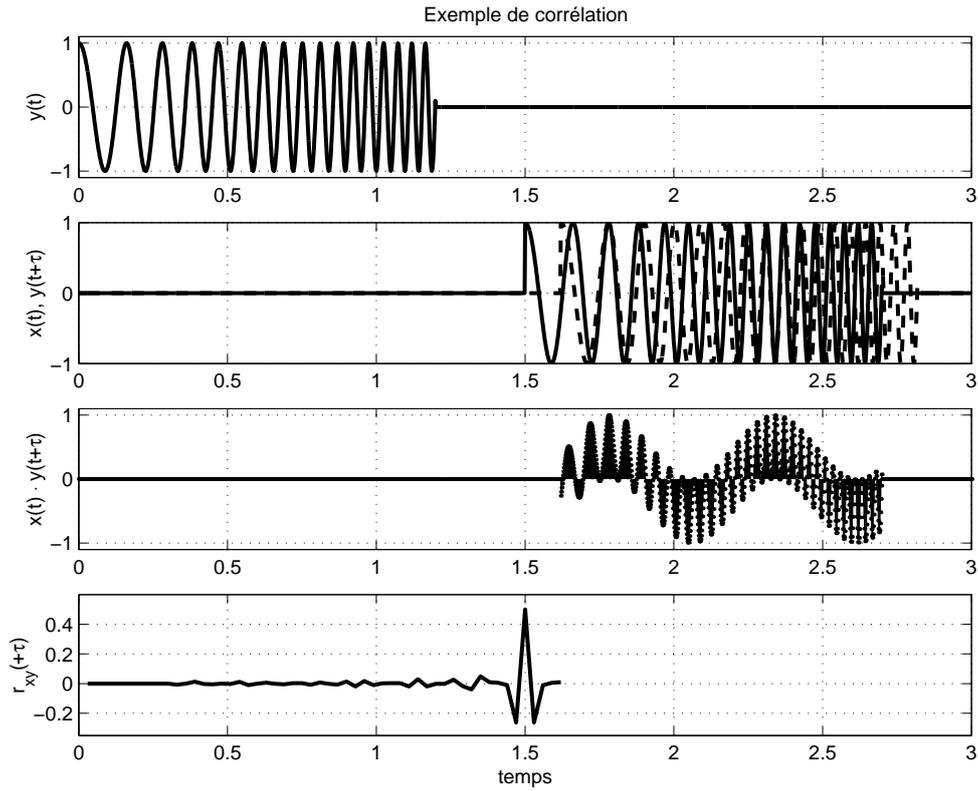


FIGURE 4.5.: Autocorrélation d'un signal chirp

Par changement de variable $\theta = t + \tau$, on montre que

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = r_{yx}(-\tau) \quad (4.28)$$

On voit ainsi que la fonction $r_{xy}(\tau)$ est aussi la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonnée Oy .

Comme on peut le constater, les fonctions d'intercorrélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = r_{xy}(\tau)$$

et de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta = x(t) \otimes y(t)$$

sont formellement très proches. On montre qu'elles sont reliées entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) \otimes y(\tau) \quad [V^2 \text{ sec}] \quad (4.29)$$

Cette relation valable dans l'espace temps a bien entendu son équivalent dans l'espace des fréquences que l'on désigne sous le nom de densité interspectrale d'énergie :

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) Y(jf) \quad [V^2 / \text{Hz}^2] \quad (4.30)$$

Autocorrélation d'un signal

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, on obtient la fonction d'*autocorrélation* (fac) du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad [\text{V}^2 \text{ sec}] \quad (4.31)$$

qui, pour un décalage nul, donne l'énergie du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (4.32)$$

4.3.2. Corrélation de signaux à puissance finie

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande ; on ne peut donc pas utiliser les définitions précédentes. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit les deux fonctions de corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y(t+\tau) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.33)$$

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.34)$$

Dans le cas d'un décalage nul, on trouve la puissance du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv X_{eff}^2 = P_x \quad [\text{V}^2] \quad (4.35)$$

Il est d'autre part évident que si les signaux sont périodiques, l'intégration se fera sur une période seulement.

La figure 4.6 montre des fonctions d'autocorrélation représentatives de quelques signaux aléatoires. On y trouve successivement trois signaux dont les puissances sont les mêmes, à savoir $0.2 [\text{V}_{eff}^2]$:

- *un bruit blanc gaussien* : son caractère non prévisible est manifeste et il est confirmé par l'étroitesse du pic de la fac.
- *un bruit à large bande* : ce signal a été obtenu en filtrant passe-bas le bruit blanc. Son contenu spectral moins étendu fait qu'il est raisonnablement possible de prévoir une valeur future pas trop éloignée. Une mesure de cet horizon de prévision est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de la fac.
- *un bruit à bande étroite* : ce signal a été obtenu en filtrant le bruit blanc à l'aide d'un filtre passe-bande. Son contenu fréquentiel étroit se manifeste par un comportement oscillant de manière assez régulière. Cette pseudo-périodicité est encore plus facile à déterminer à l'aide de sa fac : elle se mesure par la distance séparant le pic central du premier pic latéral.

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

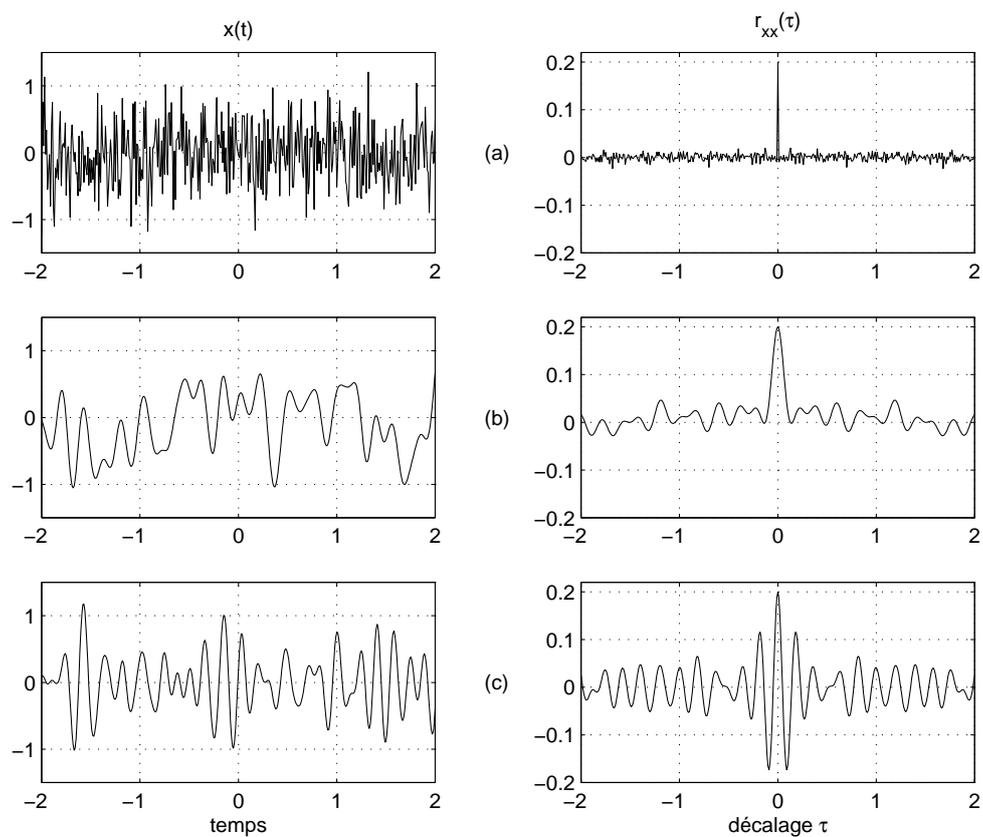


FIGURE 4.6.: Quelques signaux et leur fonction d'autocorrélation

4.4. Propriétés et calcul numérique

4.4.1. Propriétés de l'autocorrélation

On rappellera tout d'abord que la fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux. On montre alors aisément que la fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

1. Lorsque le décalage temporel est nul ($\tau = 0$), la fac est égale à l'énergie du signal pour les signaux à énergie finie :

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt \equiv W_x \quad (4.36)$$

ou, à la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie :

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2 dt \equiv P_x$$

2. Comme la correspondance entre les deux signaux ne peut pas être aussi forte que lorsque les signaux se superposent exactement cela entraîne que la fac est maximum pour un décalage nul. On a donc :

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau) \quad (4.37)$$

3. La fac est une fonction paire :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) \quad (4.38)$$

4. La fac d'un bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est une impulsion de Dirac. En effet, le bruit blanc étant formé d'une multitude de fréquences possédant la même puissance, il en résulte un signal variant si rapidement que sa valeur présente est indépendante des valeurs passées et que sa valeur est non nulle pour $\tau = 0$ seulement. On a donc :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (4.39)$$

où σ^2 est la variance du signal aléatoire ; c'est également, comme on l'a vu plus haut, la puissance du signal aléatoire.

5. La fac d'un signal périodique quelconque est une fonction périodique paire. Considérons comme exemple le signal $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega(t + \tau) + \alpha) dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (4.40)$$

On remarque ainsi que l'amplitude de cette fac est la puissance $A^2/2$ du signal $x(t)$ et que la fac ne nous donne aucune information sur la phase α du signal.

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

6. Dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, il est possible de retrouver la fac du signal non perturbé. Considérant $y(t) = x(t) + n(t)$, on a en effet :

$$\begin{aligned}
 r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) + n(t)) (x(t + \tau) + n(t + \tau)) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t) x(t + \tau) + n(t) n(t + \tau) \dots \\
 &\quad \dots + x(t) n(t + \tau) + n(t) x(t + \tau)) dt \\
 &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \quad (4.41)$$

Dans le cas où le signal $x(t)$ et le bruit $n(t)$ ne sont pas corrélés, on a bien entendu $r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$; ce qui donne finalement :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (4.42)$$

De plus, comme généralement la fac $r_{nn}(\tau)$ du bruit tend rapidement vers 0, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

Une illustration de cette dernière propriété (figure 4.7) montre comment l'autocorrélation permet d'extraire un signal noyé dans un bruit blanc. Dans cette figure, le signal est une sinusoïde d'amplitude 1 volt et le bruit blanc possède une valeur efficace de 5 volt.

Le signal extrait est reconnaissable mais encore perturbé par du bruit. Comme ce bruit résiduel diminue avec la racine carrée du nombre d'échantillon, on voit qu'on peut diminuer le bruit en augmentant le nombre d'échantillons enregistrés.

4.4.2. Exemples d'autocorrélation

La fonction d'intercorrélacion est très souvent utilisée pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation. Dans ce but, le signal émis est choisi de manière à ce que le pic de sa fonction d'autocorrélation soit très bien défini. Les signaux le plus souvent utilisés sont les signaux chirp (à fréquence variable au cours du temps) et les séquences binaires pseudo-aléatoires.

Autocorrélation d'un signal chirp

Le signal chirp est un signal sinusoïdal dont la fréquence (ou la pulsation) varie linéairement avec le temps. Il est défini comme suit

$$x(t) = A \sin(\theta(t) + \alpha)$$

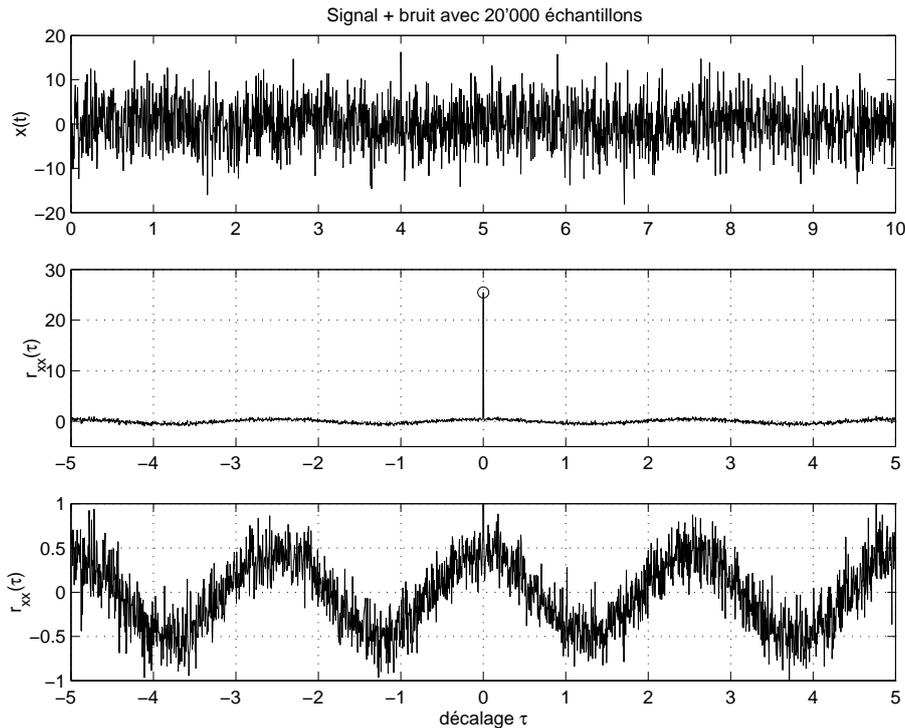


FIGURE 4.7.: Extraction d'un signal avec l'aide de l'autocorrélation

avec

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$$

$$\omega(t) = \omega_{min} + \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{t_{max}} t \quad 0 \leq t \leq t_{max}$$

Sa fonction d'autocorrélation possède un maximum très bien défini correspondant à la puissance du signal qui vaut $A^2/2$ (figure 4.8a).

Autocorrélation d'une SBPA

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est une succession de valeurs binaires (généralement ± 1) dont la distribution temporelle possède un caractère aléatoire pendant une certaine durée et qui ensuite se répète périodiquement. Sa fonction d'autocorrélation possède également un pic très bien défini égal à la puissance A^2 du signal (figure 4.8b).

4.4.3. Propriétés de l'intercorrélation

Comme pour la fonction d'autocorrélation, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions d'intercorrélation :

1. En général la fic n'est ni paire, ni impaire.

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

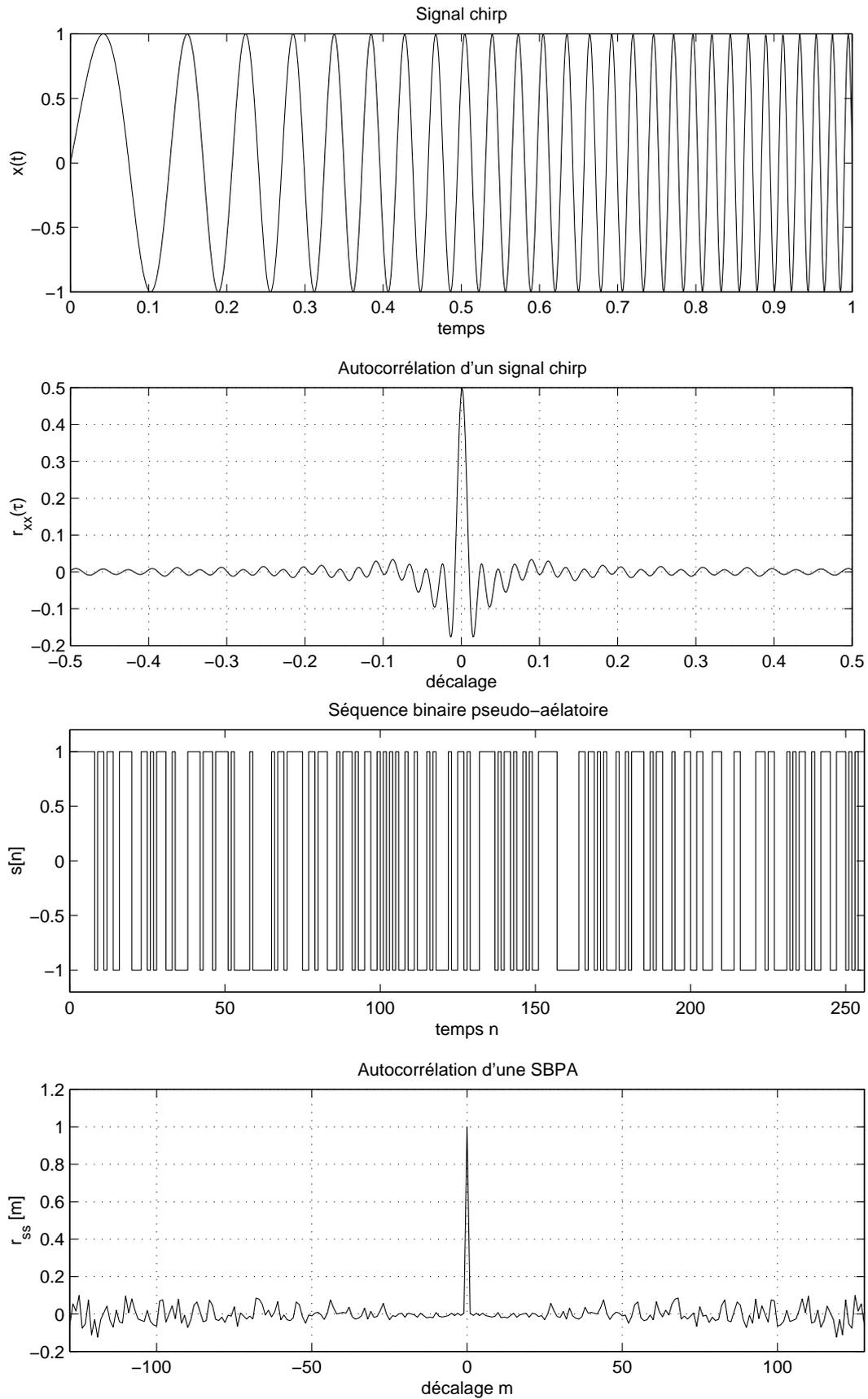


FIGURE 4.8.: Fonctions d'autocorrélation d'un signal chirp et d'une SBPA

2. Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation.
3. Comme le fait de retarder $y(t)$ par rapport à $x(t)$ d'une valeur τ équivaut à avancer le signal $x(t)$ par rapport à $y(t)$, on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \quad (4.43)$$

4. Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique.

4.4.4. Calcul numérique de la corrélation

Le calcul numérique d'une corrélation se fait en remplaçant l'intégrale par la somme du produit des valeurs échantillonnées avec une période constante unité.

Dans le cas où l'on a suffisamment de points à disposition, on peut calculer la somme sur N points sans atteindre les limites des signaux enregistrés. On a alors :

$$r_{xy}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n+m] \quad [\text{V}^2], \quad -N \leq m \leq +N \quad (4.44)$$

Dans le cas où l'on souhaite utiliser toutes les valeurs à disposition, le nombre de points intervenant dans la somme diminue au fur et à mesure que le décalage augmente. Pour éviter de biaiser le résultat de la corrélation, on la calcule alors comme suit :

$$r_{xy}[m] = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|} x[n] y[n+m] \quad [\text{V}^2], \quad 0 \leq m \leq N - 1 \quad (4.45)$$

Mais alors, on voit bien que, m augmentant, le nombre de points à disposition $N - |m|$ diminue. Ce qui, statistiquement, rend le résultat de l'intercorrélation plus incertain dans les extrémités de la fonction (voir figure 4.8b).

À cette fonction d'intercorrélation correspond son image fréquentielle $R_{xy}[jk]$ que l'on obtient après TFD des signaux numérisés $x[n]$ et $y[n]$:

$$R_{xy}[jk] = \frac{1}{N} X^*[jk] \cdot Y[jk] \quad [\text{V}^2] \quad (4.46)$$

où k est le compteur fréquentiel tel que

$$f = k \frac{f_e}{N} \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (4.47)$$

4.5. Rapport signal sur bruit (SNR)

Comme on va le voir plus loin, les fonctions de corrélation sont très puissantes pour extraire un signal $x(t)$ masqué par un bruit $n(t)$. Afin de chiffrer précisément la qualité (mauvaise ou non) d'un signal, on utilise la notion de rapport signal/bruit (*Signal to Noise Ratio*) définie comme suit :

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_x}{P_n} \right) = 20 \log \left(\frac{X_{eff}}{N_{eff}} \right) \quad [\text{dB}] \quad (4.48)$$

Un SNR égal à 0 dB, signifie que la puissance P_n du bruit est égale à celle du signal P_x ou, de manière équivalente, que $X_{eff} = N_{eff}$.

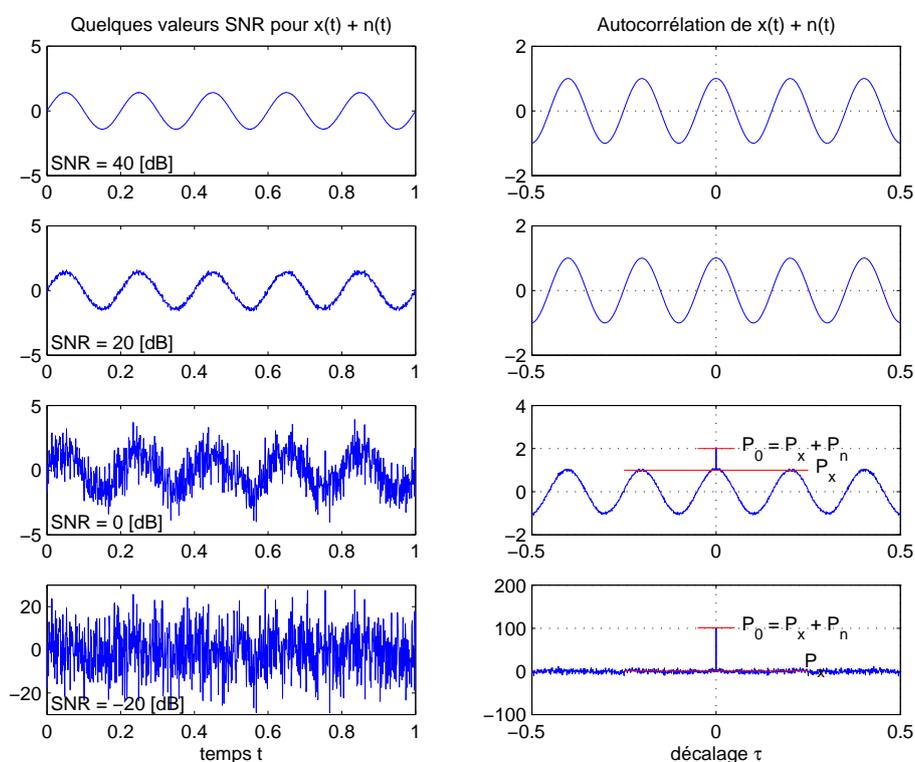


FIGURE 4.9.: Illustrations de quelques valeurs SNR

Dans la figure 4.9, la colonne de gauche montre un signal sinusoïdal auquel est ajouté un bruit de plus en plus fort. Même si visuellement on observe qu'un SNR de 40dB est presque indétectable, il est important de savoir qu'en pratique il est fréquent d'exiger une qualité de signaux dont les SNR sont supérieurs à 60dB, voire 96dB en haute-fidélité audio. Malheureusement, il n'est pas rare de devoir traiter des signaux dont le SNR est inférieur à 0dB et dans ces cas là, comme on le verra, les fonctions de corrélation sont extrêmement utiles.

Enfin, comme on l'a vu dans la section précédente, les fonctions d'intercorrélation sont nulles pour des signaux indépendants, non corrélés. Ainsi, dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par un bruit additif $n(t)$ indépendant, la fonction d'autocorré-

lation est simplement égale à la somme des deux fac

$$r_{x+n}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) + r_{nn}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (4.49)$$

On voit alors que la puissance de deux signaux indépendants est égale à la somme des puissances individuelles car

$$r_{x+n}(0) = P_{tot} = r_{xx}(0) + r_{nn}(0) = P_x + P_n \quad (4.50)$$

Ce qui permet parfois, lorsque le signal $x(t)$ est périodique, d'estimer les deux puissances et d'en déduire la valeur du SNR comme le montre la colonne de droite de la figure 4.9.

4.6. Trois applications de la corrélation

4.6.1. Le radar

Comme exemple illustratif, imaginons le principe du radar avec lequel on désire détecter la présence ou non d'un avion puis connaître la distance à laquelle il se trouve.

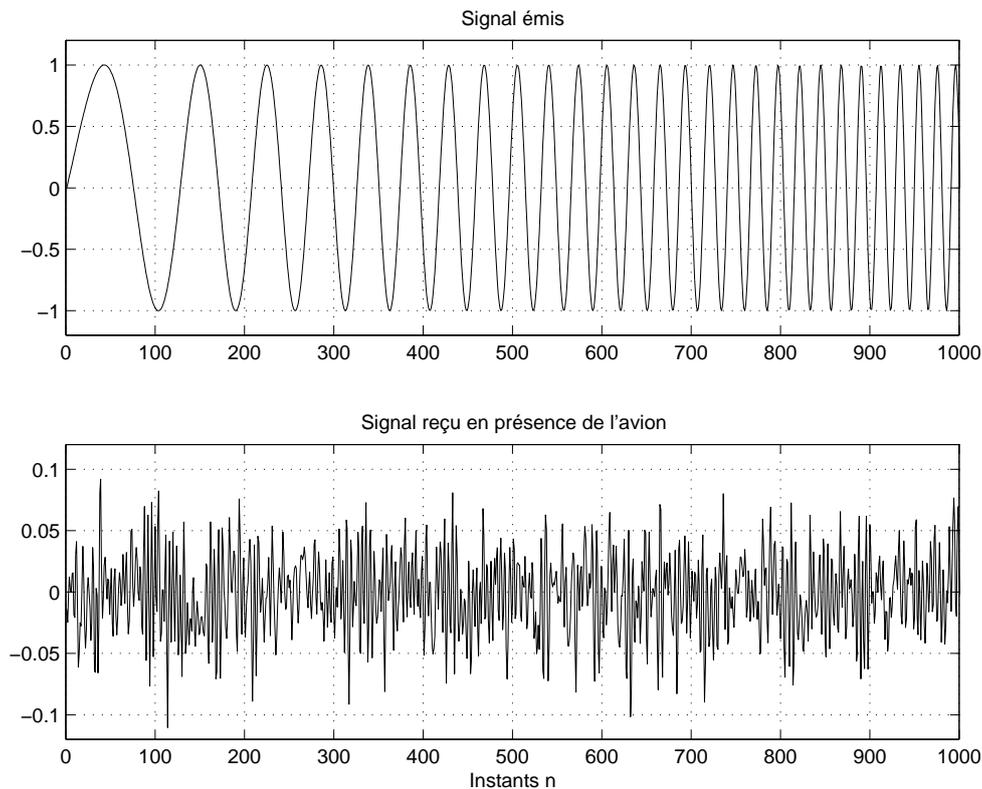


FIGURE 4.10.: Signaux émis et reçus par un radar

Le radar émet un signal chirp $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé par l'avion (figure 4.10). S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

$y(t)$ est constitué d'un bruit $n(t)$ seulement. De plus, il est évident que si un avion est présent, le signal $y(t)$ reçu en retour consiste en une version atténuée, retardée, et fortement bruitée du signal émis $x(t)$. Ainsi, le signal reçu peut être décrit par :

$$y(t) = Ax(t - t_d) + n(t)$$

avec :

- A = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
 - t_d = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
 - $n(t)$ = le bruit additif capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.
- Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle ne permet pas de déceler la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion (figure 4.10).

Les figures 4.11a et 4.11b illustrent le principe de l'utilisation d'un signal chirp pour détecter un avion et mesurer sa distance. Considérons les deux situations suivantes :

1. **Absence d'un avion :** Le signal reçu $y(t)$ est fortement atténué et perturbé. Seule une intercorrélacion entre $x(t)$ et $y(t)$ permet de savoir si un avion est présent ou non. Dans ce dernier cas, aucun pic bien distinct n'apparaît dans le graphe (figure 4.11a).
2. **Présence d'un avion :** Ici, l'intercorrélacion fait apparaître un pic très étroit se dégageant nettement au-dessus du bruit de fond (figure 4.11b). On notera que ce pic est légèrement décalé vers la droite par rapport à la position centrale ; ce décalage correspond au temps d'aller et retour du signal émis. Une fois ce temps déterminé, on peut calculer la distance de l'avion par rapport au radar.

4.6.2. La mesure d'un débit

On présente ici un débitmètre industriel réalisé par l'Institut d'Automatisation Industrielle de la heig-vd. Le principe, de même que sa réalisation, en est très simple.

Une caméra fournit régulièrement des images d'un flux de granulés (figure 4.12). En effectuant la comparaison par intercorrélacion de deux images successives, on obtient un point lumineux se situant aux coordonnées du déplacement $\Delta y(t)$. Connaissant la section A du conduit, on peut calculer le débit au cours du temps :

$$Q(t) = A \cdot \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}$$

La seule difficulté de cette mesure réside dans le temps nécessaire pour calculer l'intercorrélacion en temps réel. En effet, si l'on imagine que l'on dispose d'images de 100x400 pixels, on doit traiter 40'000 pixels par intercorrélacion ; ce qui entraîne un nombre d'opérations valant environ

$$N_{op} \simeq N_{pxl}^2 = 16 \cdot 10^8$$

Même avec un DSP très performant ($T_{clock} \simeq 10$ ns), il n'est pas possible de fournir une information en moins d'une seconde. Par contre, en utilisant la FFT on peut

4.6. Trois applications de la corrélation

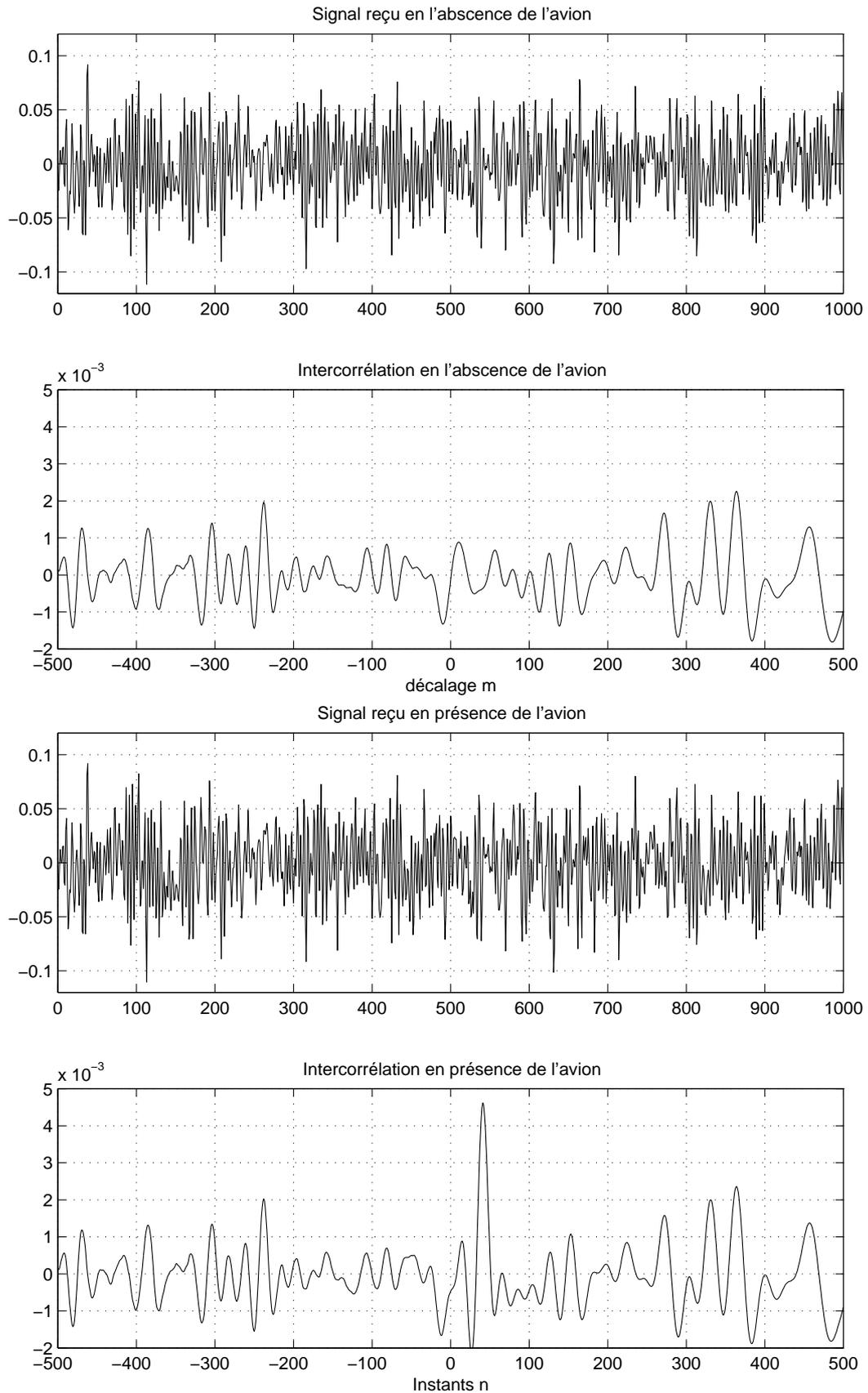


FIGURE 4.11.: a) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit
b) Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit corrélé

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

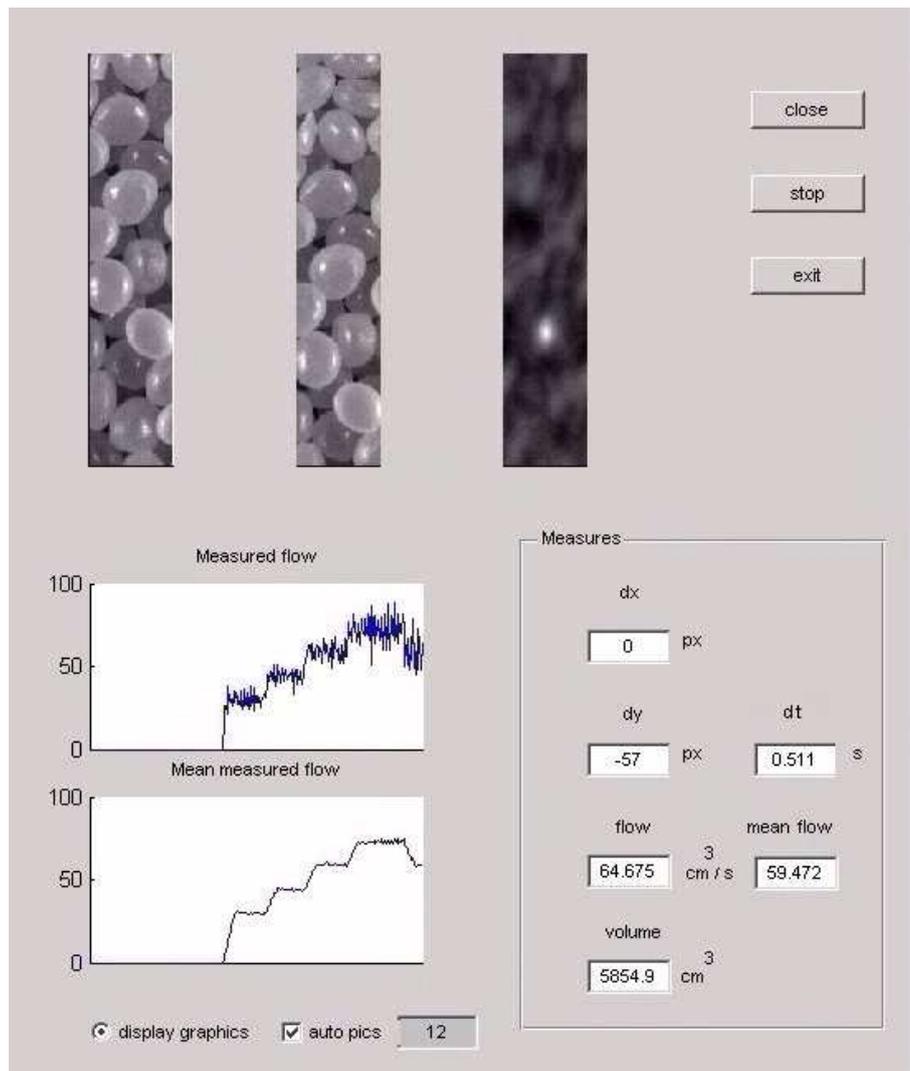


FIGURE 4.12.: Interface du débitmètre de granulés

espérer fournir des résultats dans le temps imparti car celle-ci demande beaucoup moins d'opérations

$$N_{op} \simeq N_{pxl} \log_2(N_{pxl}) \simeq 40 \cdot 10^3 \cdot 15 = 6 \cdot 10^5$$

L'algorithme de calcul est alors le suivant

- 1) acquisition de image1
- 2) acquisition de image2
- 3) FFT bidimensionnelle de image1 et image2 => IMG1 et IMG2
- 4) calcul de $R_{xy} = \text{conj}(\text{IMG1}) * \text{IMG2}$
- 5) FFT inverse pour obtenir rxy
- 6) recherche des coordonnées du maximum d'intensité

Une fois ces calculs effectués, il reste encore suffisamment de temps pour calculer le débit actuel, lisser cette valeur, afficher les images, etc (figure 4.12).

4.6.3. La mesure du rythme cardiaque

On s'intéresse ici à la mesure automatique des pulsations cardiaques à l'aide de moyens simples : un stéthoscope muni d'une capsule microphonique et la carte-audio d'un PC permettant d'enregistrer le son caractéristique des battements cardiaques.

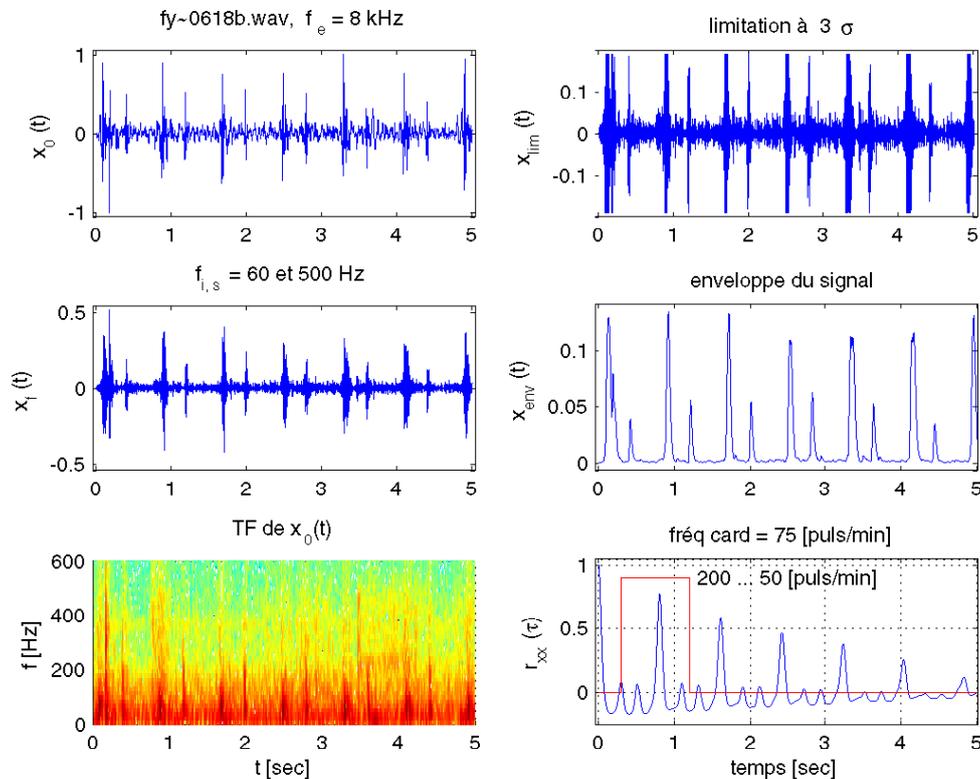


FIGURE 4.13.: Analyse d'un signal phonocardiographique

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

D'un point de vue spectral, ces pulsations de très basse-fréquence (environ une pulsation par seconde) modulent un souffle basse-fréquence situé aux environs de 100 Hz (modulation d'amplitude). C'est ce qui rend le son audible puisque l'oreille humaine n'entend pas les sons inférieurs à 20 Hz. Comme le rythme cardiaque est périodique, on peut espérer, grâce à l'autocorrélation, éliminer le bruit environnant et faire apparaître clairement la période du rythme cardiaque.

Cependant, à cause des perturbations liées à la mesure, les choses ne sont pas aussi simples et, très vite, on se rend compte que la recherche de l'enveloppe du signal mesuré sera bien plus fructueuse. Les différentes étapes à parcourir pour obtenir le rythme cardiaque avec un bon taux de réussite sont illustrées par la figure 4.13.

Après acquisition du signal $x_0(t)$ à l'aide de la carte son d'un PC ($f_e = 8$ kHz) et sa sauvegarde dans un fichier *.wav, on peut, avec Matlab, effectuer les calculs ci-dessous :

1. élimination des fréquences inintéressantes par filtrage passe-bande du signal entre 60 et 500 Hz $\Rightarrow x_f(t)$;
2. limitation des amplitudes du signal à $3 \cdot \sigma$ où σ est l'écart-type ou valeur efficace du signal filtré $\Rightarrow x_{lim}(t)$;
3. recherche de l'enveloppe du signal ; celle-ci s'obtient de manière similaire à la démodulation d'amplitude par le redressement du signal et son filtrage passe-bas $\Rightarrow x_{env}(t)$;
4. autocorrélation de l'enveloppe $\Rightarrow r_{xx}(\tau)$;
5. recherche du maximum de $r_{xx}(\tau)$ situé dans le domaine des pulsations cardiaques ordinaires ; pour des pulsations comprises entre 50 et 200 puls/min, le premier pic se trouvera entre 1.2 et 0.3 secondes.

Cet exemple montre, à l'évidence, combien l'autocorrélation est puissante pour extraire une information noyée dans du bruit.

4.7. Description des signaux aléatoires

Par définition, les signaux aléatoires ne peuvent pas être décrits analytiquement. On peut cependant tenter de les classer dans une des trois catégories types qui sont :

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (figure 4.14a) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles (figure 4.14b) ;
- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes décroissantes (figure 4.14c).

Comme aucune description analytique n'est possible pour les signaux aléatoires, on tente d'en extraire des moyennes temporelles en observant leurs fonctions d'autocorrélation (fac) illustrées à la figure 4.15. On voit alors que la fac du premier signal est extrêmement étroite ; on la modélise par une impulsion de Dirac. La deuxième fac rappelle une fonction en sinus cardinal. Enfin, dans la partie non bruitée, la troisième peut être modélisée par une exponentielle décroissante symétrique.

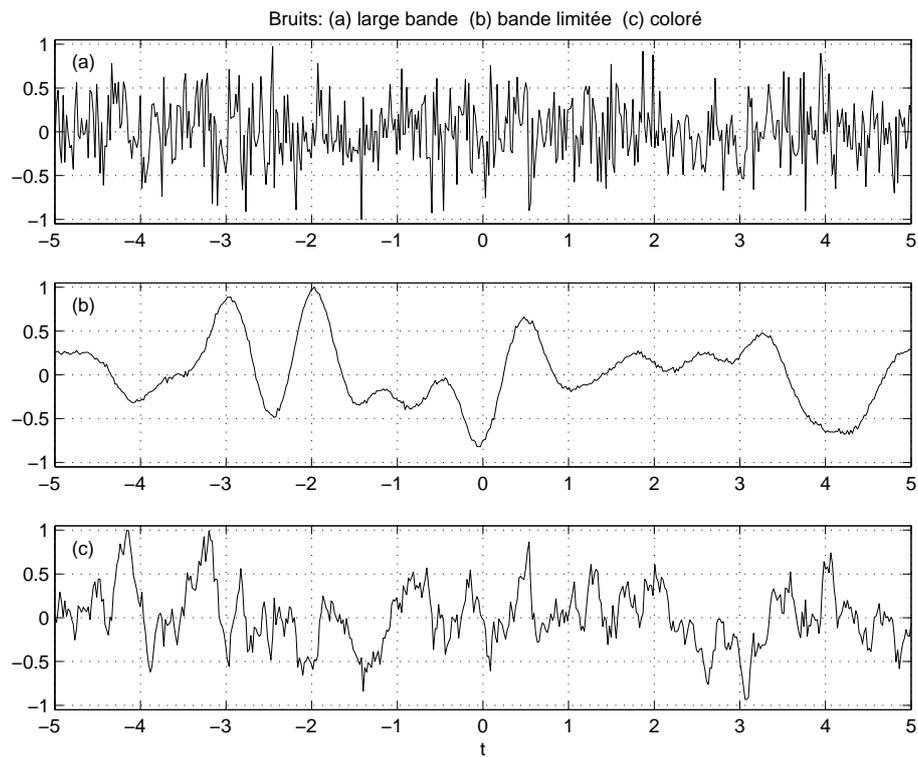


FIGURE 4.14.: Trois signaux aléatoires types

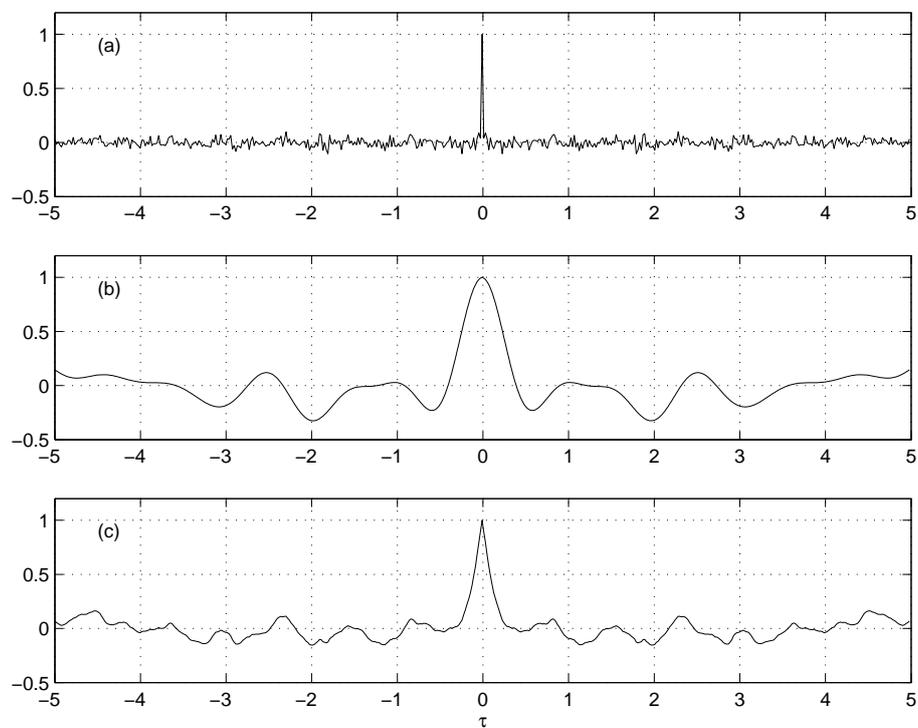


FIGURE 4.15.: Fonctions d'autocorrélation des trois bruits types

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

On définit alors la densité spectrale de puissance $R_{xx}(jf)$ comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $r_{xx}(\tau)$:

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad [V^2] \quad (4.51)$$

$$R_{xx}(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad [V^2 \text{ sec}] = [V^2/\text{Hz}] \quad (4.52)$$

L'observation de la densité spectrale de puissance (figure 4.16a) des trois signaux permet d'en déduire quelques propriétés et de définir des modèles représentant aussi bien que possible chacune des trois densités spectrales de puissance (figure 4.16b).

Le bruit blanc à densité spectrale constante et bande infinie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$ et sa densité spectrale de puissance est constante. Il est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = A^2 \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (4.53)$$

dont la fac est une impulsion de Dirac :

$$r_{xx}(\tau) = A^2 \cdot \delta(\tau) \quad [V^2] \quad (4.54)$$

Le théorème de Parseval nous dit alors que sa puissance est infinie. Comme cela n'est pas possible, on préfère travailler avec un modèle plus réaliste, le bruit à densité spectrale constante et à bande limitée

Le bruit à densité spectrale constante et bande limitée Il contient toutes les fréquences de $-f_{max}$ à $+f_{max}$. Sa puissance finie est souvent désignée par la variance statistique σ_x^2 qui n'est autre que le carré de la valeur efficace X_{eff}^2 du signal. Ce bruit est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2f_{max}} & \text{si } -f_{max} < f < +f_{max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (4.55)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(2\pi f_{max}\tau)}{2\pi f_{max}\tau} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (4.56)$$

Le bruit coloré à puissance finie Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$. Mais sa puissance σ_x^2 est finie car son contenu spectral diminue assez rapidement avec la fréquence. Un modèle souvent utilisé est le suivant :

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad -\infty < f < +\infty \quad [V^2/\text{Hz}] \quad (4.57)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-a|\tau|} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (4.58)$$

avec

$$a = 2\pi f_c \quad [1/\text{sec}] \quad (4.59)$$

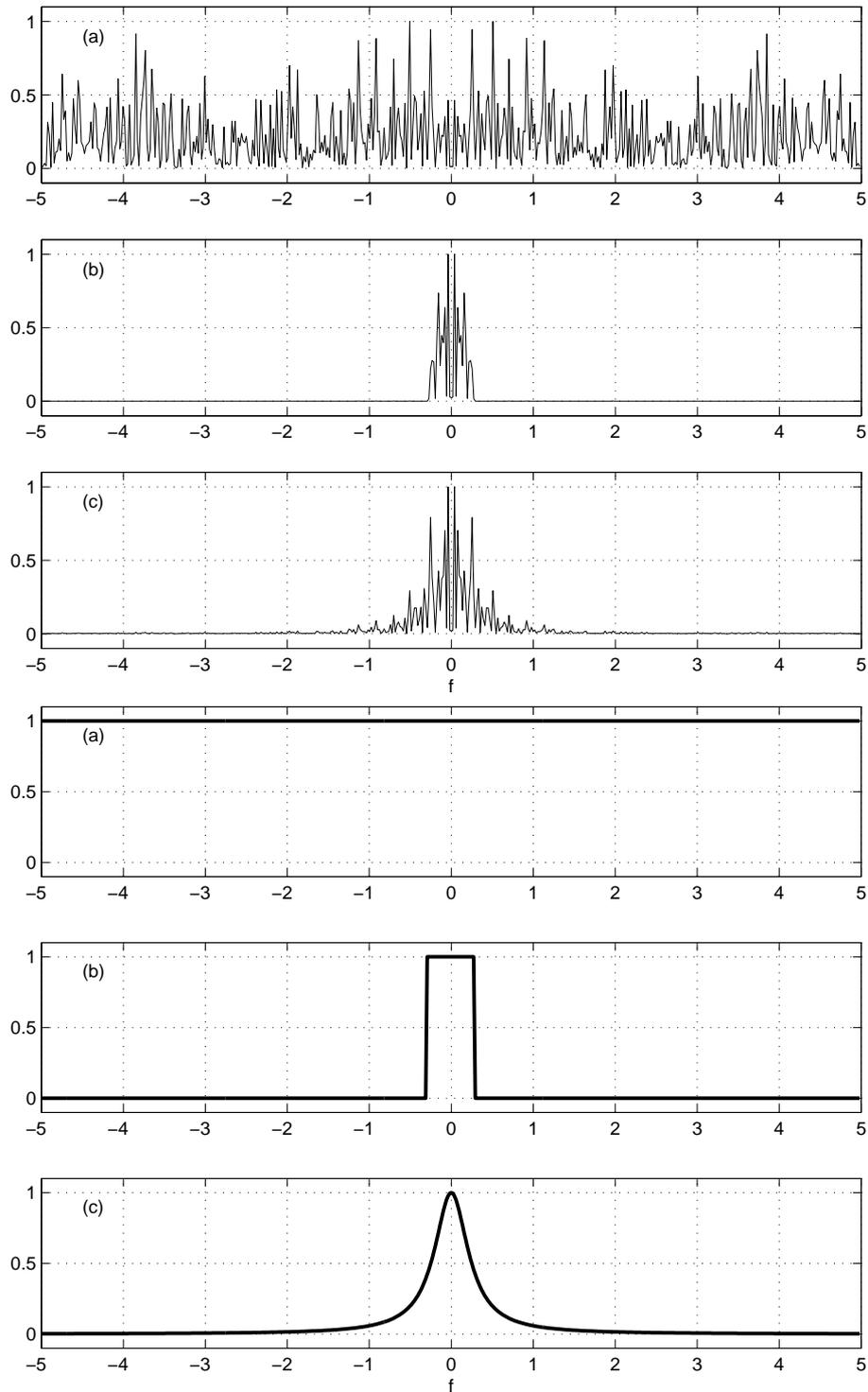


FIGURE 4.16.: a) Densités spectrales de puissance des trois bruits types
 b) Trois modèles simples pour les représenter

4.7.1. Tension équivalente de bruit

Il est intéressant de relever que, pour les composants semiconducteurs, la donnée de la densité spectrale de puissance $R(f)$ est remplacée par une *tension équivalente de bruit* qui n'est autre que la racine carrée de la densité spectrale de puissance :

$$e_n(f) \equiv \sqrt{R(f)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (4.60)$$

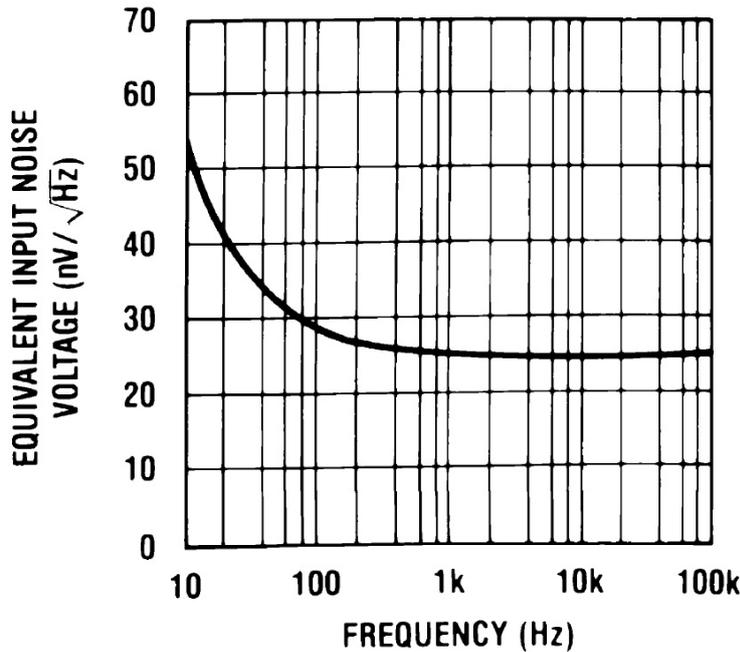


FIGURE 4.17.: Tension équivalente de bruit à l'entrée d'un LF 411

Par exemple, les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel LF411 (fig. 4.17) montrent que, dans les basses fréquences ($f < 30$ Hz), le spectre du bruit décroît à raison de 10 [dB] par décade environ (flicker noise = bruit de grenaille) et qu'il reste pratiquement constant au delà de 300 Hz. Il vaut alors :

$$e_n \cong 25 \left[\frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad f > 300 \text{ [Hz]}$$

Connaissant cette valeur, on peut ainsi estimer la valeur efficace du bruit dans un domaine de fréquences donné. S'intéressant, par exemple, au domaine de fréquences

$$1 \text{ kHz} < f < 100 \text{ kHz}$$

la puissance du bruit vaut

$$P_n = \int_{f_1}^{f_2} e_n^2(f) df \simeq e_n^2 \cdot \Delta f = 625 \cdot 10^{-18} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \cdot 99 \text{ kHz} = 6.2 \cdot 10^{-11} [\text{V}_{eff}^2]$$

Ce qui correspond à une tension efficace de bruit d'environ $8\mu\text{V}_{eff}$ présente à l'entrée de l'amplificateur opérationnel.

4.8. Systèmes linéaires et densités spectrales

Il est très fréquent que l'on doive étudier des signaux reliés entre-eux par le passage au travers d'un système linéaire, par exemple un filtre. Celui-ci étant décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(jf)$, les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont alors reliés entre eux par le produit de convolution

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta \quad (4.61)$$

On s'intéresse ici à préciser, en particulier aux niveaux des unités, quelles sont les relations temporelles et fréquentielles entre des signaux à énergie finie ou à puissance finie.

4.8.1. Signaux à énergie finie

Ce sont les signaux dont la TF existe car ils sont intégrables en valeur absolue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.62)$$

Il s'agit généralement de signaux temporaires ou à décroissance rapide. On définit alors les **densités spectrales d'amplitude** (DSA) des signaux $x(t)$ et $y(t)$

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

$$Y(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad [\text{V/Hz}]$$

et l'on a

$$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf) \quad (4.63)$$

Pour ces signaux, les fonctions de corrélation se calculent comme suit

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt \quad [\text{V sec}] \quad (4.64)$$

et on peut montrer que les relations suivantes sont vraies :

$$R_{xx}(f) = X^*(jf) \cdot X(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.65)$$

$$R_{xy}(jf) = X^*(jf) \cdot Y(jf) = |X(jf)|^2 \cdot H(jf) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.66)$$

$$R_{yy}(f) = |H(jf)|^2 \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}^2] \quad (4.67)$$

4.8.2. Signaux à puissance finie

La TF de ces signaux n'existe pas car leur énergie est infinie. Il s'agit généralement de signaux aléatoires permanents. On les modélise alors par leur fonction d'auto-corrélation

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x(t + \tau) dt \quad [\text{V}^2] \quad (4.68)$$

et on définit leur **densité spectrale de puissance** (DSP) $R_{xx}(f)$ comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$R_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.69)$$

Lorsque les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont reliés entre eux par une opération de filtrage linéaire, le produit de convolution relie également les fonctions de corrélation entre elles et l'on a :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) r_{xx}(\tau - \theta) d\theta \quad [\text{V}^2] \quad (4.70)$$

$$R_{xy}(jf) = TF(r_{xy}(\tau)) = H(jf) \cdot R_{xx}(f) \quad [\text{V}^2/\text{Hz}] \quad (4.71)$$

où $R_{xy}(jf)$ est la **densité interspectrale de puissance**.

Le tableau 4.1 réunit les relations existant entre les signaux, les fonctions de corrélation et les densités spectrales d'amplitudes (DSA) ou de puissance (DSP).

	Domaine temporel	DSA
Énergie finie	signaux $x(t), y(t)$	$TF(x(t), y(t))$
[unités]	[V]	[V/Hz]
entrée	$x(t)$	$X(jf)$
système	$h(t)$	$H(jf)$
sortie	$y(t)$	$Y(jf)$
relations	$y(t) = h(t) \otimes x(t)$	$Y(jf) = H(jf) \cdot X(jf)$
Puissance finie	Corrélation	DSP
[unités]	[V ²]	[V ² /Hz]
entrée	$r_{xx}(\tau)$	$R_{xx}(f)$
système	$h(\tau)$	$H(jf)$
sortie	$r_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(jf)$
relations	$r_{xy}(\tau) = h(\tau) \otimes r_{xx}(\tau)$	$R_{xy}(jf) = H(jf) \cdot R_{xx}(f)$
	—	$R_{yy}(f) = H(jf) ^2 \cdot R_{xx}(f)$

TABLE 4.1.: Relations temporelles et fréquentielles

4.9. Signaux, spectres et statistique

La page suivante, tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [2], illustre les propriétés temporelles, spectrales et statistiques de quelques signaux. Comme on l'a déjà dit

plus haut, ces descriptions ne sont que des points de vue différents d'une même réalité : le signal temporel $x(t)$. Ces points de vue sont complémentaires et c'est le but du traitement des signaux de les relier entre eux et d'en tirer efficacement le maximum d'information.

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

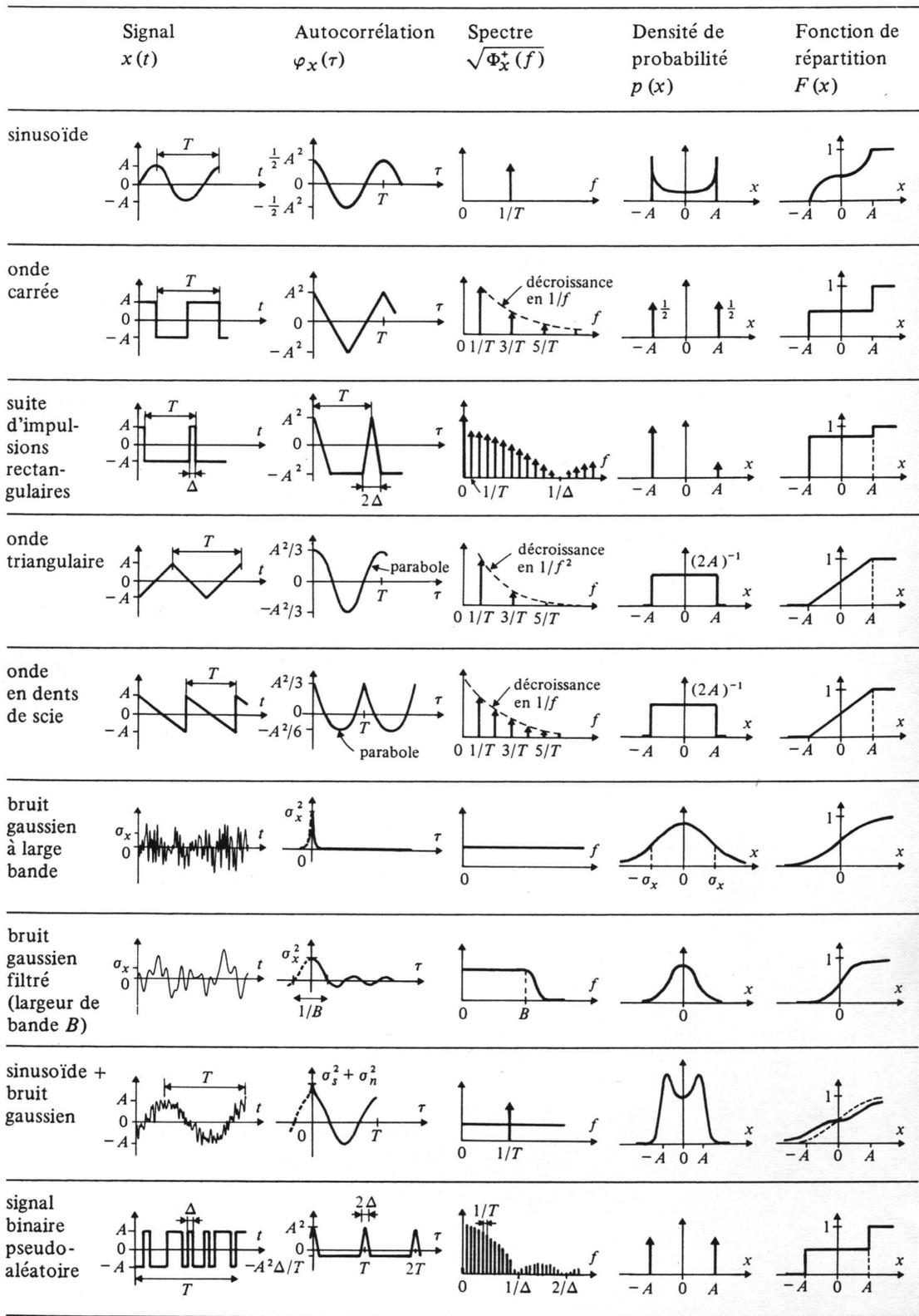


FIGURE 4.18.: Descriptions temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques [2]

4.10. Quelques exemples

Exemple 1 : Signal temporel

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \exp(-at)\epsilon(t)$ à un filtre passe-bande idéal. On demande :

1. Dessinez la réponse fréquentielle du filtre.
2. Esquissez les densités spectrales d'amplitude $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
3. Que valent les densités spectrales d'énergie $S_1(f)$ et $S_2(f)$?
4. Calculez les énergies W_1 et W_2 des signaux d'entrée et de sortie.
5. A.N. : $U_0 = 10$ [V], $a = 24'000$ [1/sec], $f_1 = 4$ [kHz], $f_2 = 6$ [kHz]

Solution :

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Exemple 2 : Signal aléatoire permanent

Un opérateur vous informe qu'il a mesuré à la sortie d'un amplificateur un bruit large bande dont la valeur efficace vaut $U_{1,eff} = 0.01 [V_{eff}]$.

1. Quelle est la puissance P_1 de ce bruit ? L'information apportée par l'opérateur est-elle significative et suffisante ?
2. Après discussion, celui-ci précise que cette mesure a été effectuée avec un voltmètre à vraie valeur efficace dont la bande passante est de 100 kHz. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance correspondant.
3. Esquissez $R_1(f)$ et calculez sa valeur.
4. La sortie de cet amplificateur est branchée sur un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est fixée à 1 kHz. Esquissez la densité spectrale de puissance $R_2(f)$ du bruit après le filtre.
5. Quelle valeur efficace $U_{2,eff}$ mesurerez-vous après le filtre ?

Solution :

Exemple 3 : Signal aléatoire permanent

À la sortie d'un amplificateur dont la bande passante est de 100 [kHz], on mesure un bruit de 10 [mV_{eff}]. On filtre ce bruit avec un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1.6$ [k Ω] et $C = 100$ [nF].

1. Choisissez un modèle de densité spectrale de puissance $R_1(f)$ du bruit de sortie de l'amplificateur et calculez sa valeur.
2. Calculez la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
3. Esquissez sur un même diagramme les densités spectrales de puissance $R_1(f)$ et $R_2(f)$ présentes à l'entrée et à la sortie du filtre RC.
4. Quelle sera la valeur efficace de la tension à la sortie du filtre RC ?

Solution :

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Exemple 4 : Signal temporaire

On applique une impulsion de tension d'amplitude E et de largeur Δt à un filtre passe-bande LC-R caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et son facteur de qualité Q_0 . Admettant que la largeur de l'impulsion est beaucoup plus petite que les temps caractéristiques du filtre :

1. Esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ainsi que $|U_1(jf)|$ et $|U_2(jf)|$.
2. Calculez $U_1(jf)$ et $U_2(jf)$.
3. Calculez l'énergie W_1 du signal d'entrée.
4. Calculez l'énergie W_2 du signal de sortie du filtre.
5. A.N. : $E = 10$ [V], $\Delta t = 10$ [μ sec], $f_0 = 1$ [kHz], $Q_0 = 10$.

Solution :

4.11. Exercices

Correl 0

Considérant deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ définis comme suit :

n	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0

calculez et représentez la fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+m)$$

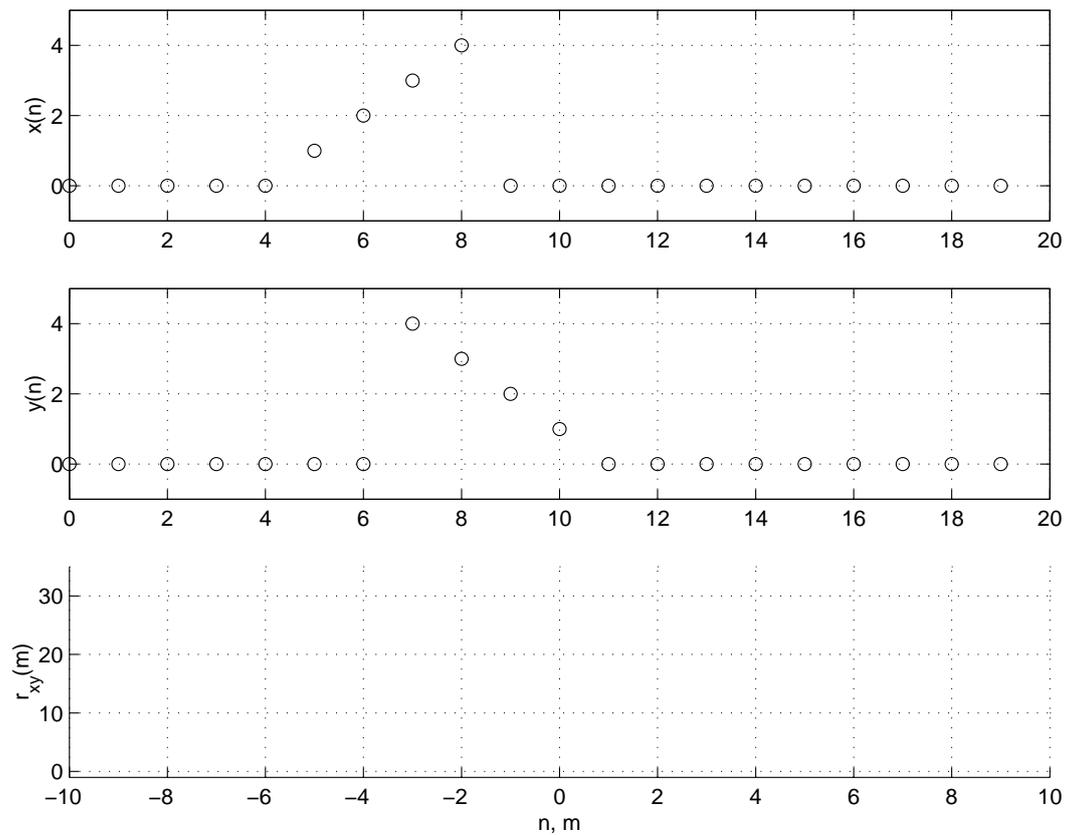


FIGURE 4.19.: Exercice Corr 0

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

Correl 1 Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

1. esquissez $x(t)$;
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes $\tau = 0, \pm\Delta t, \pm 2\Delta t$;
3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Correl 2 Considérant les 3 signaux suivants :

- une exponentielle décroissante $x(t)$ d'amplitude A et de constante de temps τ_1 ,
- une impulsion rectangulaire $y(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt ,
- une impulsion triangulaire $z(t)$ centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2\Delta t$,

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux;
2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

Correl 3 Calculez la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $h(t)$ de l'exercice Corr 3. Avant de vous lancer dans les calculs, imaginez où se situera le maximum de la fonction. Esquissez le résultat de l'intercorrélation.

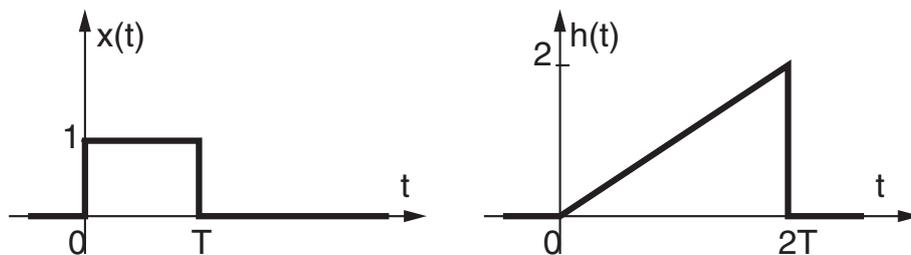


FIGURE 4.20.: Exercice Corr 3

Correl 4 On souhaite connaître la fonction d'intercorrélation des signaux $h_2(t)$ et $h_1(t)$ de l'exercice Corr 4 :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

Pour cela :

1. imaginez tout d'abord l'endroit où se situera le maximum de la fic ;
2. montrez que, pour les points particuliers suivants $\tau = \{-2\Delta t, -\Delta t, 0, +\Delta t\}$, on a, respectivement, $h_{21}(\tau) = \{0, A^2 \frac{\Delta t}{3}, A^2 \frac{\Delta t}{6}, 0\}$;
3. pourquoi, comme il est précisé dans la remarque ci-dessous, le calcul est-il plus simple lorsque τ est compris entre 0 et Δt ?
4. que pensez-vous des résultats graphiques obtenus avec Matlab (figure 4.21) ?

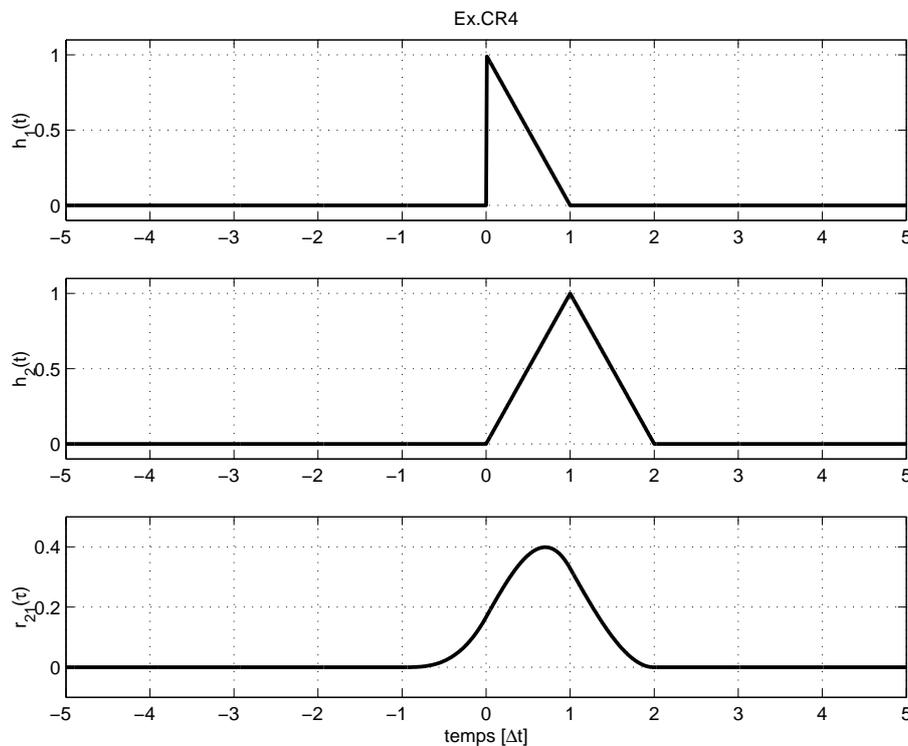


FIGURE 4.21.: Exercice Corr 4

Remarque Pour donner une idée de ce que représente l'approche analytique, voici le calcul de la partie la plus simple correspondant au décalage avancé de $h_1(t + \tau)$ avec τ compris entre 0 et Δt .

Comme l'on a :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) h_1(t + \tau) dt$$

il faut commencer par décrire les 2 fonctions suivantes :

$$h_2(t) = \frac{A}{\Delta t} t \quad h_1(t + \tau) = A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t} \right)$$

4. DESCRIPTION ET COMPARAISON DES SIGNAUX

valables pour $0 < t < \Delta t$, respectivement, $-\tau < t < \Delta t - \tau$.

Puis, tenant compte des parties nulles, il vient :

$$\begin{aligned}
 r_{21}(\tau) &= \int_0^{\Delta t - \tau} h_2(t) h_1(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^{\Delta t - \tau} \frac{A}{\Delta t} t A \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t - \tau} \left(t - \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{\tau t}{\Delta t}\right) dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\Delta t} - \frac{\tau t^2}{2\Delta t}\right) \Big|_0^{\Delta t - \tau} \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \left(\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) - \frac{(\Delta t - \tau)^3}{3\Delta t}\right) \\
 &= A^2 \frac{(\Delta t + \tau)^2}{6 \Delta t^2} (\Delta t - \tau)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier les 2 valeurs suivantes :

$$r_{21}(\tau = 0) = A^2 \frac{\Delta t}{6} \quad r_{21}(\tau = \Delta t) = 0$$

SAL 1 Sachant qu'un signal aléatoire $x(t)$ décrit par sa fac

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 2\pi f_c$$

possède la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi f_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

on demande de calculer sa puissance de deux manières différentes. Que vaut-elle ?

Réponse : $P_x = \sigma_x^2$

SAL 2 Sachant qu'un bruit $x(t)$ dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = 10^{-4} [\text{V}^2] \exp(-a |\tau|) \quad \text{avec } a = 1000 [\text{sec}^{-1}]$$

passé au travers d'un filtre passe-bande **idéal** caractérisé par ses deux fréquences de coupure $f_i = 100 [\text{Hz}]$ et $f_s = 200 [\text{Hz}]$, on demande de calculer les valeurs efficaces des signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$.

Réponse : $U_{x,eff} = 10 \text{ mV}$, $U_{y,eff} = 3.3 \text{ mV}$

SAL 3 On considère un bruit large-bande $x(t)$ dont la densité spectrale de puissance est constante et vaut

$$R_{xx}(f) = R_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$$

Sachant que le signal $x(t)$ passe au travers d'un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ nF}$, calculez la valeur efficace du bruit $y(t)$ en sortie du filtre.

Réponse : $P_y = \pi f_c R_0$, $U_{y,eff} = 700 \text{ mV}$

SAL 4 Idem SAL 3, mais avec un filtre CR passe-haut. Au vu du résultat obtenu, quel est le problème ? Que pensez-vous de $R_{xx}(f)$?

Rappel : $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \text{atan}(x)$

SAL 5 On considère un bruit $x(t)$ de puissance moyenne $P_x = 10^{-2} \text{ V}_{eff}^2$. Admettant que sa densité spectrale de puissance $R_{xx}(f)$ puisse être décrite par une fonction triangulaire de hauteur R_0 et de base $2f_0 = 20 \text{ kHz}$, calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = P_x/f_0 = 10^{-6} \text{ [V}^2/\text{Hz]}$

SAL 6 Admettant qu'un signal aléatoire de puissance P_x est décrit par la densité spectrale de puissance suivante

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} R_0 \cdot \left(\frac{|f|-f_0}{f_0}\right)^2 & \text{si } -f_0 < f < +f_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

calculez la valeur de R_0 après avoir dessiné $R_{xx}(f)$.

Réponse : $R_0 = \frac{3}{2} P_x/f_0$

SAL 7 On admet qu'un signal $x(t)$ possède une densité spectrale de la forme

$$R_{xx}(f) = R_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \quad -\infty < f < +\infty$$

Sachant que la tension efficace du signal $x(t)$ vaut U_{eff} , calculez R_0 .

Réponse : $R_0 = P_x/(\pi f_0)$

Bibliographie

- [1] B.P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael CA, 1992
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1984
- [3] M. Alonso, E.J. Finn, *Physique générale : champs et ondes*, Editions pédagogiques, Montréal, 1970

Deuxième partie .

**Étude des signaux et systèmes
numériques**

5. Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques

Dans ce chapitre, les approches temporelle et fréquentielle de l'échantillonnage sont analysées en détail de manière à bien mettre en évidence le recouvrement spectral qui conduit au théorème de Shannon.

Puis, les effets de la quantification, la notion de rapport signal sur bruit (SNR) sont étudiés de manière à conduire au meilleur choix d'un filtre anti-repliement.

5.1. Introduction

La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux biologiques, sismiques, radars, audio ou vidéo sont analogiques par nature. C'est-à-dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux-mêmes varient de manière continue. Ces signaux peuvent être traités analogiquement à l'aide de filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques (figure 5.1).

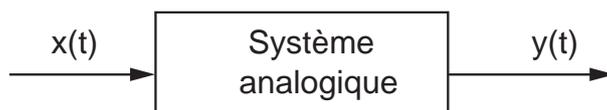


FIGURE 5.1.: Traitement analogique d'un signal $x(t)$

Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité, etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable. On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques (CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. Le schéma correspondant est donné à la figure 5.2.

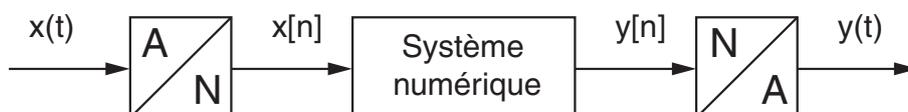


FIGURE 5.2.: Traitement numérique d'un signal analogique $x(t)$

Conceptuellement, on peut considérer la conversion A–N comme un processus faisant intervenir trois actions successives : l'échantillonnage à période fixe T_e , la quantification du signal et son codage. Pratiquement, ces opérations sont effectuées dans un même élément, le convertisseur A–N, qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié.

De même pour la conversion N–A, les opérations implicitement réalisées sont la quantification et le maintien de la valeur numérique pendant une période d'échantillonnage. À ceci s'ajoute généralement un filtrage passe-bas des "escaliers" générés par le convertisseur N–A.

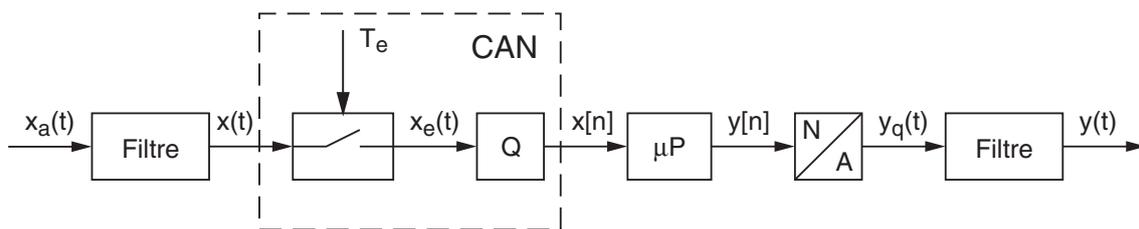


FIGURE 5.3.: Détail d'une chaîne analogique-numérique-analogique

La figure 5.3 présente les éléments qui interviennent lors du traitement numérique d'un signal analogique. On y trouve un filtre antirecouvrement (on verra plus loin sa raison d'être), un échantillonneur commandé par une horloge de période T_e , un quantificateur Q , un processeur numérique μP , un convertisseur N–A et un filtre de lissage.

5.2. Analyse temporelle

5.2.1. Types de signaux

De manière générale, les signaux peuvent être classés dans les catégories suivantes :

1. **Signaux continus en temps et en amplitude** : $x(t)$. On les appelle également signaux analogiques (figure 5.4a) ; ils proviennent généralement de processus physiques.
2. **Signaux discrets en temps, continus en amplitude** : $x_e(t = nT_e)$. Ce sont les signaux échantillonnés (figure 5.4b). Ils ne sont définis qu'à des instants déterminés multiples de la période d'échantillonnage T_e , mais leur amplitude peut varier de manière continue.
3. **Signaux discrets en temps et en amplitude** : $x_q[n]$. De tels signaux sont quantifiés en amplitude ; ils ne peuvent prendre que des valeurs déterminées, généralement, multiples d'un pas de quantification. Ce sont les valeurs numériques fournies par les convertisseurs analogiques-numériques (CAN). Ils ne sont définis qu'aux instants d'échantillonnage et correspondent aux signaux numériques (figure 5.4c).

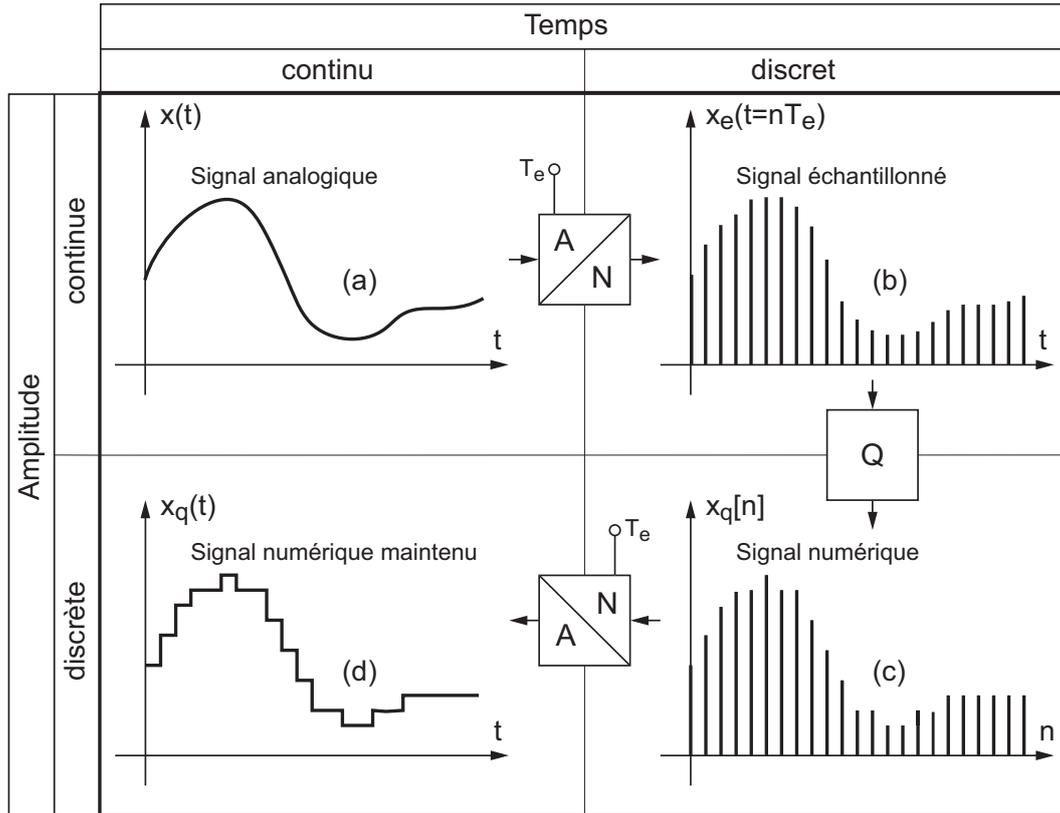


FIGURE 5.4.: Divers types de signaux

4. **Signaux continus en temps, discrets en amplitude** : $x_q(t)$. Ce sont des signaux quantifiés similaires à ceux décrits en 3, dont la valeur est maintenue par un bloqueur d'ordre zéro entre 2 périodes d'échantillonnage (figure 5.4d). Ces signaux correspondent à ceux fournis par les convertisseurs numériques-analogiques (CNA).

5.2.2. Quantification d'un signal : exemple

Donnée On considère un convertisseur A–N 8 bits travaillant entre 0 et 5.12 V avec un codage par arrondi et une période d'échantillonnage $T_e = 0.5 [msec]$. Le signal d'entrée est une exponentielle amortie :

$$x(t) = U_0 \exp(-t/\tau) \varepsilon(t) \quad U_0 = 1 [V] \quad \tau = 1 [ms]$$

Question

1. Tracez la caractéristique du convertisseur et les graphes $x(t)$ et $x_q[n]$.
2. Quelles valeurs obtiendra-t-on pour $x_e[n]$, $x_q[n]$ et $q[n]$.

Réponse Le codage sur 8 bits par arrondi transforme le domaine de conversion de la tension d'entrée $0 \cdots 5.12 [V]$ en $2^8 = 256$ valeurs numériques discrètes avec

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

un pas de quantification de 20 [mV] (figure 5.5a). L'échantillonnage et la quantification du signal sont représentés dans la figure 5.5b. Le tableau suivant donne les différentes valeurs demandées avec les erreurs relatives causées par la quantification :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_e[n]$	1.000	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183
$x_q[n]$	1.00	0.60	0.36	0.22	0.14	0.08	0.04	0.04	0.02
$q[n]$	50	30	18	11	7	4	2	2	1
$\epsilon_q[n]$ %	0.00	-1.08	-2.15	-1.39	+3.47	-2.56	-19.7	+32.5	+9.29

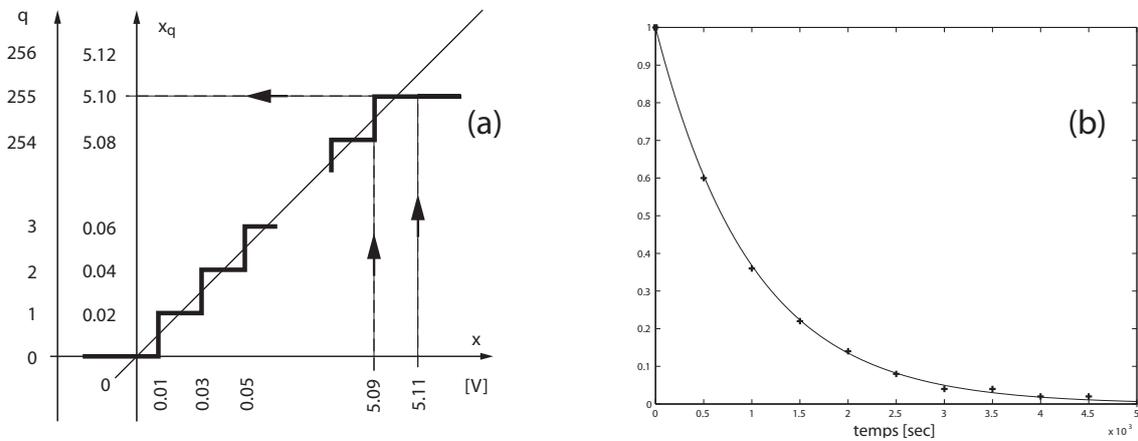


FIGURE 5.5.: Quantification et échantillonnage

5.2.3. Échantillonnage des signaux analogiques

Le signal d'entrée $x(t)$, dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite de valeurs est représentative du signal d'entrée dans la mesure où la période d'échantillonnage est compatible avec la rapidité du signal.

Envisagé dans le domaine temporel (figure 5.6), on peut considérer que le processus d'échantillonnage revient mathématiquement à multiplier le signal analogique $x(t)$ par une suite d'impulsions de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e , appelé "peigne de Dirac". Le signal échantillonné $x_e(t)$ peut alors être représenté par l'expression :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (5.1)$$

La fonction ainsi obtenue est une suite d'impulsions de Dirac dont la surface est modulée par le signal $x(t)$. Bien entendu, il s'agit là d'un modèle mathématique facilitant l'analyse de l'échantillonnage et qui, d'un point de vue pratique, donne heureusement des résultats pas trop différents de ce que l'on obtient avec un échantillonneur réel.

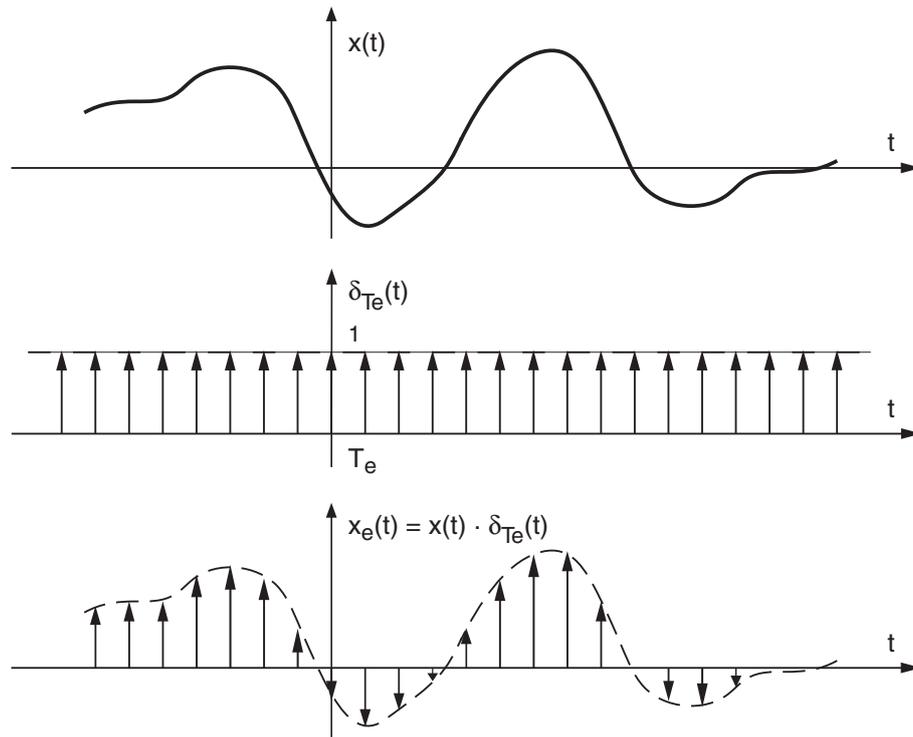


FIGURE 5.6.: Échantillonnage d'un signal

Si on veut respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres. Dans le cas contraire, il n'est plus possible de voir les variations les plus rapides du signal à traiter. Ceci conduit à une ambiguïté, car rien n'exclut que les points échantillonnés du signal A puissent appartenir à un autre signal B contenant des fréquences plus élevées (figure 5.7).

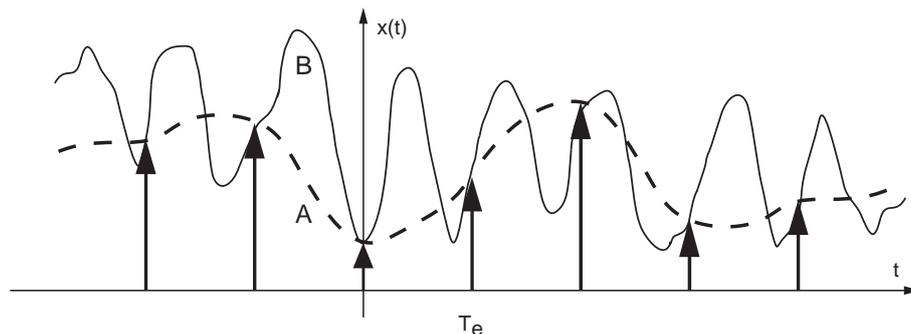


FIGURE 5.7.: Ambiguïté due à l'échantillonnage

5.3. Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage T_e dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

Nous venons de voir que l'échantillonnage d'un signal analogique est modélisé dans l'espace temps par la multiplication du signal $x(t)$ par un peigne temporel de Dirac $\delta_{T_e}(t)$. Or, on sait qu'à une multiplication temporelle correspond, dans l'espace des fréquences, une convolution fréquentielle entre le spectre $X(jf)$ du signal $x(t)$ et celui du peigne de Dirac $D(jf)$:

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) \quad (5.2)$$

5.3.1. Spectre d'un peigne de Dirac

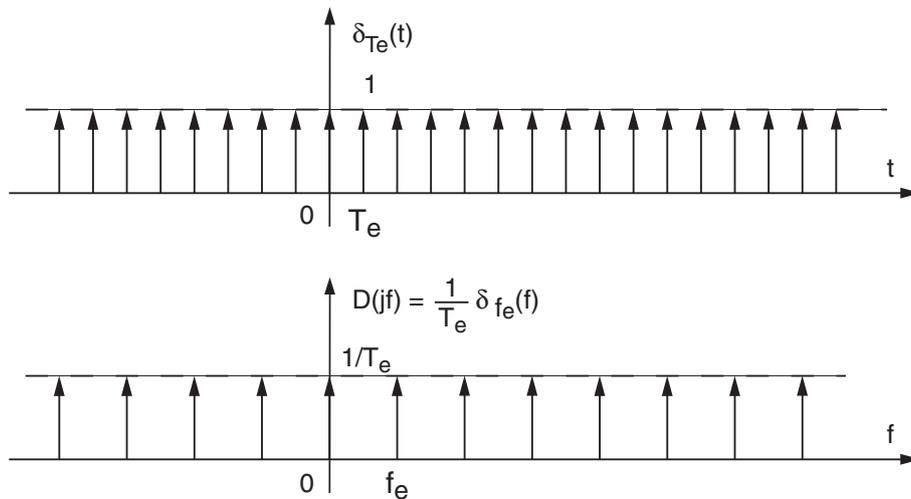


FIGURE 5.8.: Peigne d'impulsions de Dirac et son spectre

Propriété Le spectre d'un peigne temporel de Dirac $\delta_{T_e}(t)$ de période T_e est un peigne fréquentiel de Dirac $\delta_{f_e}(f)$ de période $f_e = 1/T_e$ et d'amplitude $1/T_e$.

Démonstration Comme la suite d'impulsions $\delta_{T_e}(t)$ est un signal périodique, on peut la décrire par sa décomposition en série de Fourier :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D(jk) \exp(+j2\pi k f_e t) \quad \text{avec} \quad f_e = \frac{1}{T_e}$$

où $D(jk)$ représente les coefficients de Fourier de $\delta_{T_e}(t)$ qui valent :

$$D(jk) \equiv \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \delta(t) \exp(-j2\pi k f_e t) dt = \frac{1}{T_e} \int_{0-}^{0+} \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{T_e}$$

Ce qui, en terme de transformation de Fourier, s'écrit également

$$D(jf) = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (5.3)$$

et donne un peigne fréquentiel de Dirac. Une représentation graphique en est donnée à la figure 5.8.

5.3.2. Spectre d'un signal échantillonné

On a vu ci-dessus que le spectre d'un signal échantillonné se calcule en effectuant la convolution entre les spectres $X(jf)$ et $D(jf)$ et que ce dernier est un peigne de Dirac de période spectrale f_e . Comme la convolution entre une impulsion de Dirac et une fonction continue reproduit la valeur de la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion de Dirac, on voit que le spectre de base $X(jf)$ est répété en tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e . On a donc :

$$X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e)) \quad (5.4)$$

Ce résultat très important montre que le spectre d'un signal échantillonné est la somme d'une répétition périodique du spectre du signal analogique $X(jf)$ (figure 5.9) et que la période de ce spectre est égale à la fréquence d'échantillonnage f_e .

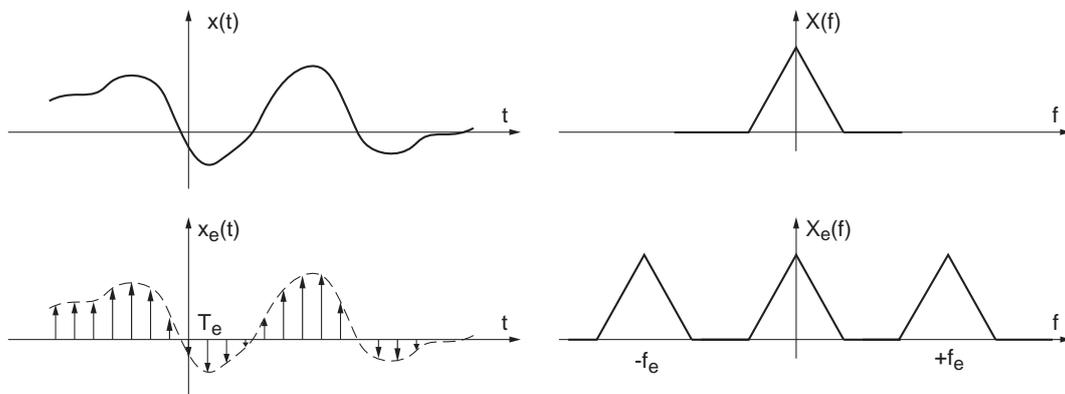


FIGURE 5.9.: L'échantillonnage d'un signal analogique provoque la répétition de son spectre

Échantillonnage d'une sinusoïde Considérant un signal sinusoïdal $x(t)$ de fréquence $f_0 = 3 [kHz]$ échantillonné à la fréquence $f_e = 8 [kHz]$, on obtient les points échantillonnés $x(nT_e)$ représentés à la figure 5.10a. Malgré le faible nombre de points obtenus (quatre points pour une période et demie), le signal $x(t)$ est univoquement défini du point de vue de Fourier.

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies spectrales se trouvant aux fréquences $\pm m f_e \pm f_0 = \pm 3, \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 19, \dots$. On en déduit que, dans la bande de base qui s'étend de 0 à $f_e/2 = 4 [kHz]$, il n'y a qu'une seule raie spectrale située en $f_0 = 3 [kHz]$. C'est la raie correspondant au signal original (figure 5.10b).

5.4. Recouvrement spectral

À cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de f_e , on imagine aisément que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

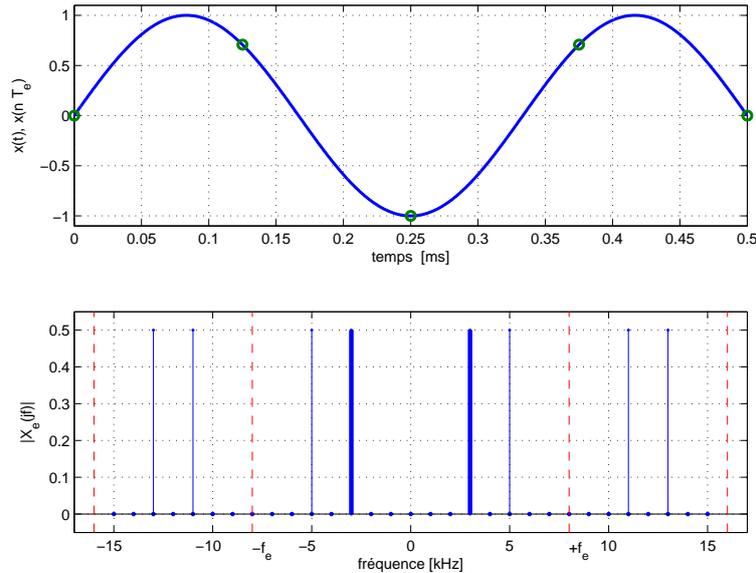


FIGURE 5.10.: Échantillonnage d'une sinusoïde ($f_e > 2 f_0$)

devient trop petite. La figure 5.11 illustre cette situation dans les domaines temporel et spectral. En réduisant la fréquence d'échantillonnage, on diminue la distance entre les spectres qui, pour finir, se recouvrent. Cette superposition correspond à la somme des spectres qui conduit à une déformation irrécupérable du spectre initial : il n'est plus possible de reconstituer le signal $x(t)$ à partir du spectre ainsi obtenu.

Il est donc important de ne pas oublier que l'échantillonnage d'un signal n'est pas une opération aussi anodine qu'elle paraît. Si la période d'échantillonnage est trop petite, cela peut modifier gravement le signal temporel perçu après échantillonnage. Comme le montre la figure 5.12, une sinusoïde de fréquence élevée peut être perçue comme un signal de fréquence beaucoup plus faible.

Le recouvrement spectral illustré par les figures 5.11 et 5.13 peut également être interprété comme un repliement du spectre autour de $f_e/2$. Cette fréquence particulièrement importante $f_N = f_e/2$ porte le nom de *fréquence de Nyquist* et elle délimite le domaine d'analyse compris entre $\pm f_e/2$. Ainsi que le montre la figure 5.13, les valeurs obtenues par superposition des spectres peuvent appartenir aussi bien à une sinusoïde de 2 kHz qu'à celle de 6, 10 ou 14 kHz. Ce qui fait que si l'on n'y prend pas garde, la fréquence réelle 6 kHz est perçue comme un signal basse-fréquence de 2 kHz. Tout se passe comme si les signaux de fréquences 6, 10 ou 14 kHz étaient perçus comme un seul signal de fréquence 2 kHz.

En analysant la figure 5.13, on voit que les raies spectrales apparentes dues à l'échantillonnage se situent en

$$f_{app} = \pm m f_e \pm f_k, \quad m \neq 0 \quad (5.5)$$

et que, si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée, elles peuvent se retrouver dans la bande de base $-f_e/2 < f < +f_e/2$.

Un exemple de repliement spectral bien connu est le phénomène observé au cinéma lorsqu'un chariot équipé de roues à rayons se déplace. La scène filmée est

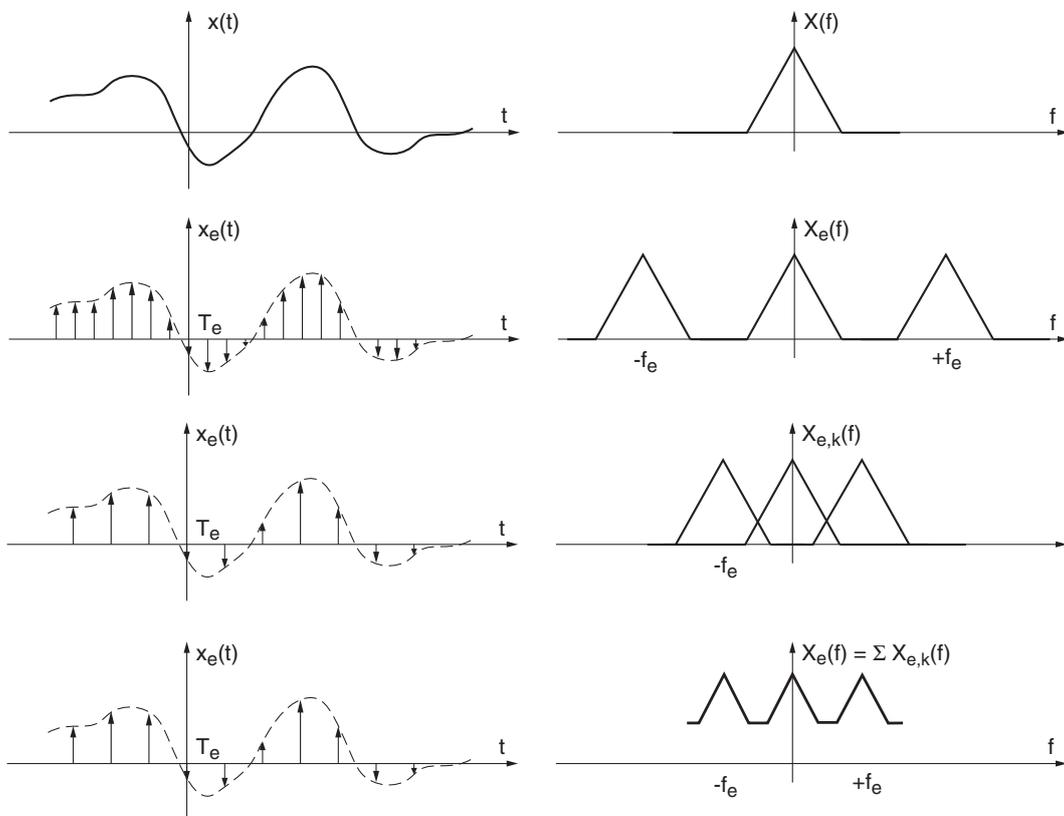


FIGURE 5.11.: Échantillonnage et recouvrement spectral

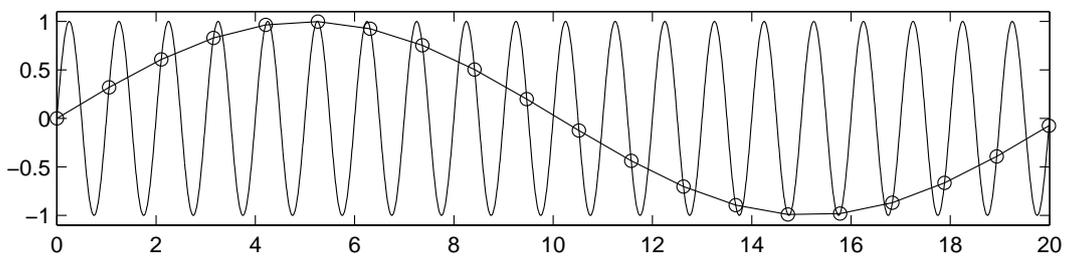


FIGURE 5.12.: Sinusoïde fortement sous-échantillonnée

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

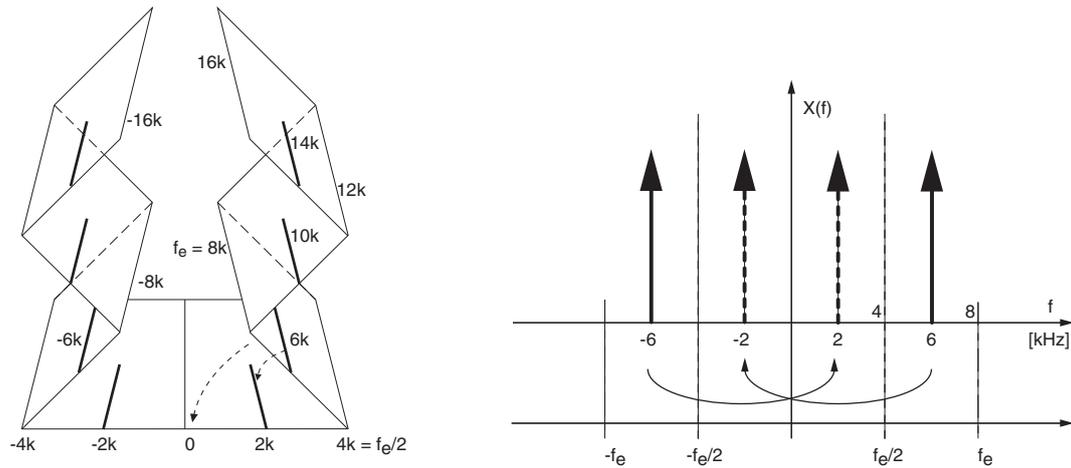


FIGURE 5.13.: Illustration du recouvrement spectral

échantillonnée par la caméra à raison de 24 images par secondes. Lorsque le chariot démarre et accélère, la fréquence du signal représenté par la rotation des rayons augmente et à un moment dépasse la fréquence de Nyquist (12 images par seconde). Dès cet instant, la vitesse de rotation semble diminuer, s'annuler et même devenir négative. L'information contenue dans l'image est faussée par le recouvrement spectral et ne correspond plus à la réalité. Il s'agit de l'effet stroboscopique bien connu.

5.4.1. Quelques exemples

Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

Donnée On considère un signal sinusoïdal $x(t)$ de fréquence $f_0 = 5 [kHz]$ que l'on échantillonne avec une fréquence $f_e = 8 [kHz]$.

Questions

1. Dessinez la fonction $x(t)$ et les points échantillonnés $x(t = nT_e)$.
2. Calculez la fréquence apparente f_{app} du signal $x[n] = x(t = nT_e)$.
3. Dessinez la sinusoïde basse-fréquence passant par les points échantillonnés.
4. Calculez et dessinez le spectre du signal échantillonné.

Réponses Les courbes demandées sont calculées et dessinées avec Matlab à l'aide des commandes ci-dessous :

```
% paramètres des signaux
fo = 5e3; fe = 8e3;
To = 1/fo; Te = 1/fe;
% calcul de x(t)
```

```

tmax = 5e-3; kmax = 500;
dt = tmax/kmax;
tt = 0:dt:tmax;
xt = sin (2*pi* tt/To);

```

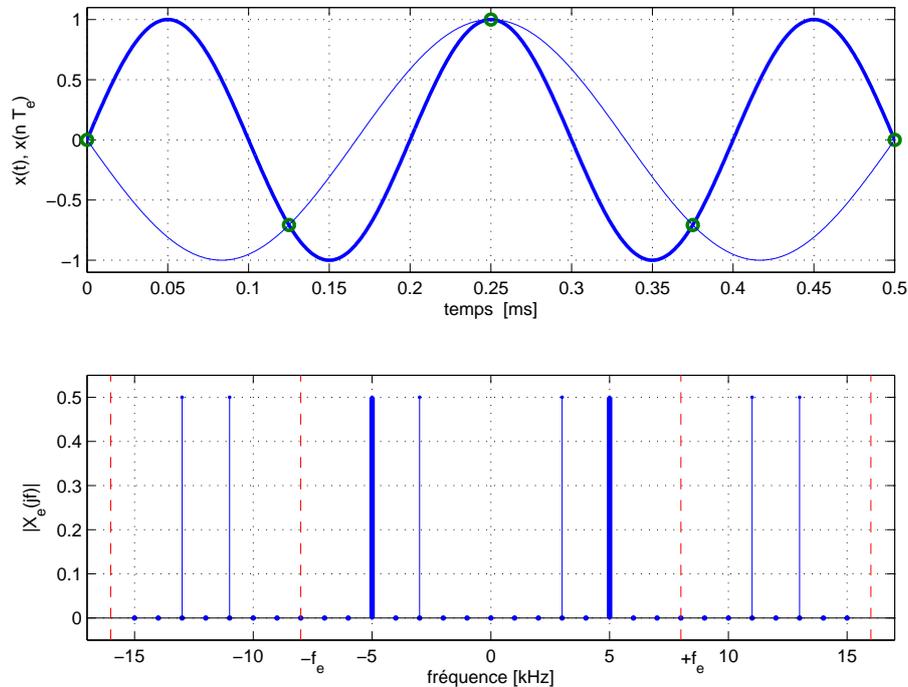


FIGURE 5.14.: Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

La fréquence apparente vaut $f_{app} = |f_0 - f_e| = 3 [kHz]$. Comme elle se situe en dessous de la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2 = 4 [kHz]$, elle sera associée à la présence d'une oscillation de période 0.33 [ms] qui n'existe pas en réalité (figure 5.14).

```

% signal apparent
fapp = fo - fe;
xta = sin (2*pi * tt * fapp);
% échantillonnage de x(t)
tn = 0:Te:tmax;
xn = sin (2*pi * tn/To);
% traçage dans le domaine temporel
subplot(2,1,1);
h1 = plot (tt, xt); grid;
set(h1,'LineWidth',2); hold on;
plot(tn, xn, 'o', tt, xta, '-');
xlabel ('temps [sec]');

```

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies se trouvant aux fréquences suivantes :

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

$k = 1, m = 0, 1, 2, 3$	0	1	2	3	...
$+m f_e \pm f_0$	± 5	+3, +13	+11, +21	+19, +29	...
$-m f_e \pm f_0$	± 5	-3, -13	-11, -21	-19, -29	...

On en déduit l'information erronée que, dans la bande de base allant de 0 à $f_e/2 = 4 [kHz]$, il n'y a qu'une raie spectrale : celle correspondant au signal apparent de fréquence $f_{app} = 3 [kHz]$ (figure 5.14).

Échantillonnage d'un signal carré

Considérons un signal carré de période $T_0 = 1 [ms]$ dont on sait que son spectre est constitué de raies situées en tous les multiples impairs de la fondamentale $f_0 = 1 [kHz]$. Ce signal est échantillonné à la fréquence $f_e = 12.8 [kHz]$.

Comme le rapport entre $f_e = 12.8 [kHz]$ et $f_0 = 1 [kHz]$ n'est pas entier ; le recouvrement spectral fait apparaître de manière évidente des raies parasites en des fréquences inattendues (figure 5.15). Ces raies apparentes se situent en

$$f_{app} = \pm m \cdot f_e \pm k \cdot f_0$$

En ne considérant que les premiers spectres latéraux ($m = \pm 1$), on peut calculer les fréquences apparentes suivantes

$$f_{app} = \pm 12.8 \pm (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$$

De manière plus détaillée, cela donne :

$m = \pm 1, k = 1, \dots$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
$+12.8 + (\dots)$	+13.8	+15.8	+17.8	+19.8	+21.8	+23.8	+25.8	+27.8	+29.8	...
$+12.8 - (\dots)$	+11.8	+9.8	+7.8	+5.8	+3.8	+1.8	-0.2	-2.2	-4.2	...
$-12.8 + (\dots)$	-11.8	-9.8	-7.8	-5.8	-3.8	-1.8	+0.2	+2.2	+4.2	...
$-12.8 - (\dots)$	-13.8	-15.8	-17.8	-19.8	-21.8	-23.8	-25.8	-27.8	-29.8	...

Les valeurs mises en gras correspondent aux fréquences apparentes que l'on retrouve dans la bande de base comprise entre 0 et $f_N = f_e/2 = 6.4 [kHz]$.

Échantillonnage d'une suite d'impulsions rectangulaires

Afin de mieux comprendre comment un spectre est modifié par le recouvrement spectral, on considère une SIR de période $T_0 = 1 [ms]$ et de largeur $\Delta t = 0.2 [ms]$. Cette SIR est échantillonnée à la fréquence $f_e = 16 [kHz]$

On sait que le spectre de la SIR est constitué de raies situées en des multiples de la fondamentale $f_0 = 1 [kHz]$ s'annulant pour tous les multiples de $1/\Delta t = 5 [kHz]$. À cause de l'échantillonnage, ce spectre devient périodique f_e . Une illustration en est donnée dans la figure 5.16 où l'on a représenté

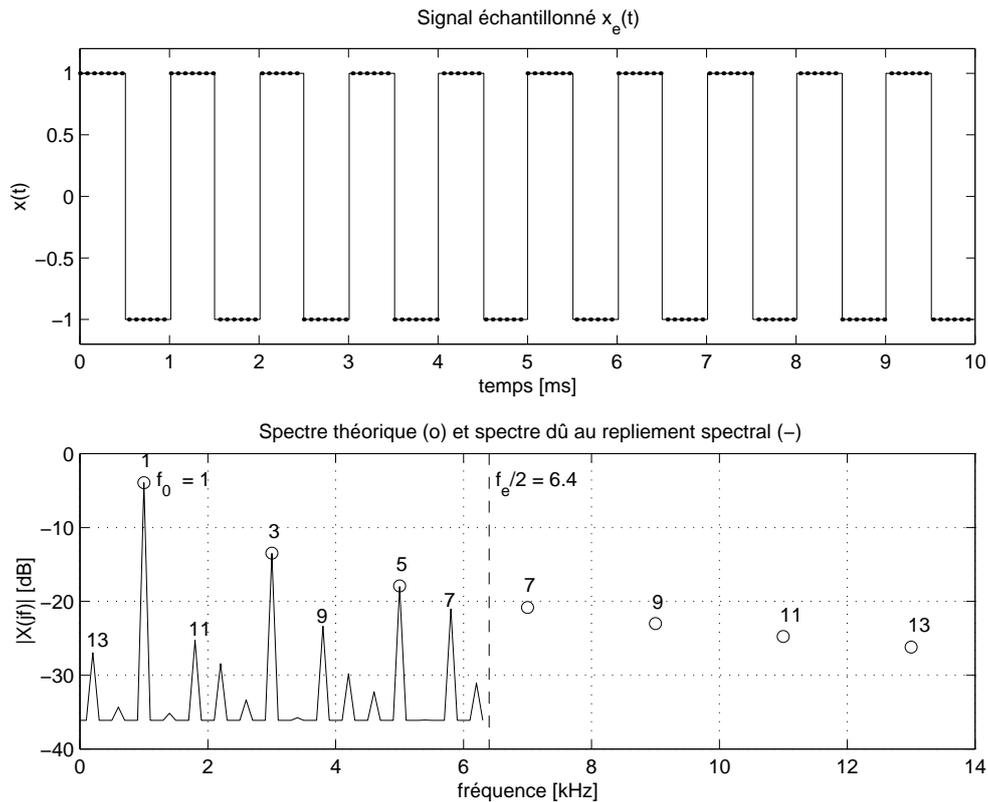


FIGURE 5.15.: Échantillonnage d'un signal carré

1. le signal temporel $x(t)$ et les valeurs échantillonnées $x_e(n)$;
2. le spectre de base $X(jf)$ et son enveloppe (sinus cardinal) ;
3. le spectre de base $X(jf)$ et ses copies en $f = \pm f_e$;
4. le spectre $X_e(jf)$ du signal échantillonné qui provient de la somme des spectres précédents.

Comme le spectre du signal échantillonné est la somme de tous les spectres décalés en $\pm m f_e$, on voit que le spectre résultant est composé du spectre original auquel viennent s'ajouter les raies spectrales des spectres latéraux.

Dans cet exemple où nous avons choisi un rapport entier entre f_e et f_0 égal à 16, les raies spectrales se superposent alors exactement. Si bien que l'on observe des raies situées à l'endroit où on les attend. *Le risque est alors grand de ne pas voir que les amplitudes des raies spectrales sont faussées par le recouvrement spectral.*

En particulier, si l'on considère la raie spectrale d'ordre 4, on voit que le résultat dû à l'échantillonnage sera la somme des composantes d'ordre $+20, -12, (f_e \pm 4), +36, -28, (2f_e \pm 4) \dots$ dues aux décalages spectraux $\pm f_e, \pm 2f_e, \dots$. On voit donc que, de manière générale, le repliement spectral fait apparaître en la fréquence $f_k = k f_0$ des composantes spectrales provenant de $k f_0 \pm m f_e$.

À titre informatif, voici le code Matlab créé pour analyser l'échantillonnage de la SIR.

```
% création d'une période
```

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

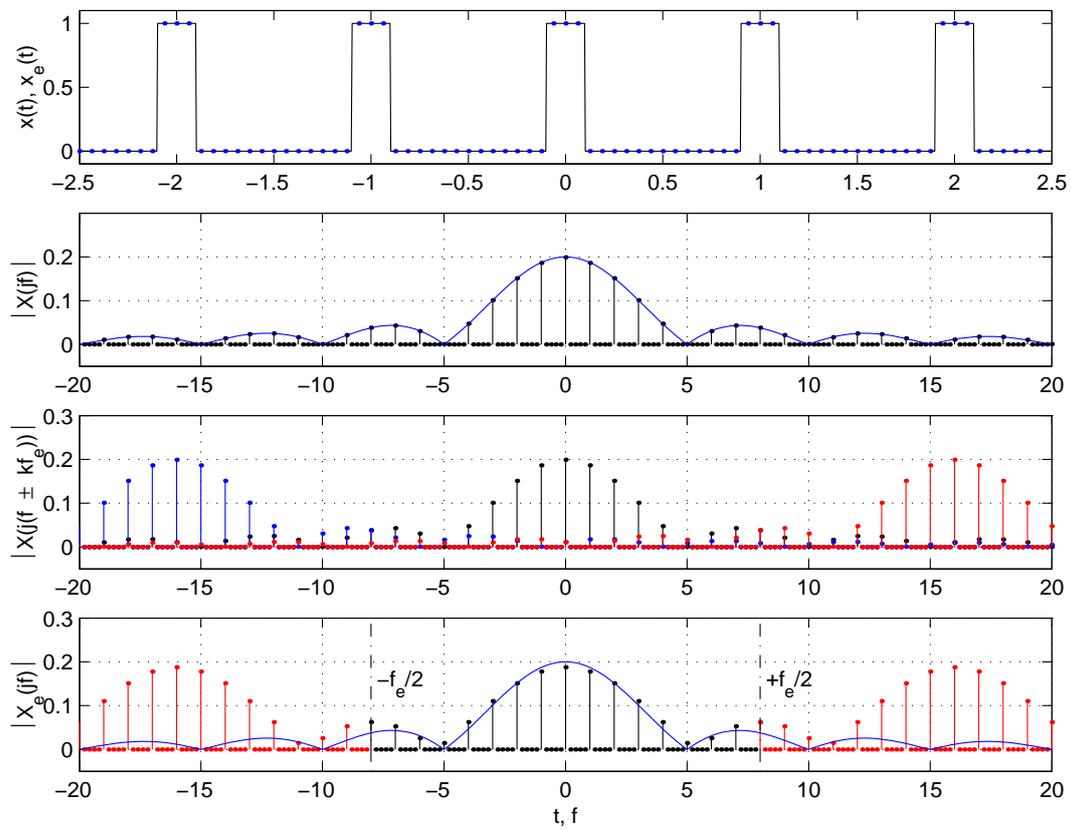


FIGURE 5.16.: Échantillonnage d'une SIR

```

T0 = 1; delta = 1/5; k0 = 256;
dt = T0/k0;
t0 = -T0/2:dt:T0/2-dt;
xt0 = (t0>(-delta/2)) & (t0<(delta/2));

% création de Nper périodes
Nper = 5;
tt = -Nper*T0/2:dt:Nper*T0/2-dt;
xt = [];
for k1 = 1:Nper, xt = [xt,xt0]; end;

% échantillonnage tous les ndt points
ndt = 16; Te = ndt*dt;
tn = tt(1:ndt:length(tt));
xn = xt(1:ndt:length(xt));

% spectre de xt (analogique)
duree = max(tt)-min(tt)+dt;
fmax = 1/dt; df = 1/duree;
ff = -fmax/2:df:fmax/2-df;
Xjf = fftshift(fft(xt))/length(xt);
Xf = abs(Xjf);

% spectre théorique de xt (enveloppe)
Xjftth = delta/T0*sinc(ff*delta/T0);

% spectre de xn
fe = 1/Te; Nfft = length(xn);
dfe = fe/Nfft;
ffe = -fe/2:dfe:fe/2-dfe;
Xejf = fftshift(fft(xn))/Nfft;

% graphes
subplot(4,1,1);
plot(tt,xt,tn,xn,'.');
subplot(4,1,2);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjftth));
subplot(4,1,3);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
stem(ff-fe,Xf,'b. ');
stem(ff+fe,Xf,'r. ');
subplot(4,1,4);
stem(ffe,abs(Xejf),'. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjftth));

```

Échantillonnage d'une exponentielle décroissante

Donnée Une exponentielle décroissante d'amplitude $A = 10V$, de constante de temps $\tau = 0.2 msec$ est échantillonnée avec $T_e = \tau/2 = 0.1 msec$.

Question Calculez le contenu spectral du signal échantillonné pour $f = 0$ et $f = f_c$ en se limitant à l'effet des 2 premiers spectres latéraux seulement.

Réponse Sachant que le signal

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \varepsilon(t)$$

possède le spectre suivant

$$X(jf) = A \frac{\tau}{1 + j2\pi f\tau}$$

le spectre du signal échantillonné $x_e(t)$ vaut :

$$\begin{aligned} X_e(jf) &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(f - k f_e)) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{1 + j2\pi (f - k f_e)\tau} \end{aligned}$$

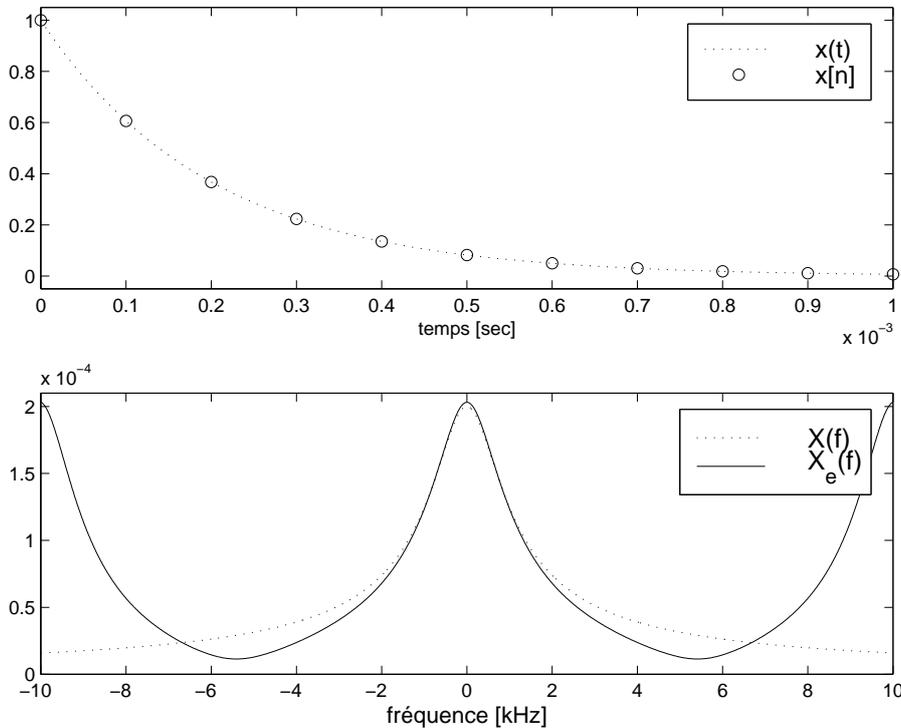


FIGURE 5.17.: Échantillonnage d'une exponentielle amortie et son spectre

La méthode la plus simple pour calculer $X_e(jf)$ consiste à utiliser Matlab. Dans le calcul qui suit, on notera que pour des raisons d'échelle, la période d'échantillonnage n'est pas prise en compte dans le calcul des spectres.

```
% parametres
A = 10.0; tau = 0.2e-3;
fc = 1/(2*pi*tau);
Te = tau/2; fe = 1/Te;

% spectre original en f = 0 et f = fc:
f = [0, fc];
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
Xfm = abs (Xf0)
    >> Xfm = 0.2000e-3 0.1414e-3

% repetition spectrale
% spectre original
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
% spectres dus à ±fe
Xfp1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + fe)*tau);
Xfm1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - fe)*tau);
% spectres dus à ±2fe
Xfp2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + 2*fe)*tau);
Xfm2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - 2*fe)*tau);

% spectre résultant
Xfe = Xf0 + Xfm1 + Xfp1 + Xfm2 + Xfp2
Xfem = abs (Xfe)
    >> Xfem = 0.2031e-3 0.1415e-3

% erreurs relatives
erreurs = (Xfem - abs(Xf0)) ./ abs(Xf0)
    >> erreurs = 0.0157 0.0008
```

Cet échantillonnage de l'exponentielle amortie avec $T_e = \tau/2$ conduit donc aux erreurs relatives suivantes :

- 1.57% pour l'amplitude de la composante continue
- 0.08% pour l'amplitude à la fréquence de coupure ($f_c = 796 [Hz]$).

Une illustration de la somme de ces spectres est donnée à la figure 5.17.

5.5. Théorème de l'échantillonnage

Les exemples ci-dessus ont montré à l'évidence que les résultats fournis par l'analyse d'un signal échantillonné peuvent être gravement modifiés si l'on n'y prend pas garde. En 1948, Shannon a montré que, pour éviter ces problèmes, il suffit de

satisfaire l'inégalité suivante :

$$f_e > 2 f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e < \frac{T_{min}}{2} \quad (5.6)$$

Ce théorème s'énonce également de la manière suivante :

Un signal $x(t)$ peut être représenté de manière univoque par une suite de valeurs échantillonnées si la fréquence d'échantillonnage f_e est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.

En pratique, on limite, avant échantillonnage, le spectre du signal avec un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure dépend de la bande passante utile. Afin de laisser un peu d'espace pour la bande de transition du filtre antirecouvrement, on choisira :

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e \simeq \frac{T_{min}}{3 \cdots 5} \quad (5.7)$$

Plus de détails seront donnés dans la section 5.7.

5.5.1. Filtre antirecouvrement

En général, les fréquences présentes dans un signal s'étendent sur un domaine plus étendu que ce qui est utile pour le message à transmettre. Suivant la qualité attendue pour celui-ci, on limite plus ou moins le domaine fréquentiel sur lequel portera le traitement du signal.

Connaissant ce domaine d'intérêt, délimité par la fréquence f_{max} , on pourra éviter le recouvrement spectral en **filtrant analogiquement le signal $x(t)$ avant son échantillonnage**. Comme il n'est pas possible, avec un filtre réel, de supprimer totalement les fréquences supérieures à f_{max} , on est amené à accepter l'effet d'un léger recouvrement spectral.

La figure 5.18 illustre le recouvrement spectral que l'on obtient avec des filtres de Butterworth dont la réponse fréquentielle et le recouvrement spectral sont décrits par

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}} \quad H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{2m}}} \quad (5.8)$$

5.5.2. Exemple

Donnée Considérons un signal $x(t)$, à spectre constant dans une large bande de fréquence que l'on filtre passe-bas avec un filtre de Butterworth d'ordre $m = 6$ et de fréquence de coupure $f_c = 1 [kHz]$.

Dans ce qui suit, on souhaite estimer la valeur de la fréquence d'échantillonnage f_e nécessaire pour que l'effet du recouvrement spectral à la fréquence de coupure f_c soit inférieur à 1%.

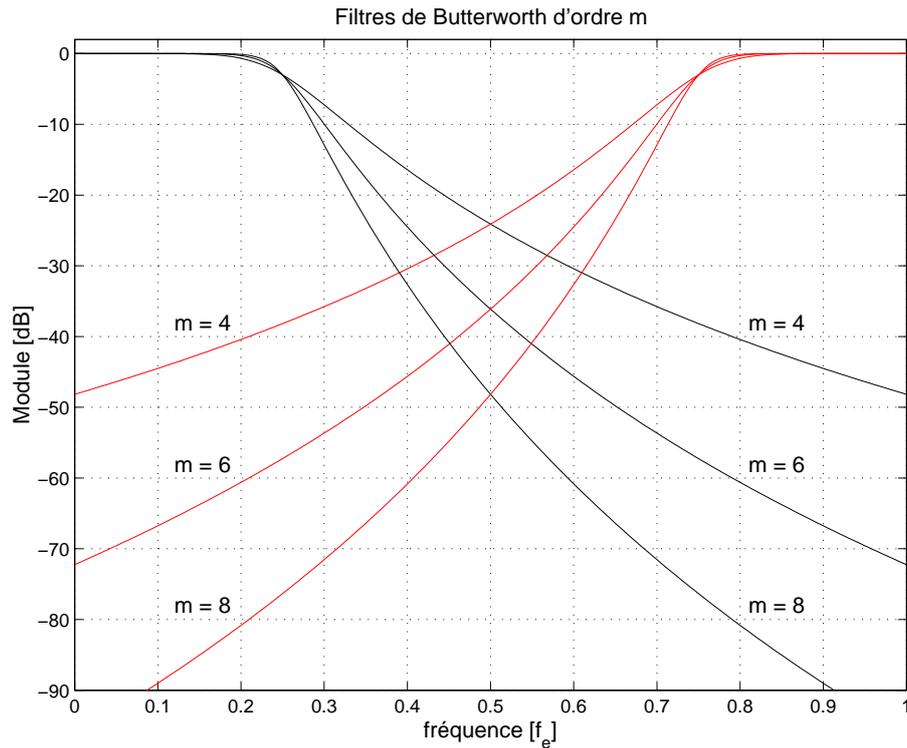


FIGURE 5.18.: Recouvrement spectral pour un filtre de Butterworth ($f_e = 4 f_c$)

Solution Puisque en $f = f_c$, l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth vaut $1/\sqrt{2} = 0.707$, l'amplitude due au recouvrement spectral en cet endroit devra être inférieure à 1% de 0.707; c'est-à-dire, $0.00707 = 1/141$ (figure 5.19).

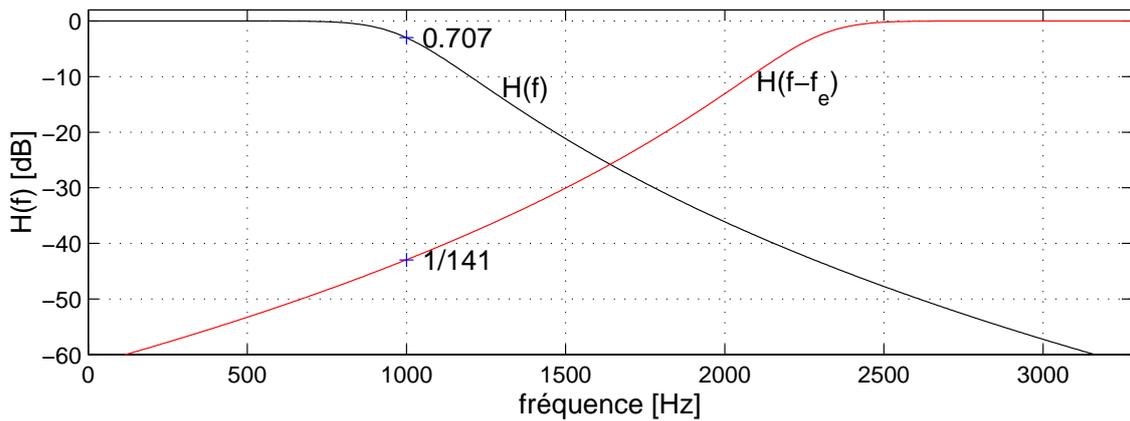


FIGURE 5.19.: Effet du filtre antirecouvrement d'ordre 6 avec $f_e = 3.28 f_c$

Ne considérant que le premier spectre latéral, l'effet du recouvrement est décrit par la réponse fréquentielle centrée en $+f_e$:

$$H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{12}}} = \frac{1}{141} \quad \text{lorsque } f = f_c$$

On a donc :

$$1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c} \right)^{12} = 1 + \left(\frac{f_e - f_c}{f_c} \right)^{12} = 141^2 = 2 \cdot 10^4$$

De cette équation, on tire :

$$\begin{aligned} f_e &= \left(1 + (2 \cdot 10^4)^{1/12} \right) f_c \\ &= 3.28 f_c = 3.28 [kHz] \end{aligned}$$

Remarque Il est important de relever que ce résultat provient d'une estimation basée sur les modules des spectres alors que, pour être exact, il aurait fallu travailler avec les spectres complexes (voir l'exemple du paragraphe 5.4.1).

5.6. Quantification d'un signal échantillonné

5.6.1. Quantification uniforme

Le convertisseur A–N effectue la numérisation d'un signal analogique après échantillonnage et délivre des séquences numériques codées avec un pas de quantification Q dépendant du nombre de bits du convertisseur. Dans le cas d'une loi de quantification uniforme où les valeurs codées sont obtenues par arrondi dans le domaine de conversion Δ_{CAN} du convertisseur, on a :

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} \quad (5.9)$$

Considérant pour la suite que le CAN travaille avec n bits entre $+U_{max}$ et $-U_{max}$ (figure 5.20), on a $\Delta_{CAN} = 2U_{max}$ et le pas de quantification vaut alors

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{2U_{max}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}} \quad (5.10)$$

Le pas de quantification Q rapporté au domaine de conversion Δ_{CAN} définit la résolution du convertisseur

$$R_{CAN} \equiv \frac{Q}{\Delta_{CAN}} = \frac{1}{2^n} = 1 \text{ LSB} \quad (5.11)$$

On dit, de manière équivalente, que la résolution est égale au poids du bit le plus faible du convertisseur.

Lorsque les valeurs codées sont obtenues par arrondi, l'erreur due au codage se répartit uniformément autour de la droite de conversion idéale et la caractéristique de codage est celle représentée à la figure 5.20. Dans le domaine de quantification, l'erreur maximum due à la quantification vaut alors :

$$E_Q = \frac{Q}{2} = \frac{U_{max}}{2^n}$$

5.6. Quantification d'un signal échantillonné

Par exemple, si l'on considère un CAN 4 bits travaillant entre ± 8 [V], on aura

$$\Delta_{CAN} = 16 \text{ [V]} \quad Q = \frac{2 \cdot 8 \text{ [V]}}{2^4} = 1.00 \text{ [V]} \quad E_Q = 0.50 \text{ [V]} \quad R_{CAN} = \frac{1}{16}$$

En observant attentivement la figure 5.20, on voit que le domaine de conversion s'étend plus précisément de $U_{min} = -8 - 0.5 = -8.5$ [V] à $U_{max} = +8 - 0.5 = 7.5$ [V]. Ce qui donne bien évidemment $\Delta_{CAN} = 16$ [V].

Remarque Il est important de bien distinguer entre résolution et précision d'un convertisseur. Généralement, ces deux grandeurs sont du même ordre. On peut cependant très bien imaginer l'exemple d'un convertisseur 4 bits qui aura une résolution de $1/16 = 6.25\%$ alors que les 16 valeurs fournies par le convertisseur peuvent être précises à 0.1%.

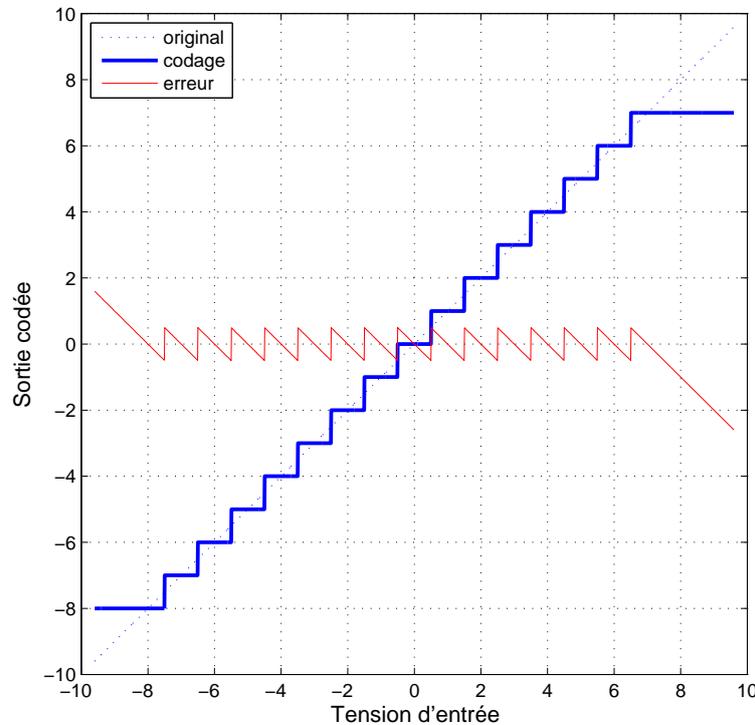


FIGURE 5.20.: Loi de quantification uniforme et signal d'erreur pour un convertisseur 4 bits travaillant entre ± 8 [V]

5.6.2. Bruit de quantification

Nous venons de voir que l'opération de quantification remplace chaque valeur du signal $x(t = nT_e)$ par une approximation. L'effet de cette approximation revient, mathématiquement, à superposer au signal d'origine $x(t)$ un signal d'erreur $e(t)$ que l'on appelle le bruit de quantification. L'amplitude maximum de ce signal d'erreur est $E_Q = Q/2$ (figure 5.21). Sa puissance est une mesure de la dégradation que subit le signal.

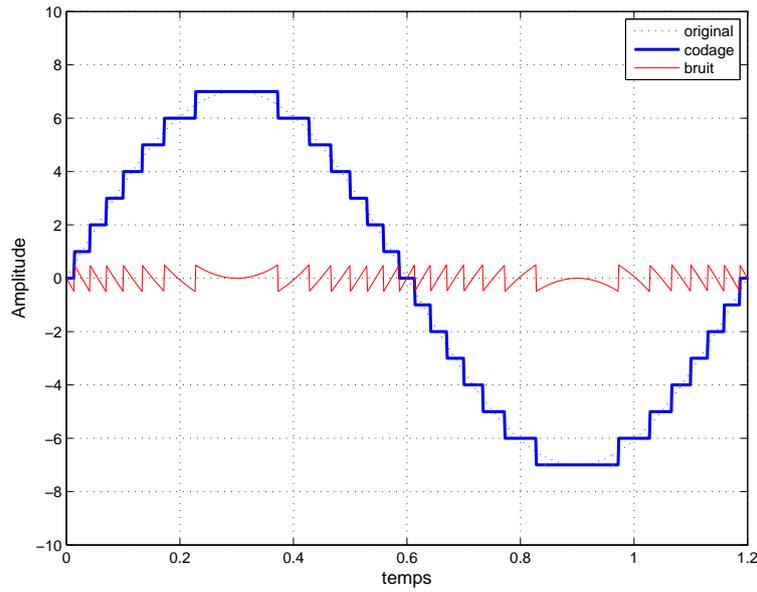


FIGURE 5.21.: Numérisation et bruit de quantification d'un signal analogique ne débordant pas le domaine du CAN

Si le pas de quantification est beaucoup plus petit que l'amplitude du signal $x(t)$, on peut raisonnablement admettre que le signal d'erreur est constitué de segments de droite compris entre $\pm Q/2$ et de durée variable Δt (figure 5.21). L'équation décrivant ce signal d'erreur élémentaire s'écrit alors :

$$e(t) = \frac{Q}{\Delta t}t \text{ pour } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq +\frac{\Delta t}{2}$$

et sa puissance moyenne vaut :

$$\begin{aligned} P_Q &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^2(t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left(\frac{Q}{\Delta t} t \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{Q}{\Delta t} \right)^2 \frac{1}{3} 2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement le résultat bien connu pour une distribution statistique uniforme :

$$P_Q = \frac{E_Q^2}{3} = \frac{Q^2}{12} \quad (5.12)$$

La valeur ainsi obtenue est une estimation de la puissance du bruit de quantification suffisante pour la plupart des cas réels. Si l'on exprime cette puissance par rapport au nombre de bits du convertisseur, on obtient :

$$P_Q = \frac{1}{12} \left(\frac{2U_{max}}{2^n} \right)^2 = \left(\frac{U_{max}}{2^n \sqrt{3}} \right)^2$$

5.6. Quantification d'un signal échantillonné

La puissance du bruit de quantification P_Q permet de calculer la valeur efficace du bruit de quantification qui vaut :

$$Q_{eff} = \sqrt{P_Q} = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (5.13)$$

Le spectre du signal d'erreur est plus difficile à évaluer. Mais dans la plupart des cas, les conditions sont remplies pour que la densité spectrale du bruit de quantification puisse être considérée constante.

5.6.3. Rapport signal sur bruit

Lorsque qu'un signal est perturbé par du bruit, il est nécessaire de chiffrer l'importance de cette perturbation par rapport au signal. On introduit alors la notion de rapport signal sur bruit (SNR = Signal to Noise Ratio) défini comme le quotient entre la valeur efficace du signal X_{eff} et celle du bruit N_{eff} :

$$SNR \equiv \frac{X_{eff}}{N_{eff}} \quad (5.14)$$

Dans notre cas, le bruit est dû à la quantification du signal. On a donc $N_{eff} = Q_{eff}$ avec $Q_{eff} = Q/\sqrt{12}$. Le rapport signal sur bruit d'un convertisseur vaut alors :

$$SNR = \frac{X_{eff}}{Q/\sqrt{12}} = 2^{n-1} \sqrt{12} \frac{X_{eff}}{U_{max}} \quad (5.15)$$

Exprimé en dB, ce rapport signal sur bruit vaut :

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(12) + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} \end{aligned}$$

d'où :

$$SNR_{dB} = 6n + 4.8 \text{ dB} + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} < 6n + 4.8 \text{ dB} \quad (5.16)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit d'un convertisseur A-N dépend de son domaine de conversion et de la valeur efficace du signal. Comme l'amplitude de celui-ci ne doit pas dépasser le domaine du convertisseur si l'on veut éviter des saturations, on voit que le SNR sera toujours inférieur à $6n + 4.8$ dB.

5.6.4. SNR de quelques signaux

Signal sinusoïdal "pleine échelle"

Dans le *cas particulier* où le signal analogique est une *sinusoïde d'amplitude égale à la tension maximum* U_{max} du convertisseur A-N, on a :

$$X_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{n-1} Q$$

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Le rapport signal sur bruit maximum que l'on peut avoir après quantification vaut alors :

$$SNR_{max} = \frac{X_{eff}}{Q_{eff}} = \frac{2^{n-1}Q/\sqrt{2}}{Q/\sqrt{12}} = \sqrt{6} \ 2^{n-1}$$

Exprimé en dB, ce rapport devient :

$$\begin{aligned} SNR_{max,dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(6) \\ &\simeq 6(n-1) + 7.8 \text{ dB} \end{aligned}$$

d'où

$$SNR_{max,dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} \quad \text{si } A = U_{max} \quad (5.17)$$

Il est important de se rappeler que ce résultat n'est valable que pour une sinusoïde dont l'amplitude couvre toute la plage du convertisseur A-N et qu'il représente le SNR maximum possible pour un convertisseur donné.

Ainsi, pour un convertisseur 8 bits, le rapport signal sur bruit maximum vaut environ 50 dB. Ceci est suffisant pour la plupart des applications industrielles, mais pas du tout en haute-fidélité où l'on désire un rapport d'au moins 96 dB. Dans ce cas, 16 bits sont nécessaires avec un convertisseur d'excellente linéarité.

Dans le cas plus général où l'amplitude A du signal sinusoïdal est inférieure à U_{max} , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (5.18)$$

Signal triangulaire “pleine échelle”

Dans le cas particulier où le signal analogique est un *triangle d'amplitude égale à la tension maximum* U_{max} du convertisseur A-N, on montre aisément (voir exercices) que le rapport signal sur bruit obtenu après quantification vaut au maximum :

$$SNR_{max,dB} = 6n \quad \text{si } A = U_{max} \quad (5.19)$$

Dans le cas plus général où l'amplitude A du signal triangulaire est inférieure à U_{max} , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (5.20)$$

Signal à distribution gaussienne

Dans le cas où l'on peut admettre que la distribution statistique d'un signal quelconque est gaussienne, on montre que le risque de dépassement du domaine de conversion est inférieur à

$$\begin{aligned} 5\% & \text{ si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{2} \\ 0.3\% & \text{ si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{3} \end{aligned}$$

5.6. Quantification d'un signal échantillonné

En considérant ce dernier cas (satisfaisant d'un point de vue pratique), on a :

$$SNR_{max,dB} = 6n + 4.8 dB - 20 \log 3 = 6n - 4.7 dB \quad \text{si } X_{eff} = \frac{U_{max}}{3}$$

Dans ce cas, plus général que celui du signal sinusoïdal, on voit que le rapport signal sur bruit ne dépassera pas 43 dB pour un convertisseur 8 bits. Une illustration de la quantification de trois signaux types est donnée dans la figure 5.22.

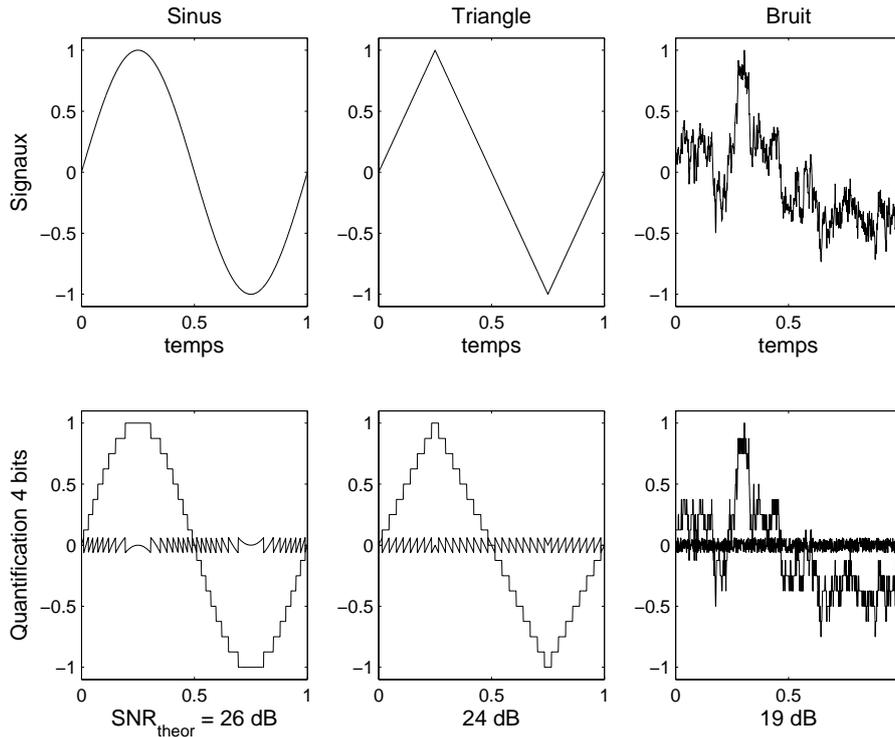


FIGURE 5.22.: Quantification avec 4 bits de trois signaux types

5.6.5. Non linéarité du convertisseur

Jusqu'à présent, on a considéré des convertisseurs A-N parfaits, exempts de toute erreur de linéarité; cela signifie que la relation sortie-entrée est décrite par une droite et que les pas de quantification se répartissent régulièrement le long de cette droite. Or dans la réalité, la relation sortie-entrée n'est jamais exactement linéaire. Une illustration en est donnée à la figure 5.23.

En général, la valeur absolue de la différence entre la courbe réelle et la droite idéale ne dépasse pas un demi LSB. Dans ce cas, l'erreur de non linéarité est au maximum équivalente à la perte d'un bit de poids faible. On admet alors, de manière conservative, que le nombre de bits effectif est diminué de 1

$$n_{eff} = n - 1$$

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Ce qui conduit aux résultats globaux suivants

$$R_{NL} = \frac{1}{2^{n_{eff}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad Q_{NL} = \frac{U_{max}}{2^{n_{eff}-1}} = \frac{U_{max}}{2^{n-2}} \quad (5.21)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit calculé jusqu'ici est réduit d'un facteur 2 ou de 6 dB. Le rapport signal sur bruit est alors corrigé de la manière suivante :

$$SNR_{NL, dB} \simeq SNR_{dB} - 6 \text{ dB} \quad (5.22)$$

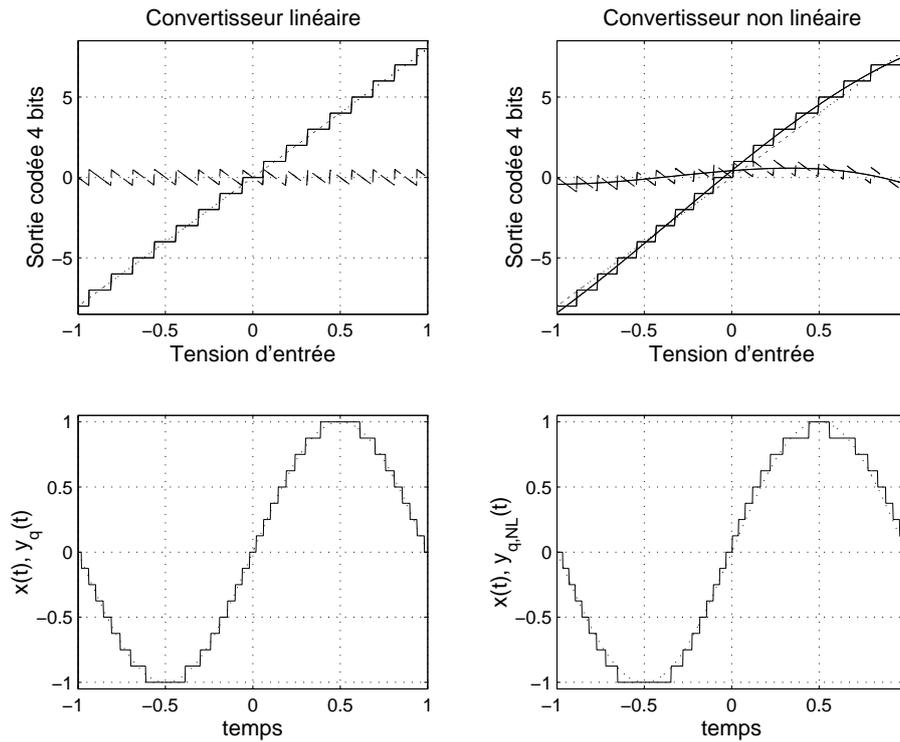


FIGURE 5.23.: Effet d'une non-linéarité

Signaux	SNR_{max} [dB]	SNR_{max} avec NL [dB]
sinus	$6n + 1.8$	$6n - 4$
triangle	$6n$	$6n - 6$
bruit gaussien	$6n - 4.7$	$6n - 11$

TABLE 5.1.: Limite des convertisseurs A–N

5.6.6. Conclusion

Les situations que l'on vient d'analyser peuvent se résumer dans le tableau 5.1. De celui-ci, on notera que de manière générale, une conversion A–N réelle peut difficilement fournir un rapport signal sur bruit supérieur à $6(n - 1) \text{ dB}$ même si

5.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

la plage du convertisseur est utilisée dans sa totalité. On retiendra donc la relation suivante

$$SNR < 6n - 6 \text{ [dB]} \quad (5.23)$$

comme représentative de ce que l'on peut obtenir au mieux dans des situations réelles.

Quelques de valeurs de SNR

Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux introduit des erreurs dont on peut estimer la valeur. Celles-ci ne seront acceptables que si elles ne dépassent pas des limites psycho-physiologiques généralement connues.

En téléphonie par exemple, il est important et suffisant que les locuteurs puissent se reconnaître au son de leurs voix. Comme les fréquences fondamentales présentes dans les voix humaines dépassent rarement 1 kHz, on admet qu'une bande passante de 4 kHz est suffisante pour laisser passer les harmoniques nécessaires. Cette bande passante permet de fixer la fréquence d'échantillonnage utilisée en téléphonie numérique à 8 kHz. De plus, de manière à ce que la voix numérisée ne soit pas trop "granulaire", une dynamique de 50 dB est demandée : des convertisseurs 8 bits sont généralement acceptés.

Applications	Dynamique	Nombre de bits
Téléphonie	50 dB	8
Mesures industrielles	70 dB	12
Audio numérique	96 dB	16
Multimètre numérique	> 100 dB	18

TABLE 5.2.: Quelques valeurs SNR typiques

En audio de haute qualité, les limites que l'on souhaite atteindre sont fixées par les capacités de l'oreille humaine ; la dynamique et la bande passante demandées sont donc bien plus élevées qu'en téléphonie. Ainsi, pour reproduire la qualité sonore d'une salle de concert, on exige une bande passante de 20 kHz et une dynamique de plus de 80 dB car cela correspond au rapport entre le volume sonore d'un grand orchestre et le bruit de fond d'une salle silencieuse.

5.7. Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

Nous venons de voir que, lors d'une conversion A-N, deux effets négatifs apparaissent :

1. le recouvrement spectral causé par l'impossibilité d'avoir un filtre idéal ;
2. la limitation du rapport signal sur bruit due à la résolution du convertisseur.

Généralement le nombre de bits et la bande passante nécessaires sont fixés par l'application ; il reste donc à trouver la fréquence d'échantillonnage f_e et l'ordre n du filtre antirecouvrement. Le critère le plus fréquemment admis pour trouver ces deux valeurs est le suivant :

L'effet du recouvrement doit être inférieur à la résolution liée à la quantification et à la non linéarité du convertisseur CAN.

Admettant que l'on utilise un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre m et de fréquence de coupure f_c , on aura, à l'extrémité de la bande passante ($f = f_c$), une atténuation du recouvrement spectral valant (voir section 5.5.1)

$$H(f - f_e)|_{f=f_c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}}}$$

On a vu que la résolution d'un convertisseur A-N à n bits possédant une non-linéarité de $\pm\frac{1}{2}$ LSB vaut pratiquement

$$R \simeq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Admettant qu'à la fréquence de coupure le recouvrement spectral doit être inférieur à la résolution du convertisseur, il vient

$$\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}} > 2^{n-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^m &> 2^{n-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$f_e > f_c \cdot \left(1 + (2^{n-1})^{1/m}\right) \quad (5.24)$$

Le tableau 5.3 donne le rapport f_e/f_c pour différents filtres de Butterworth et convertisseurs A-N entachés d'une non linéarité de $\pm\frac{1}{2}$ LSB. On notera que si l'on souhaite utiliser un filtre d'ordre 2 seulement avec un convertisseur 8 bits, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage 13 fois supérieure à la fréquence de coupure. Alors que, si l'on adopte un filtre d'ordre 8, une fréquence d'échantillonnage 3 à 5 fois supérieure à la fréquence de coupure suffit suivant le nombre de bits du CAN.

C'est pourquoi, admettant que l'échantillonneur est précédé d'un filtre antirecouvrement d'ordre 8, on propose généralement une fréquence d'échantillonnage telle que

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_c \quad (5.25)$$

Ordre m du filtre	Nombre de bits n du CAN				
	8	10	12	14	16
2	13	24	47	92	182
4	4.4	5.8	7.7	10.6	14.5
5	3.7	4.5	5.6	7.1	9.0
6	3.3	3.9	4.6	5.5	6.7
7	3.0	3.5	4.0	4.7	5.5
8	2.9	3.2	3.6	4.1	4.7

TABLE 5.3.: Rapport f_e/f_c en fonction de l'ordre du filtre (Butterworth) et du convertisseur analogique numérique (n bits $\pm \frac{1}{2}$ LSB)

5.8. Reconstruction du signal

5.8.1. Convertisseur N–A

Le convertisseur N–A convertit un signal numérique en un signal analogique. Son but est de fournir un signal continu entre chaque échantillon. Cette opération consiste à réaliser une interpolation continue entre les valeurs numériques fournies par le processeur à chaque période d'échantillonnage. On peut imaginer différents interpolateurs allant du simple au compliqué :

- l'interpolateur d'ordre 0 qui maintient constante la valeur numérique fournie ;
- l'interpolateur d'ordre 1 qui relie linéairement deux valeurs numériques successives ;
- l'interpolateur d'ordre 2 qui relie paraboliquement trois valeurs numériques successives ;
- l'interpolateur idéal qui remplace chaque valeur numérique par un sinus cardinal.

L'interpolateur le plus simple est celui d'ordre zéro et c'est également celui qui est réalisé par un convertisseur numérique-analogique classique. Il est souvent désigné sous le nom de bloqueur d'ordre zéro.

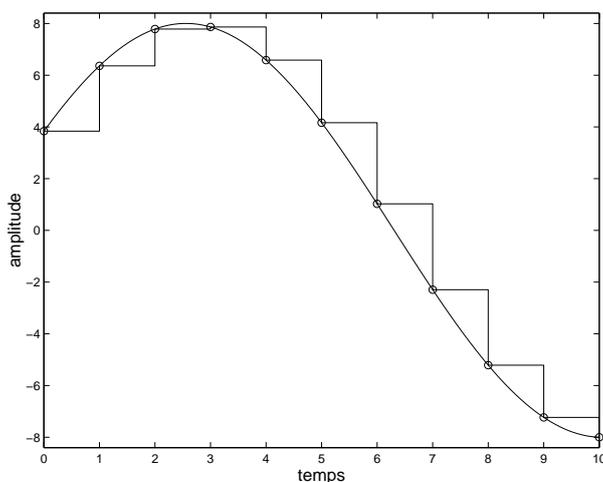


FIGURE 5.24.: Interpolation d'ordre zéro réalisée par un convertisseur N–A

5.8.2. Interpolateur idéal

Dans l'énoncé du théorème d'échantillonnage, Shannon a également donné son corollaire qui précise qu'un signal $x(t)$ peut être reconstruit à partir des valeurs échantillonnées en utilisant la fonction d'interpolation suivante :

$$g(t) = \frac{\sin(\pi f_e t)}{(\pi f_e t)} \quad (5.26)$$

Cela signifie que le signal peut être reconstruit avec une somme de sinus cardinaux temporels centrés sur les instants d'échantillonnage $t = nT_e$ et d'amplitudes égales aux valeurs échantillonnées $x[n]$:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin(\pi f_e (t - nT_e))}{(\pi f_e (t - nT_e))} \quad (5.27)$$

Une illustration de cette interpolation est donnée à la figure 5.25. On notera que cette interpolation idéale n'est pratiquement réalisable qu'en temps différé et de manière approchée seulement.

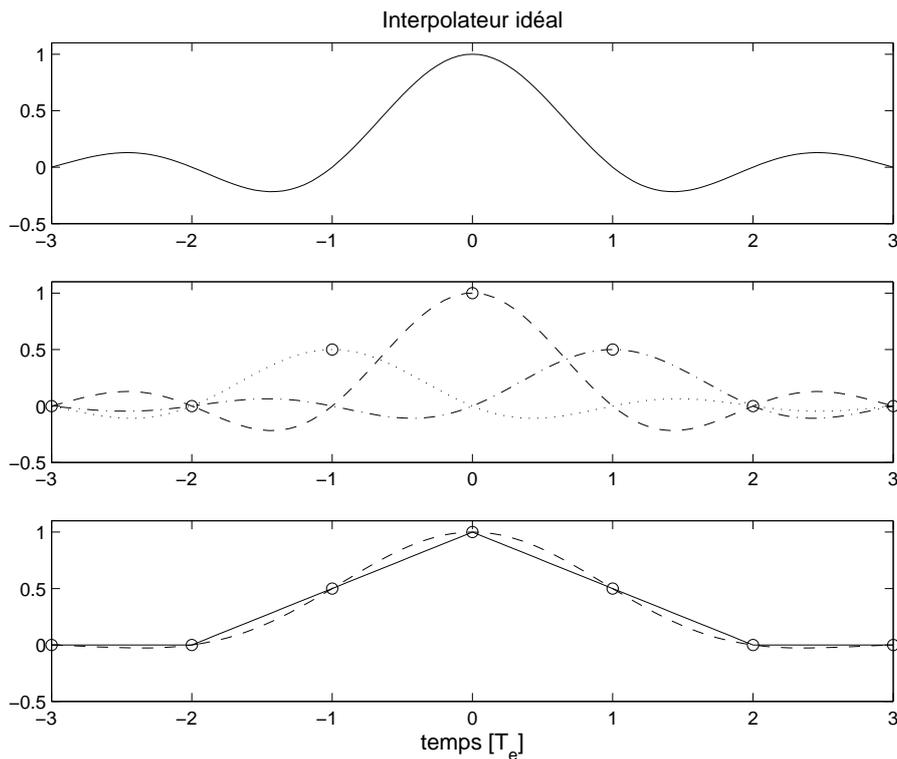


FIGURE 5.25.: Reconstruction d'un signal triangulaire à l'aide d'un interpolateur idéal

Une comparaison entre les résultats fournis par l'interpolateur d'ordre zéro et l'interpolateur idéal peut être faite en observant les reconstructions illustrées à la figure 5.26. Comme le signal original possède une discontinuité, cela conduit à un effet de Gibbs assez prononcé. Dans le cas d'un signal sans discontinuité échantillonné assez rapidement, la reconstruction est presque parfaite.

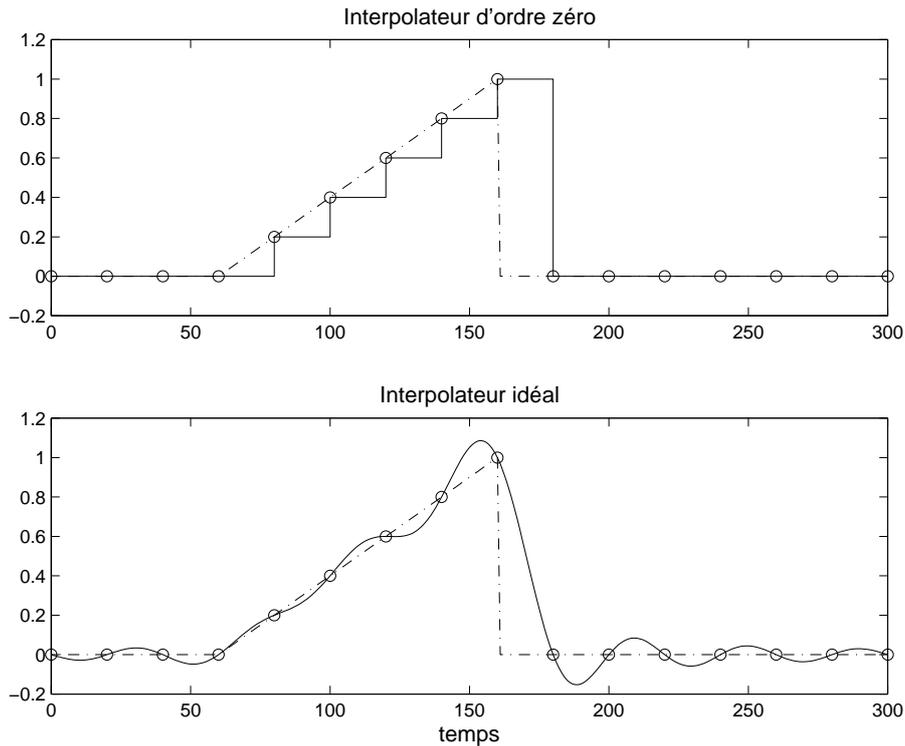


FIGURE 5.26.: Échantillonnage et reconstruction d'une rampe

5.8.3. Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un CNA

Le bloqueur d'ordre zéro fournit un signal analogique en escalier dont chaque niveau est égal à la valeur du signal numérique. Fondamentalement, cela signifie que le signal $x[n]$ est remplacé par une suite d'impulsions rectangulaires d'amplitude variable.

À cette opération de maintien de la valeur $x[n]$ correspond un opérateur linéaire dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est une impulsion d'amplitude 1 et de durée T_e (figure 5.27) :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.28)$$

La réponse en fréquence d'un tel opérateur est la transformée de Fourier $H(jf)$ de sa réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$H(jf) = T_e \frac{\sin(\pi f T_e)}{(\pi f T_e)} \exp(-j\pi f T_e) \quad (5.29)$$

Sa représentation bien connue est rappelée à la figure 5.28. Pour comparaison, on y a superposé en traitillé la réponse fréquentielle d'un interpolateur idéal. On notera que le CNA agit comme un filtre passe-bas entre 0 et $f_e/2$ et qu'il sera bon d'en tenir compte lors de la reconstruction du signal analogique.

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

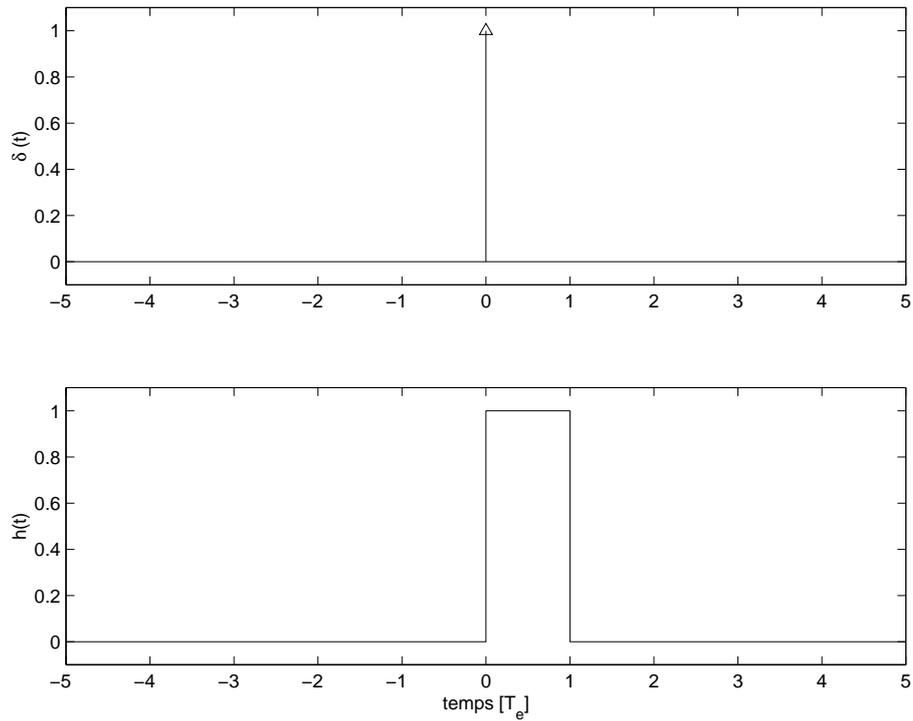


FIGURE 5.27.: Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro

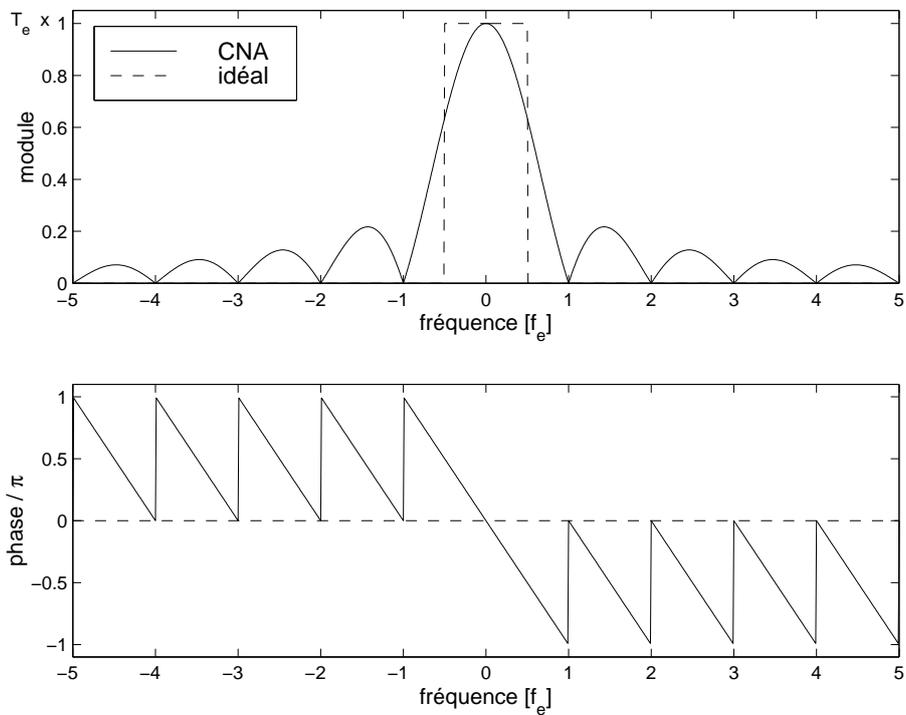


FIGURE 5.28.: Réponse fréquentielle d'un interpolateur d'ordre zéro

5.8.4. Filtre de reconstruction ou de lissage

On peut se rapprocher d'un signal analogique plus habituel en éliminant les escaliers du signal $x_s(t)$ créé par le CNA. Pour cela, on fait suivre le convertisseur d'un filtre passe-bas, dit de reconstruction ou de lissage. La bande passante de celui-ci doit être suffisante pour laisser passer l'information contenue dans la bande de base du signal numérique. Comme celui-ci s'étend de 0 à $f_e/2$, les filtres antirecouvrement et de reconstruction sont généralement les mêmes.

5.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N – N-A

Une illustration des différents points étudiés dans ce chapitre est donnée dans les figures qui suivent. On y décrit à l'aide de graphiques les effets du filtre antirecouvrement (FAR), de l'interpolateur d'ordre zéro (CNA) et celui du filtre de lissage (FL). Les signaux rencontrés correspondent à ceux du schéma fonctionnel suivant :

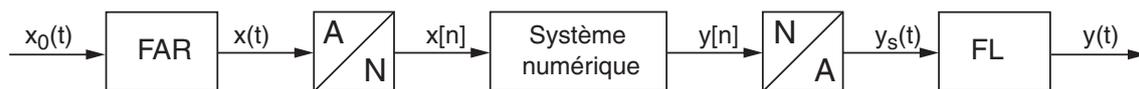


FIGURE 5.29.: Chaîne de traitement des signaux

5.9.1. Échantillonnage sans filtre antirecouvrement

La figure 5.30 montre le signal $x_0(t)$ échantillonné sans filtrage préalable et son spectre. On y voit en particulier combien le spectre d'amplitude $X_e(f)$ résultant s'éloigne du spectre original $X_0(f)$.

5.9.2. Échantillonnage avec filtre antirecouvrement

La figure 5.31 montre le signal $x(t)$ échantillonné avec un filtre antirecouvrement et son spectre. On y voit en particulier que le spectre d'amplitude $X_e(f)$ résultant est très proche, entre 0 et f_c , du spectre original $X_0(f)$.

5.9.3. Effet du convertisseur N–A

La figure 5.32 montre le signal échantillonné et son spectre ainsi que celui du bloqueur d'ordre 0 qui n'est autre que le premier lobe de la fonction sinus cardinal. Il est bien clair que ce spectre, qui est aussi la réponse fréquentielle du bloqueur, va modifier le spectre du signal $y[n]$ appliqué au CNA.

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

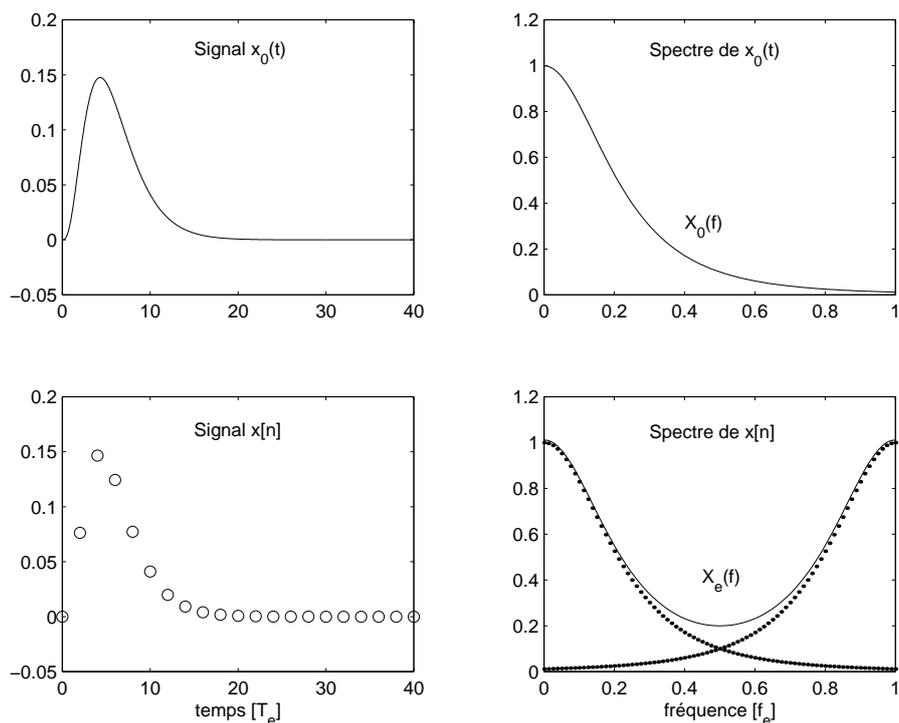


FIGURE 5.30.: Échantillonnage **sans** filtre antirecouvrement

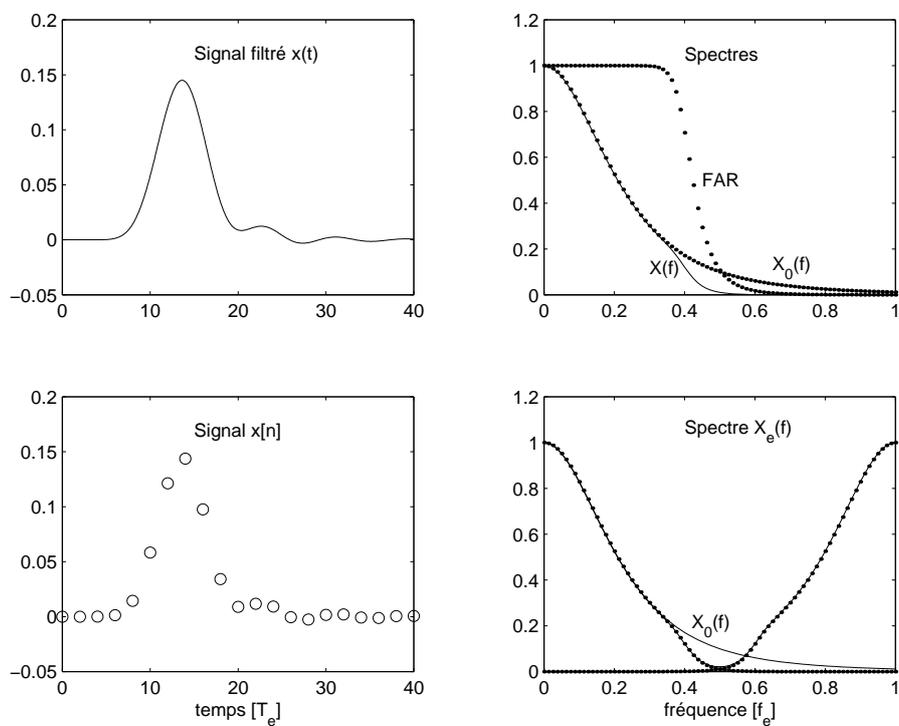


FIGURE 5.31.: Échantillonnage **avec** filtre antirecouvrement

5.9. Analyse qualitative d'une chaîne A-N - N-A

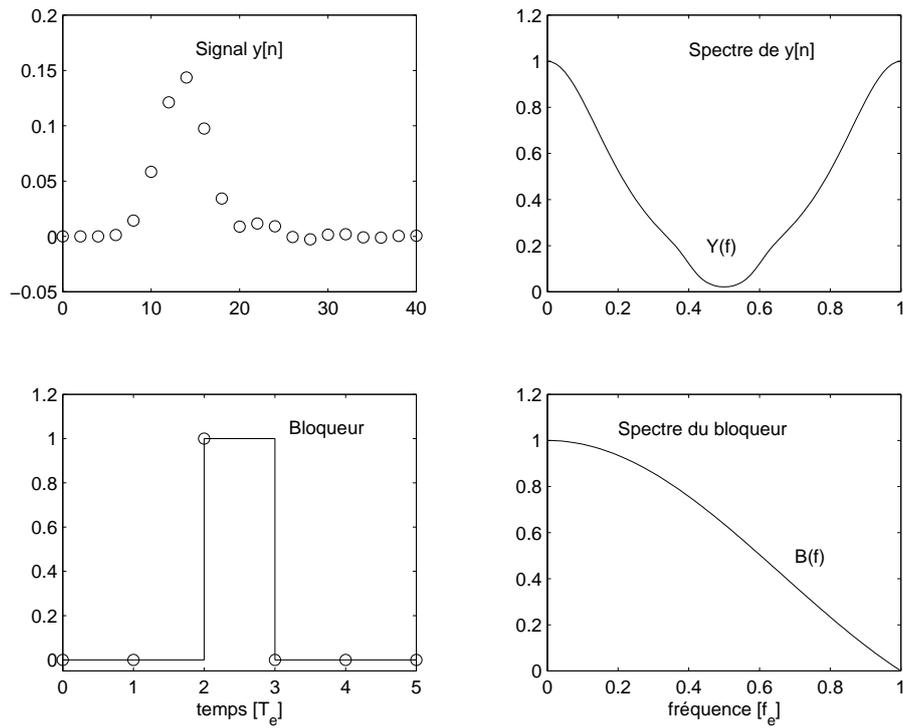


FIGURE 5.32.: Signal numérique et bloqueur d'ordre 0

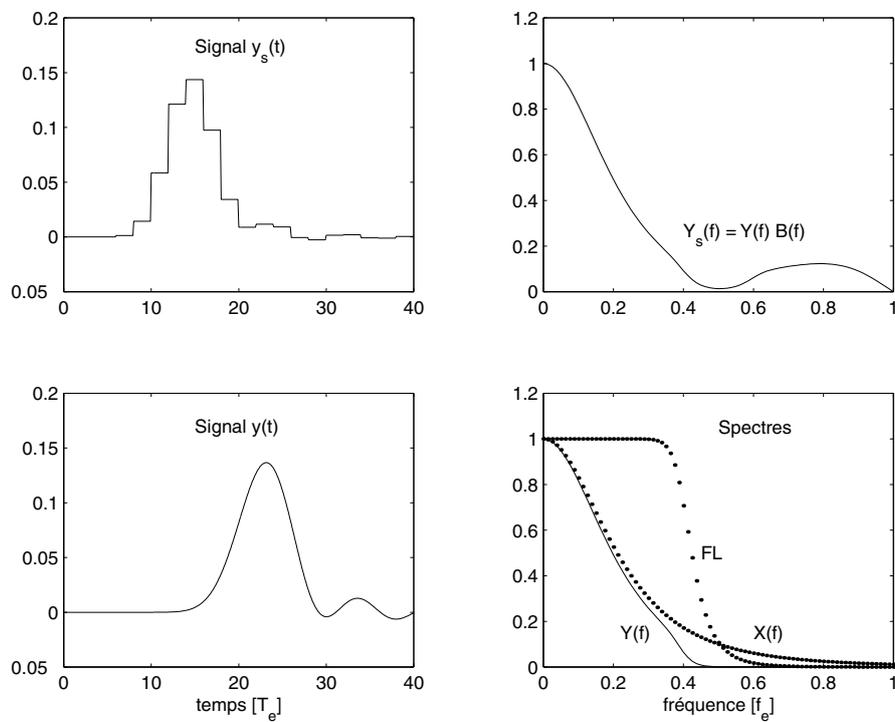


FIGURE 5.33.: Reconstruction sans et avec filtre de lissage

5.9.4. Reconstruction du signal analogique

La figure 5.33 montre le signal en escalier et son spectre $Y_s(f) = Y(f) \cdot B(f)$ qui provient du produit entre le spectre de $y[n]$ et la réponse fréquentielle du bloqueur.

Afin d'éliminer les escaliers de $y_s(t)$, on fait suivre le CNA d'un filtre passe-bas identique au filtre antirecouvrement puisque les fréquences supérieures à $f_e/2$ ne contiennent aucune information intéressante.

5.9.5. Correcteur d'amplitude

Il est fréquent de compléter ce filtre passe-bas par un correcteur d'amplitude accentuant les fréquences élevées. Ce correcteur, de réponse fréquentielle $1/B(f)$ pour f compris entre 0 et $f_e/2$, est construit de manière à compenser le comportement passe-bas du bloqueur. On obtient alors une réponse fréquentielle $Y(f) \simeq X(f)$ proche de celle du signal original.

5.10. Exercices

Ech 1 : Considérant un signal dont le spectre est représenté à la figure 5.34, déterminez la fréquence d'échantillonnage minimum pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral.

Admettant $f_e = 16 [kHz]$,

1. dessinez le spectre du signal échantillonné pour f compris entre $\pm 16kHz$;
2. que faut-il faire pour éviter le recouvrement spectral ?
3. dessinez le nouveau spectre ; quel en est l'avantage ?

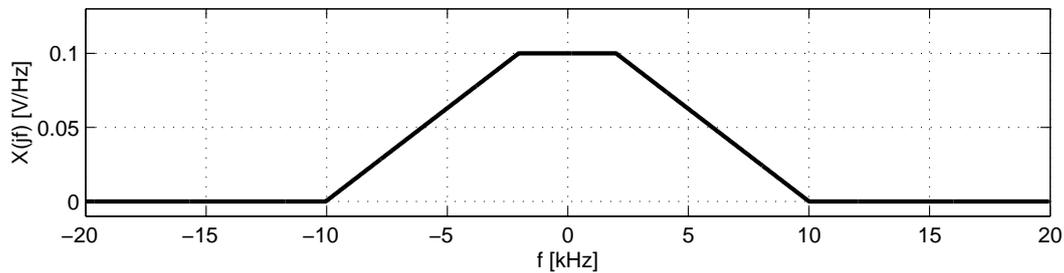


FIGURE 5.34.: Exercice 1

Ech 2 : On considère un signal $x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 t)$:

1. que valent sa période T_0 et sa fréquence f_0 ?
2. esquissez $x_a(t)$ sur 3 périodes au moins et dessinez son spectre $X_a(jf)$;
3. marquez les points d'échantillonnage de $x_a(t)$ lorsque $T_e = T_0/4$; esquissez le spectre $X_e(jf)$; analysez $x[n]$ et $X_e(jf)$;
4. faites de même lorsque $T_e = 3T_0/4$; quelle sinusoïde passe parmi ces points ? concluez ;
5. dans le cas où $T_e = T_0/2$, il se passe quelque chose de particulier ; analysez et commentez.

Ech 3 : On considère une SIR d'amplitude $A = 10 [V]$, de période $T_0 = 1 [msec]$ et de largeur $\Delta t = T_0/4$ que l'on échantillonne avec $T_e = T_0/20$;

1. esquissez $x(t)$ et $x_e(t)$;
2. esquissez $X(jf)$ et $X_e(jf)$;
3. que valent $X(jf)$ et $X_e(jf)$ pour $f = 3 [kHz]$?
Rép. : $X_e(+j3) = X(+j3) + X(-j17) + X(+j23) + \dots$

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Ech 4 : Soit un signal en dents de scie d'amplitude comprise entre $\pm A = \pm 5 [V]$, de période $T_0 = 1 [msec]$ que l'on échantillonne avec la fréquence $f_e = 8 [kHz]$;

1. esquissez $x(t)$ et $x_e(t)$;
2. sachant que $X(jk) = (-1)^{k+1} A/(jk\pi)$, $k \neq 0$, esquissez $X(jf)$ et $X_e(jf)$;
3. que valent $X(jf)$ et $X_e(jf)$ pour $f = 1 [kHz]$?

Ech 5 : Considérant le signal analogique

$$x_a(t) = 2 \cos(100\pi t) + 5 \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos(380\pi t) + 16 \sin\left(600\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. quelle valeur minimum faut-il choisir pour f_e si l'on veut respecter le théorème d'échantillonnage?
2. soit $f_e = 3 f_{e,min}$, esquissez les spectres d'amplitudes et de phases du signal $x_e(t)$.

Ech 6 : Un signal analogique

$$x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 240 t) + 3 \cos\left(2\pi \cdot 540 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

est échantillonné à raison de 600 échantillons par seconde.

1. que vaut la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2$?
2. si elles existent, que valent les fréquences apparentes f_{app} ?
3. si $x(n)$ est restitué à l'aide d'un convertisseur NA suivi d'un filtre passe-bas idéal tel que $f_c = f_e/2$, que vaut le signal reconstruit $y_a(t)$?

Ech 7 : Considérant un signal carré à valeur moyenne nulle de période $T_0 = 1 [ms]$ et d'amplitude $A = 1 [V]$ que l'on échantillonne à la fréquence $f_e = 9.8 [kHz]$, on demande :

1. Quelles sont les fréquences et amplitudes des raies spectrales du signal analogique? Esquissez le spectre d'amplitudes.
2. Quelle est la largeur de la bande de base? Quelles sont les composantes spectrales réelles présentes dans la bande de base?
3. Quelles sont les fréquences apparentes présentes dans la bande de base?
4. Quelles sont les amplitudes de chacune de ces raies?
5. Les résultats de l'analyse spectrale sont donnés dans la figure 5.35; associez les numéros des composantes spectrales théoriques aux raies spectrales obtenues après échantillonnage.

Ech 8 : Considérant une exponentielle décroissante $x(t) = e^{-at} \varepsilon(t)$ que l'on échantillonne avec une fréquence f_e , montrez que le spectre du signal échantillonné vaut :

$$X_e(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi k f_e)^2}$$

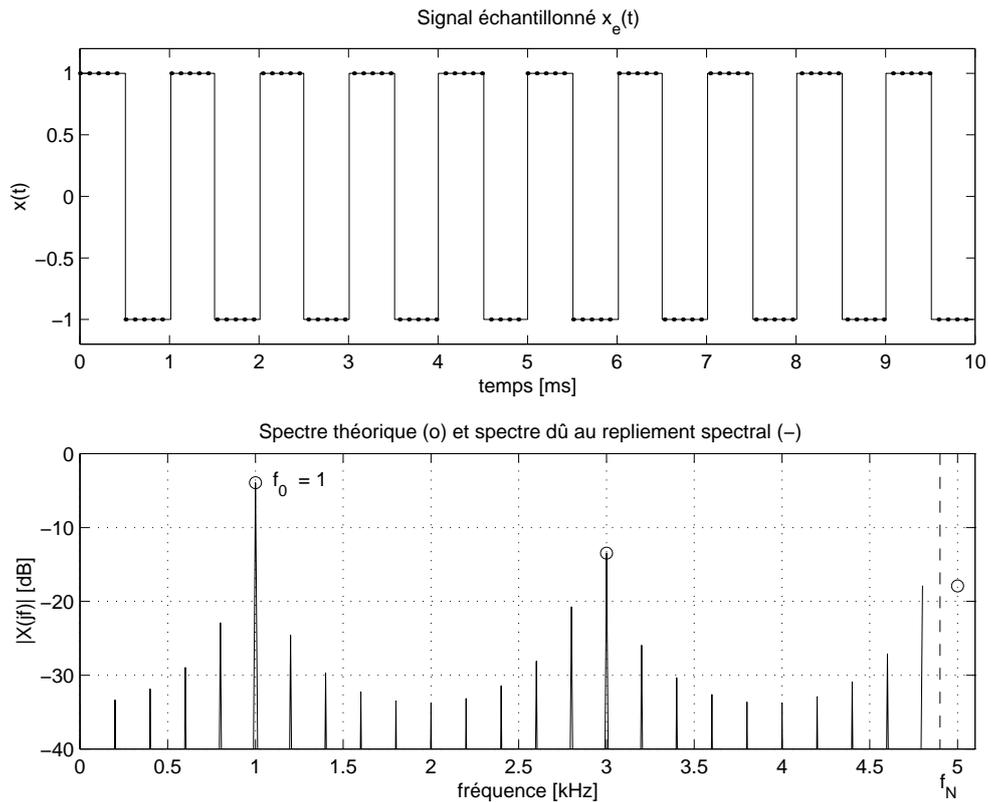


FIGURE 5.35.: Échantillonnage et repliement spectral pour un signal carré

AnNa 1 : Considérant qu'un signal est échantillonné à 40kHz et numérisé avec 16 bits, quelle est la durée d'enregistrement que l'on peut stocker dans 1 Moct ?

AnNa 2 : Un filtre numérique est constitué des éléments suivants :

- un convertisseur AN à 12 bits avec un temps de conversion de $5\mu\text{s}$,
- un processeur DSP de 16 bits avec un cycle d'horloge de 50ns,
- un convertisseur NA à 12 bits avec un temps d'établissement de $0.5\mu\text{s}$.

Calculez la bande passante maximum que peut traiter ce filtre sachant que pour chaque valeur échantillonnée le DSP calcule le signal de sortie avec l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{19} h(m) x(n - m)$$

en effectuant une multiplication et une addition en un seul cycle d'horloge.

AnNa 3 : Un signal sinusoïdal d'amplitude 6 V est numérisé à l'aide d'un convertisseur 16 bits. Sachant que celui-ci travaille entre ± 10 V et qu'il est entâché d'une non-linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB, calculez :

1. sa résolution et son pas de quantification ;
2. les valeurs efficaces du signal et du bruit de quantification ;
3. le rapport signal sur bruit du signal numérisé.

5. ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

AnNa 4 : On échantillonne un signal sinusoïdal d'amplitude 5 V avec un CAN 16 bits / ± 10 V entâché d'une non-linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB. Est-il possible de garantir un SNR d'au moins 90 dB ?

AnNa 5 : On échantillonne un signal analogique

$$x(t) = 4 \cos(2\pi \cdot 300 t) - 2 \cos(2\pi \cdot 900 t) [V]$$

avec un convertisseur AN 16 bits travaillant entre ± 5 V qui possède une non linéarité de $\pm \frac{1}{2}$ LSB. Les valeurs numériques du CAN sont transmises à travers une ligne dont le débit est de 10^4 oct/sec. On demande :

1. y a-t-il repliement spectral ?
2. que valent la résolution et le pas de quantification du convertisseur ?
3. que vaut la puissance du signal $x(t)$? quelle est sa valeur efficace ?
4. que vaut le rapport signal sur bruit de conversion AN ?

AnNa 6 : On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure 4 kHz comme filtre antirepliement. Considérant que le signal échantillonné est perturbé par une composante spectrale d'amplitude $A = 5$ V et de fréquence $f_0 = 8$ kHz, on demande :

1. quelle fréquence d'échantillonnage faut-il choisir pour que le repliement de la perturbation se fasse en $f \geq f_c$?
2. quelle sera l'amplitude A_r du signal replié en $f = f_c$?

AnNa 7 : On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 comme filtre antirepliement en amont d'un convertisseur AN 12 bits avec $\pm \frac{1}{2}$ LSB de non linéarité. Sa fréquence de coupure f_c est fixée à 8 kHz.

1. quelle est la résolution du convertisseur comprenant la quantification et la non-linéarité ;
2. esquissez la réponse fréquentielle du filtre et celle causée par le repliement spectral ;
3. calculez la fréquence d'échantillonnage nécessaire pour que l'affaiblissement du repliement spectral en $f = f_c$ soit inférieur à la résolution du convertisseur.

Rép. : $f_e = 13.7 f_c$

AnNa 8 : Un signal $x(t)$ sinusoïdal d'amplitude $A = 10$ [V] de fréquence $f = 1$ [kHz] est échantillonné très rapidement (à 1 [MHz], par exemple) à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique 4 bits travaillant entre ± 10 [V].

1. esquissez les signaux $x(t)$, $x_e[n]$, $x_q(t)$;
2. esquissez l'erreur de quantification $e(t)$;
3. quelle est la valeur efficace de ce bruit de quantification ?
4. que vaut le SNR ?

AnNa 9 : On remplace le signal sinusoïdal de l'exercice précédent par un signal triangulaire de mêmes amplitude et fréquence. Qu'est ce qui change ?

6. Description des signaux et systèmes numériques

Ce chapitre décrit tout d'abord les signaux numériques au travers de quelques exemples fondamentaux. Il s'attarde ensuite sur la description des systèmes numériques et de leurs propriétés.

Puis, considérant les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI), on définit le produit de convolution avant d'analyser en détail sa réalisation et quelques applications telles que l'interpolation numérique.

On termine enfin par la description des modèles récurrents de quelques systèmes fondamentaux.

6.1. Signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notées $x[n]$ pour $-\infty < n < +\infty$. Dans le cas où la séquence provient de l'échantillonnage périodique d'un signal continu $x(t)$, on aura :

$$x[n] = x(nT_e)$$

Les signaux discrets sont souvent représentés graphiquement (figure 6.1). Bien que l'abscisse soit dessinée de manière continue, il est important de noter que la séquence $x[n]$ n'est définie que pour n entier. Pour n non entier, $x[n]$ est simplement non définie.

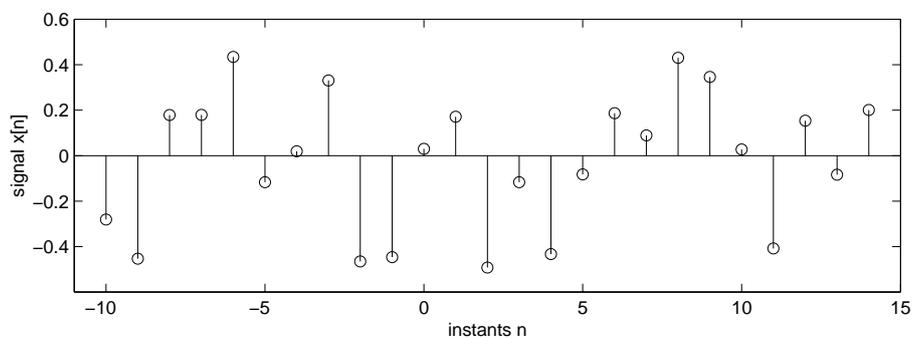


FIGURE 6.1.: Graphe d'un signal numérique

6.1.1. Quelques signaux fondamentaux

Parmi l'infinité de séquences que l'on peut imaginer, il y en a quelques unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et des systèmes. Ce sont :

1. L'*impulsion unité* définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence (telle que celle de la figure 6.1) peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées $\delta[n-k]$ et d'amplitude $x[k]$. La suite $x[n]$ peut donc être décrite par l'expression suivante :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \quad (6.2)$$

2. Le *saut unité* défini par :

$$\varepsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

De manière équivalente, on a :

$$\varepsilon[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad (6.4)$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux sauts unités :

$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] \quad (6.5)$$

3. L'*exponentielle numérique* décrite par :

$$x[n] = R^n \varepsilon[n] \quad (6.6)$$

Dans le cas où $0 < R < 1$, on obtient une exponentielle décroissante alors que pour $|R| > 1$, l'amplitude de la séquence ne cesse d'augmenter avec n .

4. La *sinusoïde* décrite par :

$$x[n] = \cos(n \Omega_0 + \varphi) \quad (6.7)$$

avec $\Omega_0 = 2\pi f_0 T_e$.

5. La *suite complexe* généralement décrite par une exponentielle numérique dont l'argument est complexe :

$$x[n] = (a + jb)^n \varepsilon[n]$$

En remplaçant l'argument $a + jb$ par sa représentation polaire

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \arctan \frac{b}{a} \equiv R \exp(j\Omega_0)$$

on obtient

$$x[n] = R^n \exp(jn\Omega_0) \varepsilon[n] \quad (6.8)$$

Grâce à la relation d'Euler, on voit que cette séquence est une oscillation à valeurs complexes dont l'amplitude varie exponentiellement avec le temps n . L'enveloppe sera croissante si $R > 1$ et décroissante si $R < 1$.

6. Le *phaseur* de pulsation Ω_0 :

$$x[n] = \exp(jn\Omega_0) \quad (6.9)$$

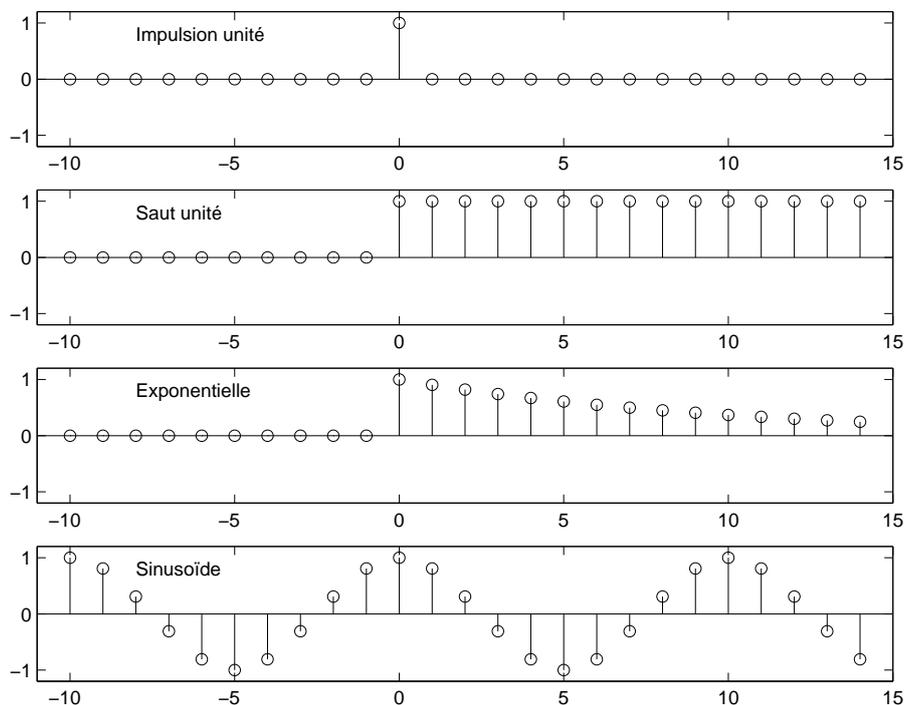


FIGURE 6.2.: Quelques signaux fondamentaux

Les séquences exponentielle, sinusoïdale et complexe décrites ci-dessus sont particulièrement importantes dans l'analyse des systèmes linéaires.

On notera que pour les signaux discrets, la pulsation normalisée Ω_0 se mesure en radians par échantillon et non pas en radians par seconde comme pour la pulsation ω_0 des signaux continus.

6.1.2. Périodicité des signaux numériques

Du point de vue de la périodicité, il existe une différence importante entre signaux continus et discrets. Dans le cas de ces derniers, la périodicité existe si :

$$x[n] = x[n + N]$$

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

où N est un entier représentant la période de la séquence. Ce qui, pour une sinusoïde discrète, s'écrit :

$$x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi) = A \cos(n\Omega_0 + N\Omega_0 + \varphi)$$

Comme la sinusoïde est périodique 2π , on doit avoir

$$N\Omega_0 = k2\pi \tag{6.10}$$

Or ceci n'est possible que si Ω_0/π est rationnel.

Considérons comme exemple le cas où $\Omega_0 = 1$. On a alors $N = 2\pi k$; ce qui n'est pas possible car N et k sont des entiers et que π est irrationnel. Par contre, si $\Omega_0 = 3\pi/11$, on a alors :

$$N\Omega_0 = N3\pi/11 = k2\pi \Rightarrow N = \frac{22}{3}k$$

et la plus petite valeur de N satisfaisant cette équation est 22 lorsque k vaut 3. Ces deux valeurs signifient qu'il faut 22 échantillons pour retrouver la valeur de départ (une période numérique) et que cette période numérique contient 3 périodes du signal analogique échantillonné.

On voit donc que les *séquences sinusoïdales n'ont pas nécessairement la même période que leur correspondant analogique* et, suivant la valeur de Ω_0 , elles peuvent même ne pas être périodiques du tout.

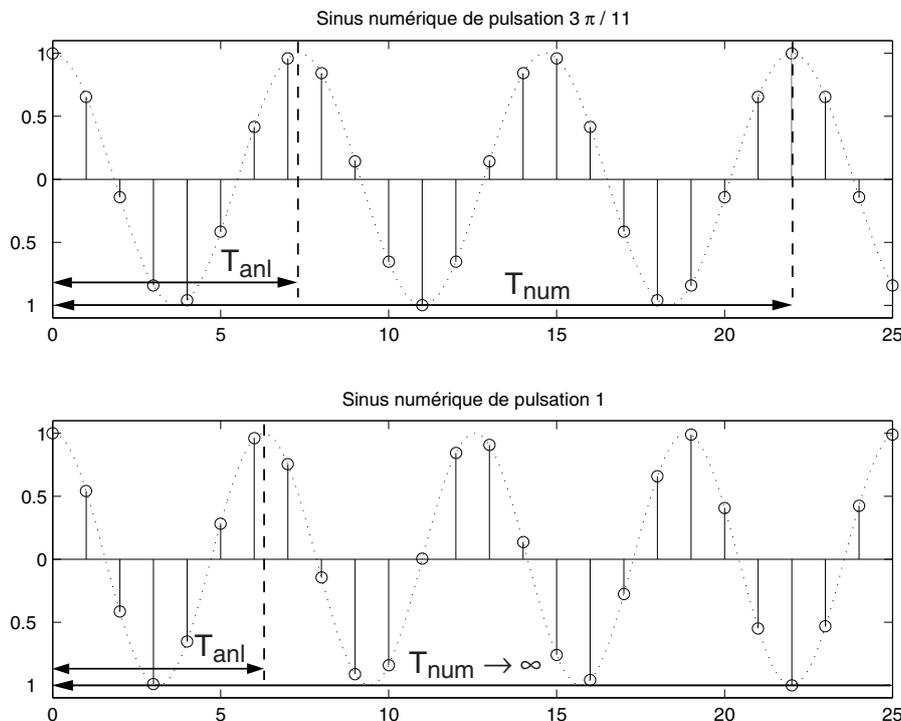


FIGURE 6.3.: Périodes numérique et analogique

On doit encore rappeler le fait que *l'interprétation des hautes et basses fréquences* est différente pour les signaux discrets ou continus. En effet, pour une sinusoïde analogique, l'oscillation sera d'autant plus rapide que la pulsation ω_0 est élevée. Dans le cas du signal discret $x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi)$, l'oscillation sera d'autant plus rapide que Ω_0 se rapproche de π et elle deviendra plus lente si Ω_0 varie de π à 2π . Cette deuxième partie correspond au phénomène de repliement spectral. En fait, à cause de la périodicité des spectres des signaux discrets, ce qui se passe autour de $\Omega = 2\pi$ est indistinguable de ce qui se passe autour de $\Omega = 0$.

6.2. Systèmes numériques

Un système numérique est une fonction ou un algorithme prédéfini qui opère sur un signal numérique (appelé l'entrée ou l'excitation) et qui produit un autre signal numérique nommé la sortie ou la réponse du système.

Un tel système est défini mathématiquement comme un opérateur ou une transformation qui modifie une séquence d'entrée $x[n]$ en une séquence de sortie $y[n]$. On peut représenter cette transformation par un opérateur T tel que $y[n] = T\{x[n]\}$ et en donner l'équation ou son schéma fonctionnel (section 6.2.2).

6.2.1. Exemples de système numériques

Quelques systèmes simples

Considérons des systèmes simples décrits par les équations du tableau 6.1.

A chacun de ces systèmes, on applique à l'instant $n = 0$ le signal :

$$x[n] = \{\uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

Les réponses de chacun des systèmes sont alors les suivantes :

1. L'équation (a) représente le système identité qui restitue simplement le signal qu'on lui applique :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

2. L'équation (b) représente un décalage arrière d'un pas :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, \dots\}$$

3. Dans le cas (c), le signal est avancé d'un pas :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

4. La sortie du système (d) fournit à chaque instant la valeur maximum du signal considéré aux instants présent (n), précédent ($n - 1$) et suivant ($n + 1$) :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 0, 0, 0, \dots\}$$

a	$y[n] = x[n]$
b	$y[n] = x[n - 1]$
c	$y[n] = x[n + 1]$
d	$y[n] = \max \{x[n - 1], x[n], x[n + 1]\}$
e	$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[k]$
f	$y[n] = x[n] - x[n - 1]$

TABLE 6.1.: Équations décrivant des systèmes numériques

5. Le système (e) représente un accumulateur qui fait la somme des valeurs qui apparaissent au cours du temps :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 3, 6, 10, 15, 15, 15, 15, 15 \dots\}$$

6. Le système (f) effectue la différence entre la valeur actuelle et la précédente ; ce qui, numériquement, correspond à la dérivation analogique :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 1, 1, 1, 1, -5, 0, 0 \dots\}$$

Moyenneur glissant

Un moyenneur glissant d'ordre 5 est défini par l'équation :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n - 2] + x[n - 1] + x[n] + x[n + 1] + x[n + 2]) \quad (6.11)$$

Ce système fournit à chaque instant n la valeur moyenne des 5 échantillons $x[n]$ entourant et correspondant à la position n . Un tel opérateur est fréquemment utilisé pour atténuer des fluctuations et mettre ainsi en évidence une tendance à moyen terme. Une illustration en est donnée par la figure 6.5 représentant l'enregistrement d'une température.

On notera que ce moyenneur centré sur l'instant n est un système non causal ; c'est-à-dire que pour pouvoir l'utiliser, il est nécessaire d'avoir préalablement à sa disposition les valeurs à traiter. Si l'on désirait effectuer ce traitement en temps réel

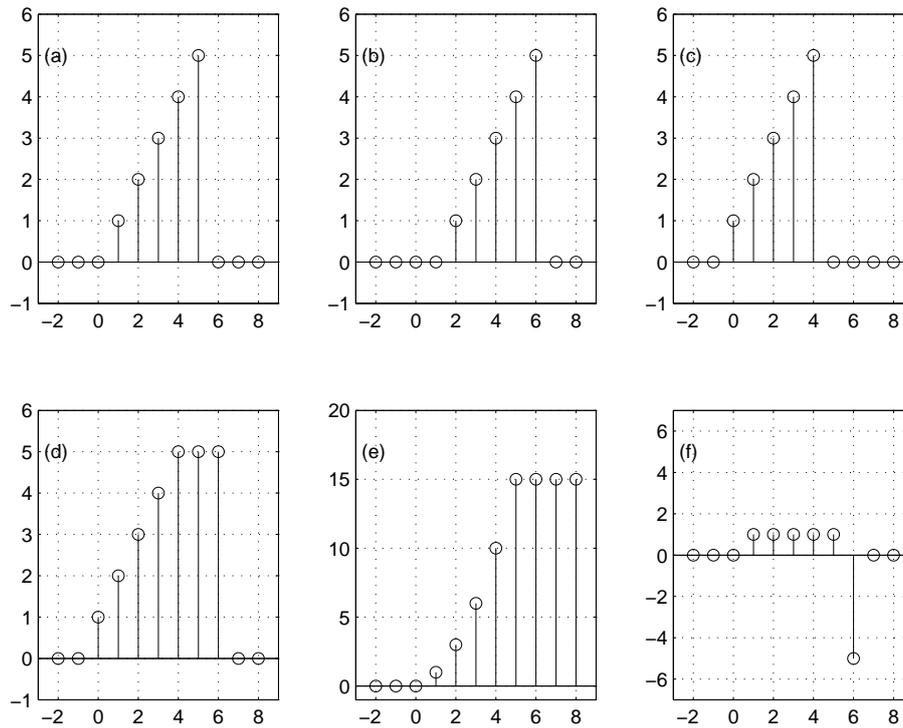


FIGURE 6.4.: Réponses des systèmes considérés

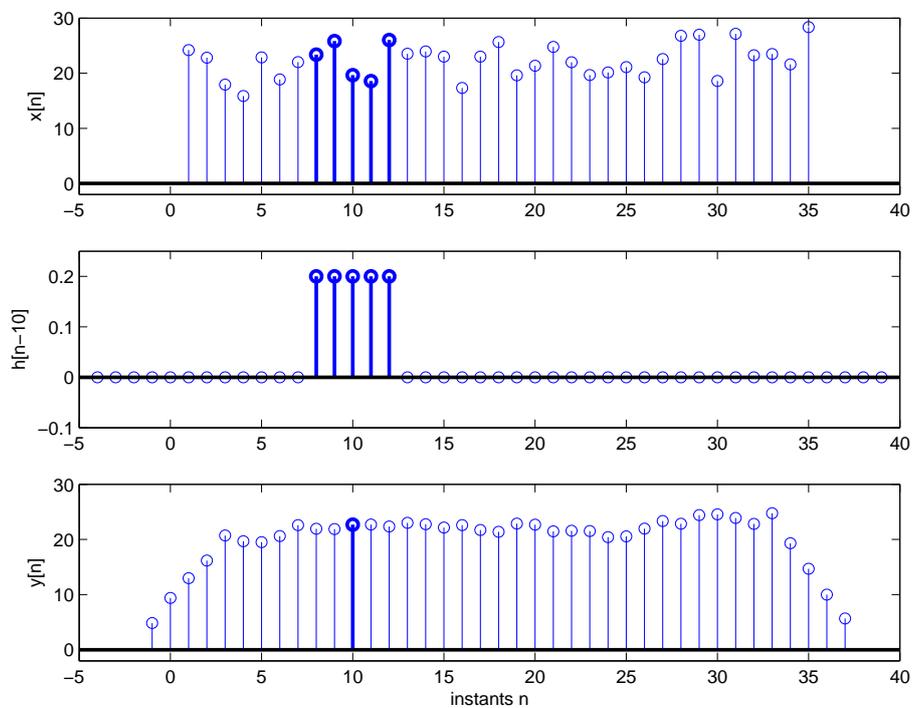


FIGURE 6.5.: Lissage de l'évolution d'une température

(système causal), on ne pourrait calculer la moyenne glissante que sur les 5 points les plus récents :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]) \quad (6.12)$$

6.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique

Un système numérique peut être décrit, comme on l'a vu, par la donnée d'une équation liant le signal de sortie au signal d'entrée. On peut également, et c'est fréquemment le cas, représenter ces systèmes à l'aide de diagrammes fonctionnels.

Ceux-ci illustrent alors graphiquement les opérations effectuées sur le signal d'entrée ainsi que les connexions les reliant. Les plus fréquentes sont l'addition de 2 valeurs (\oplus), la multiplication de 2 signaux entre eux (\otimes), la multiplication d'un signal par un coefficient (\rightarrow), le décalage avant (z) et le décalage arrière (z^{-1}).

Deux illustrations de schémas fonctionnels sont présentées dans la figure 6.6. Le premier des deux schémas correspond à l'équation non linéaire suivante :

$$y[n] = 0.5 (x_1[n] + x_1[n-1]) \cdot x_2[n] + 0.9 y[n-1]$$

dans laquelle on trouve un moyennneur causal d'ordre 2 (premier cadre) et un filtre passe-bas d'ordre 1 (deuxième cadre).

Le deuxième schéma fonctionnel illustre une équation aux différences linéaire d'ordre 2

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

représentant un filtre récursif d'ordre 2.

6.2.3. Propriétés des systèmes

Suivant leurs propriétés, on peut classer les systèmes de la façon suivante :

1. *Système statique*

Un système statique ou sans mémoire est un système dont la sortie $y[n]$ ne dépend que du signal d'entrée à l'instant n . Par exemple :

$$y[n] = a x[n] + n x[n]^2$$

2. *Système dynamique*

Inversement, un système tenant compte de ce qui s'est passé ou se passera est dit dynamique ou avec mémoire :

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

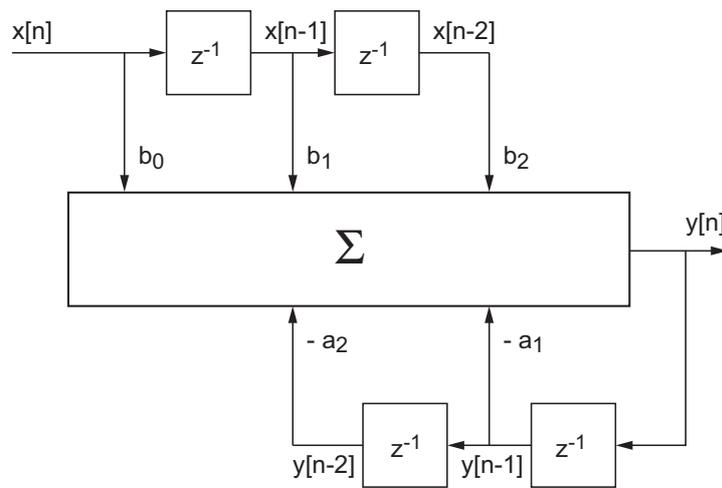
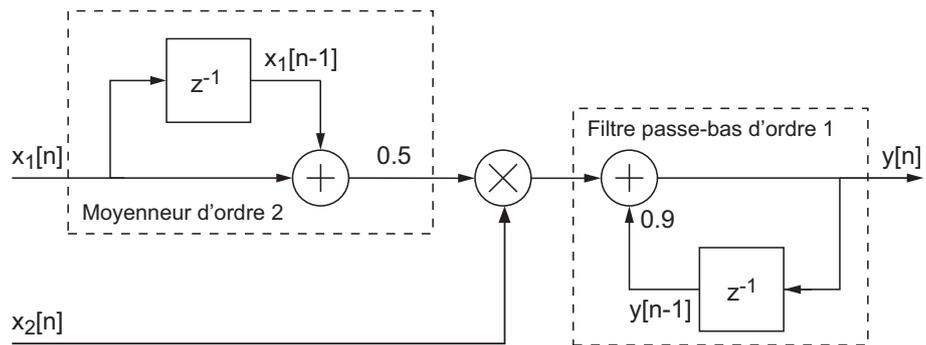


FIGURE 6.6.: Deux exemples de schémas fonctionnels

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

3. *Système linéaire*

Un système linéaire satisfait au principe de superposition :

$$\begin{aligned}y[n] &= T \{a x_1[n] + b x_2[n]\} \\ &= a T \{x_1[n]\} + b T \{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n]\end{aligned}$$

4. *Système temporellement invariant*

Un système invariant dans le temps est un système pour lequel un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie simplement décalé de la même valeur :

$$\begin{aligned}\text{si } T \{x[n]\} &= y[n] \\ \text{alors } T \{x[n+d]\} &= y[n+d]\end{aligned}$$

De manière équivalente, un système est dit temporellement invariant lorsqu'on peut croiser les opérations de décalage et de transformation sans modifier le signal de sortie. On a alors :

$$y_{D,T}[n] = y_{T,D}[n]$$

On notera que tous les systèmes décrits par une équation aux différences à coefficients constants sont temporellement invariants.

5. *Système causal*

Un système est causal si la séquence de sortie ne dépend que des valeurs actuelles ou passées de la séquence d'entrée.

6. *Système stable*

Un système est stable si, quelle que soit la séquence d'amplitude finie appliquée à l'entrée, sa sortie ne devient pas infiniment grande.

On notera que les propriétés mentionnées ci-dessus sont des propriétés liées aux systèmes et sont indépendantes des séquences appliquées à ceux-ci.

Remarque Il est important de ne pas oublier que la grande liberté offerte lors de la réalisation des systèmes numériques peut parfois conduire à des pièges. Ainsi en est-il de la succession des opérations effectuées sur un signal. En effet, on a pris l'habitude avec les systèmes analogiques d'effectuer des opérations dans l'ordre qui nous convient sachant que le résultat est théoriquement indépendant de l'ordre des opérations de filtrage. Cela était possible parce que les systèmes analogiques réels sont pratiquement tous linéaires et temporellement invariants par nature.

Or, avec les systèmes numériques, les opérations que l'on peut souhaiter faire ne sont limitées que par notre imagination et certaines d'entre elles conduisent à des résultats qui dépendent de la succession des opérations effectuées. Il est donc très important de vérifier si les opérations avec lesquelles on agit sur un signal sont temporellement invariantes ou non.

Quelques exemples

L'accumulateur Un accumulateur défini par la relation :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (6.13)$$

correspond à l'opération analogique d'intégration. C'est un système linéaire. On notera que si on lui applique une impulsion unité $\delta[n]$, sa sortie sera un saut unité $\varepsilon[n]$. Si on lui applique un saut unité, sa sortie ne cessera d'augmenter linéairement avec n et tendra vers l'infini. L'accumulateur n'est donc pas un système stable.

Différences avant et arrière La différence entre 2 valeurs successives est l'équivalent de la dérivation analogique. On peut effectuer la différence avant définie par la relation :

$$y[n] = x[n+1] - x[n] \quad (6.14)$$

Elle n'est évidemment pas causale; ce qui est par contre le cas pour la différence arrière :

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \quad (6.15)$$

Opérateur quadratique Afin d'illustrer ce qu'est un système invariant temporellement, considérons l'opérateur quadratique :

$$y[n] = x^2[n] \quad (6.16)$$

Si l'on effectue d'abord l'élévation au carré puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x^2[n] \rightarrow x^2[n-d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n-d] \rightarrow x^2[n-d] = y_{D,T}[n]$$

Comme les deux résultats sont identiques, le système est temporellement invariant.

Sous-échantillonnage Cette opération très fréquente en traitement numérique des signaux n'est pas invariante temporellement. Pour le voir, considérons une situation où l'on ne prend qu'un échantillon sur deux :

$$y[n] = x[2n] \quad (6.17)$$

Si l'on effectue d'abord la contraction puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[2n] \rightarrow x[2n-d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n-d] \rightarrow x[2(n-d)] = y_{D,T}[n]$$

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Comme le résultat dépend de l'ordre des opérations, le système n'est pas temporellement invariant.

Le tableau 6.2 rassemble les propriétés de quelques opérations fréquemment effectuées en traitement numérique des signaux et mentionne si les opérations sont linéaires (L), invariantes temporellement (I), causales (C), stables (S) et si elles nécessitent une mémoire (M). Quelques opérations sont laissées à l'analyse du lecteur.

	Opérations	Équations	L	I	C	S	M
a	Différence avant	$x[n+1] - x[n]$	O	O	N	O	O
b	Différence arrière	$x[n] - x[n-1]$	O	O	O	O	O
c	Accumulation	$\sum_{-\infty}^n x[k]$	O	O	O	N	O
d	Amplification	$ax[n]$	O	O	O	O	N
e	Moyenneur centré	$(x[n+1] + x[n] + x[n-1])/3$	O	O	N	O	O
f	Contraction temporelle	$x[n^2]$					
g	Sous-échantillonnage	$x[2n]$					
h	Rotation autour de Oy	$x[-n]$					
j	Multiplication temporelle	$nx[n]$					
k	Opération quadratique	$x^2[n]$					
l	Amplification et décalage	$ax[n] + b, \quad b \neq 0$					

TABLE 6.2.: Propriétés de quelques transformations

6.2.4. Interconnexions des systèmes

Comme pour les systèmes analogiques, les systèmes numériques peuvent être interconnectés pour former des systèmes plus complexes. Pour ce faire, on a deux possibilités : les connecter en cascade ou en parallèle (figure 6.7). Lors d'une connexion en cascade, on a les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} y_1[n] &= H_1 \{x[n]\} \\ y[n] &= H_2 \{y_1[n]\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[n] = H_2 \{H_1 \{x[n]\}\}$$

Lors d'une connexion en parallèle, on a les relations suivantes :

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \Rightarrow y[n] = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\}$$

Et c'est seulement dans le cas où les systèmes sont *linéaires et temporellement invariants* que l'on pourra écrire comme on a l'habitude de le faire avec les systèmes continus :

$$\begin{aligned} y[n] &= (H_1 \cdot H_2) \{x[n]\} = (H_2 \cdot H_1) \{x[n]\} \\ y[n] &= (H_1 + H_2) \{x[n]\} = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\} \end{aligned}$$

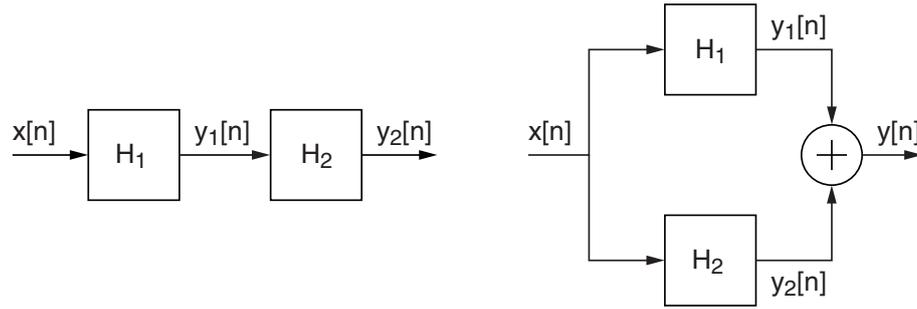


FIGURE 6.7.: Interconnexions de 2 systèmes en cascade ou en parallèle

6.2.5. Conclusions

Comme nous venons de le voir, les systèmes linéaires et temporellement invariants (systèmes LTI) constituent une classe importante des systèmes et c'est seulement sur les systèmes LTI que l'on peut appliquer les notions de réponse impulsionnelle, de produit de convolution et de fonction de transfert.

6.3. Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Parmi l'ensemble des réponses temporelles d'un système, il en est une qui permet de calculer toutes les autres : c'est la réponse impulsionnelle que l'on obtient en appliquant à un système LTI une impulsion unité $\delta[n]$. Cette réponse particulière est désignée par $h[n]$:

$$h[n] \equiv T \{ \delta[n] \} \quad (6.18)$$

On a vu au début de ce chapitre qu'un signal quelconque $x[n]$ peut être considéré comme une suite d'impulsions d'amplitude variable :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] \quad (6.19)$$

Puisque les systèmes que nous examinerons dès à présent sont linéaires et temporellement invariants, la réponse de ceux-ci au signal $x[n]$ sera constituée d'une somme de réponses dues à chaque impulsion $x[k] \delta[n - k]$:

$$y_k[n] = T \{ x[k] \delta[n - k] \} = x[k] h[n - k] \quad (6.20)$$

Ce qui, en tenant compte de l'ensemble des impulsions, conduit à :

$$y[n] = T \{ x[n] \} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] \quad (6.21)$$

Cette relation importante porte le nom de *produit de convolution numérique*. Les opérations que nous venons d'effectuer peuvent être décrites et résumées dans la

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

suite de relations suivantes

$$\begin{aligned} \delta[n] &\rightarrow h[n] \\ \delta[n-k] &\rightarrow h[n-k] \\ x[k] \delta[n-k] &\rightarrow x[k] h[n-k] \\ \sum x[k] \delta[n-k] &\rightarrow \sum x[k] h[n-k] \\ x[n] &\rightarrow y[n] \end{aligned}$$

qui sont illustrées par la figure 6.8.

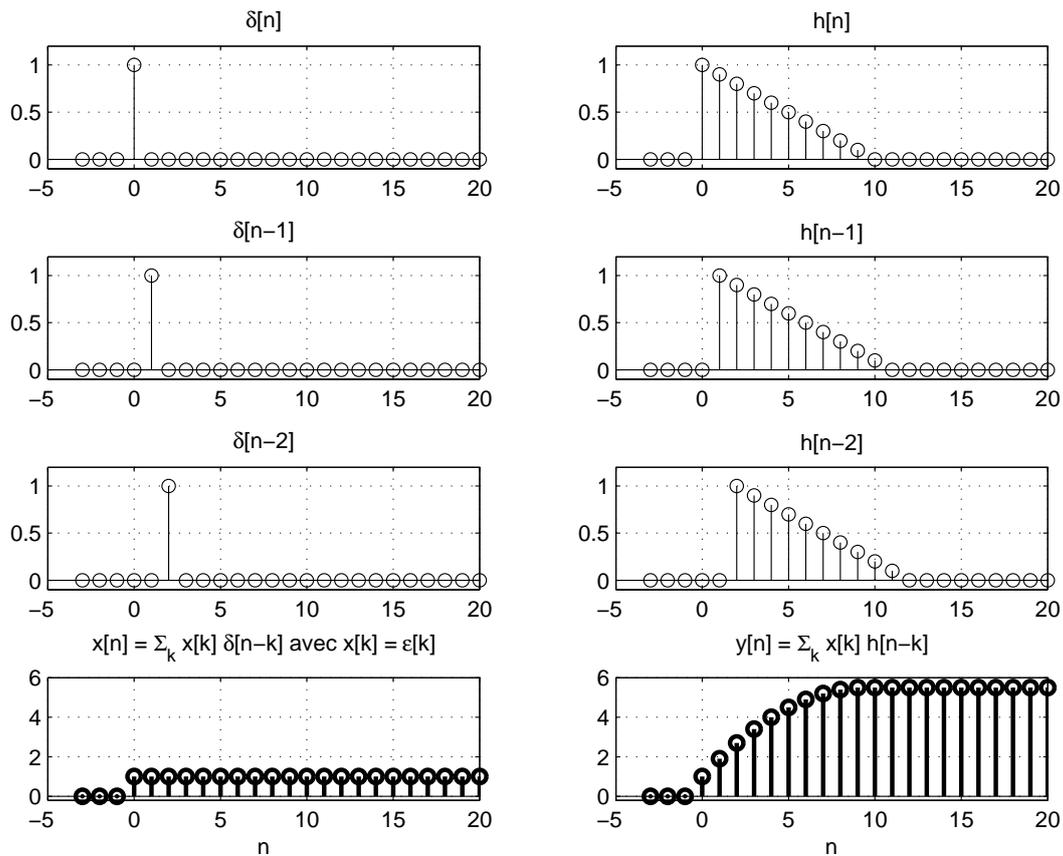


FIGURE 6.8.: Illustration du produit de convolution

Un simple changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \quad (6.22)$$

Ce résultat s'écrit symboliquement sous la forme :

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] \quad (6.23)$$

L'intérêt du produit de convolution réside dans le fait qu'un système LTI est totalement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$ et que le calcul de la réponse

à un signal quelconque peut alors se faire en restant dans le domaine temporel. On notera que le produit de convolution est le résultat direct de la linéarité et de l'invariance temporelle; il ne peut donc s'appliquer qu'aux systèmes LTI.

6.3.1. Systèmes causaux

Systèmes à réponse impulsionnelle infinie

Dans le cas où le système considéré est causal, sa réponse impulsionnelle $h[n]$ ne peut pas précéder l'instant de l'application du signal $x[n]$ au système; elle est donc nulle si $n < 0$. Considérant que l'on applique le signal $x[n]$ à l'instant $n = 0$, on a donc :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+n} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+n} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (6.24)$$

Systèmes à réponse impulsionnelle finie

De plus, dans le cas très fréquent de systèmes causaux à réponse impulsionnelle de durée finie (systèmes RIF), la réponse impulsionnelle est nulle pour $n < 0$ et pour $n \geq N$. Alors, considérant que $x[n < 0] = 0$, la réponse impulsionnelle est de longueur N et la réponse du système à un signal quelconque $x[n]$ se calcule avec :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (6.25)$$

Le schéma fonctionnel correspondant à cette équation est représenté à la figure 6.9 (on notera l'usage de l'opérateur z^{-1} qui effectue un décalage arrière).

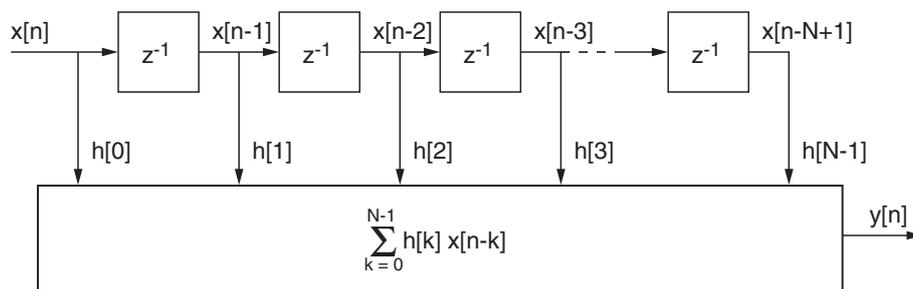


FIGURE 6.9.: Représentation du produit de convolution

Il est important de bien comprendre les opérations sous-jacentes à l'équation de convolution

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

On voit que l'on doit tout d'abord "retourner" le signal d'entrée $x[k]$ (ici, un saut unité) autour de l'ordonnée afin d'obtenir $x[-k]$ (figure 6.10). Puis, à chaque instant n on devra :

1. décaler $x[-k]$ en n pour obtenir $x[n - k]$;
2. effectuer sa multiplication avec $h[k]$ pour obtenir $h[k] \cdot x[n - k]$;
3. sommer la suite de valeurs ainsi obtenues. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/ni.html>

La figure 6.10 illustre la situation pour $n = 10$ et l'on voit que la somme des valeurs successives vaut :

$$\sum_{k=0}^{10} h[k] x[n - k] = 1 + 0.9 + 0.9^2 + \dots + 0.9^{10} = 6.86 = y[10]$$

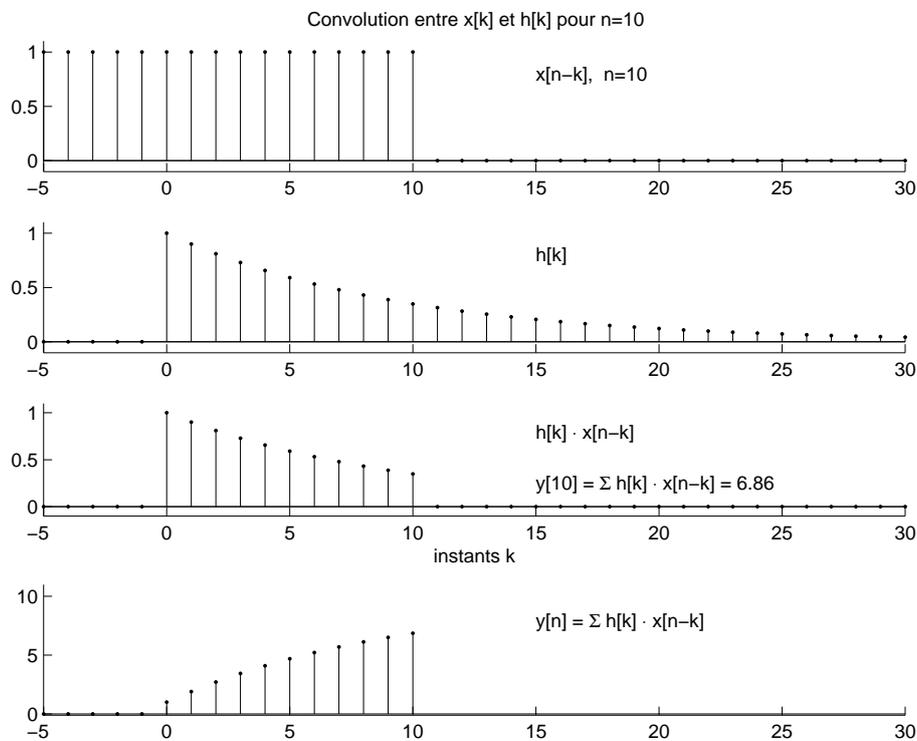


FIGURE 6.10.: Illustration du calcul d'un produit de convolution

6.3.2. Réalisation d'un produit convolution

Considérant la figure 6.9, on voit que pour calculer un produit de convolution il faut avoir à sa disposition les suites de valeurs $h[k]$ et $x[n - k]$. Cela nécessite donc deux espaces-mémoire de longueur N . Dans le premier (généralement une EPROM), on stockera les valeurs de la réponse impulsionnelle $h[k]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$ caractérisant le système que l'on souhaite réaliser. Dans le deuxième, qui sera constamment mis à jour (généralement une RAM), on gardera les N dernières valeurs du signal d'entrée $x[n]$ (figure 6.11).

6.3. Réponse impulsionnelle et produit de convolution

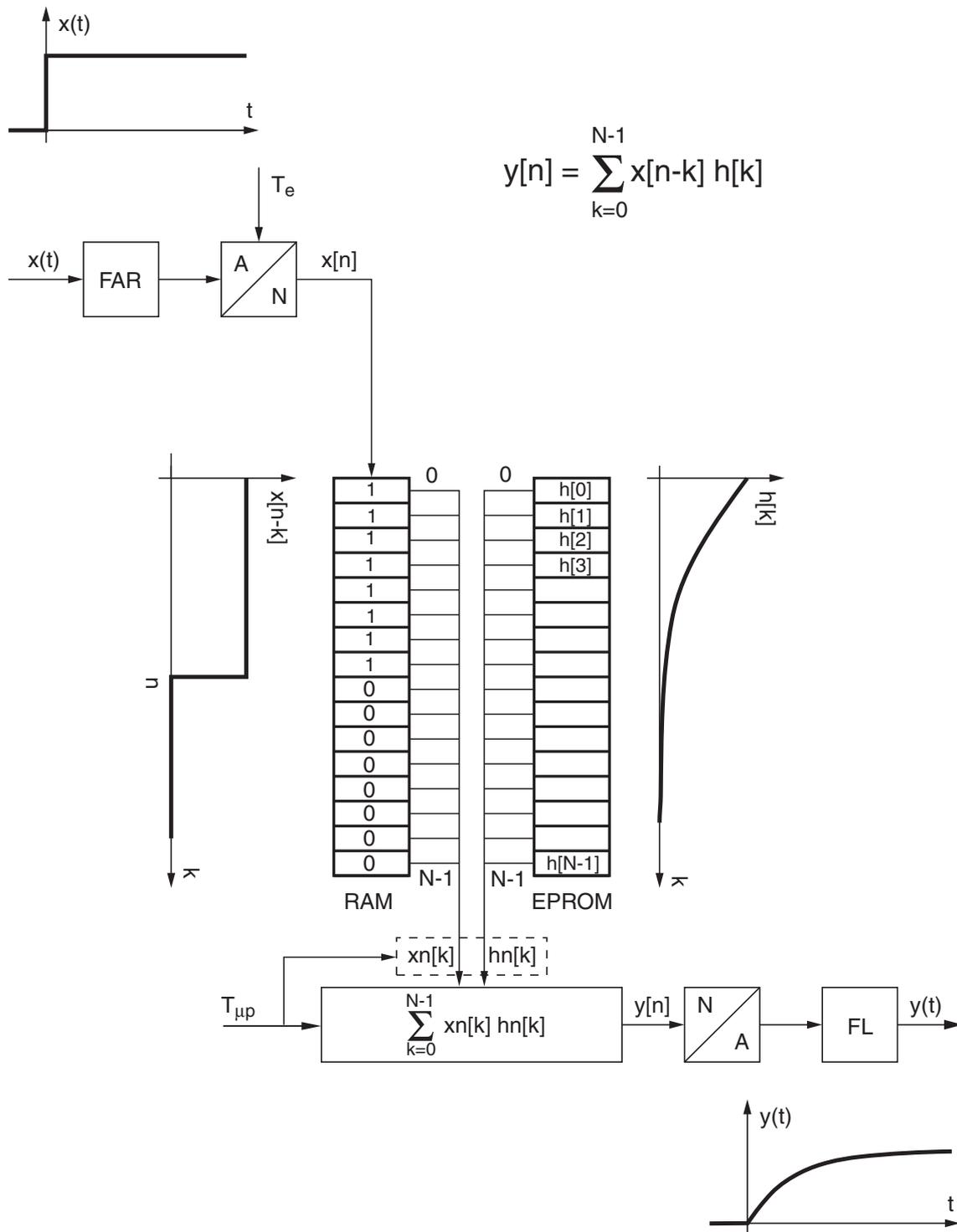


FIGURE 6.11.: Schéma technologique d'une convolution numérique

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Comme exemple illustratif, imaginons que l'on souhaite réaliser un équivalent numérique d'un filtre passe-bas analogique dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la sortie $y(t)$ sont décrites par :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

dont l'équivalent numérique s'écrit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n T_e h[k] x[n - k]$$

On notera que dans cette expression, la période d'échantillonnage T_e multiplie la réponse impulsionnelle $h[k]$ dont les unités sont l'inverse du temps. De manière à normaliser la réponse impulsionnelle numérique par rapport à T_e , on la définit comme suit :

$$h[n] \equiv T_e h(t = nT_e) \quad (6.26)$$

Ce qui dans notre cas particulier devient :

$$h[n] = T_e \frac{1}{\tau} e^{-nT_e/\tau} = \frac{T_e}{\tau} (e^{-T_e/\tau})^n$$

En posant :

$$R = e^{-T_e/\tau}$$

la réponse impulsionnelle du filtre numérique passe-bas d'ordre 1 s'écrit donc :

$$h[n] = \frac{T_e}{\tau} R^n \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (6.27)$$

En limitant la longueur de la réponse impulsionnelle aux N premières valeurs et admettant que le contenu de la RAM a été initialisé à zéro, la réponse à un signal quelconque se calcule alors comme suit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n - k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n - k]$$

Une traduction algorithmique du produit de convolution pourrait être la suivante :

```
{initialisation des variables}
tau = 1e-3
Te = 1e-4
R = exp(-Te/tau)
N = 100
```

```

{initialisation des tableaux}
for k =0:N-1
    xn(k) = 0
    hn(k) = (Te/tau)*R^k
end
{calcul et envoi du signal de sortie yn}
repeat
    x0 = AnalogInput
    {initialisation et calcul de la somme}
    yn = x0*hn(0)
    for k = 1:N-1
        do yn = yn + xn(k) * hn(k)
    end
    AnalogOutput (yn)
    {mise à jour du tableau xn(k)}
    for k = N-1:-1:1
        do xn(k) = xn(k-1)
    end
    xn(0) = x0
until stop

```

6.3.3. Une application : l'interpolation numérique

Une application intéressante du produit de convolution consiste en l'agrandissement (zoom) d'une suite de valeurs par interpolation numérique. Parmi le grand nombre d'interpolations possibles, on en présente trois : les interpolations constante, linéaire et parabolique. La première maintient la valeur considérée, la deuxième relie deux points successifs par un segment de droite et enfin la dernière relie ces deux points par des arcs de parabole. Un interpolateur d'ordre N remplace chaque valeur d'une suite $x[n]$ (sauf la dernière) par N nouvelles valeurs.

Du point de vue de la convolution, une fonction d'interpolation est un opérateur que l'on décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n]$. Son application à une suite $x[n]$ de valeurs numériques remplace chacune de celles-ci par, respectivement, une constante, deux segments de droite ou trois arcs de parabole (figure 6.12). Ces fonctions d'interpolation de longueur $2N$ doivent valoir 1 au centre et 0 aux extrémités. Elles sont décrites respectivement par les expressions suivantes :

$$h_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{si } N/2 < |n| \leq N \end{cases} \quad (6.28)$$

$$h_1[n] = \frac{N - |n|}{N} \quad \text{pour } |n| \leq N \quad (6.29)$$

$$h_2[n] = \begin{cases} \frac{2}{N^2} (n + N)^2 & \text{si } -N < n < -N/2 \\ 1 - \frac{2}{N^2} n^2 & \text{si } -N/2 \leq n \leq +N/2 \\ \frac{2}{N^2} (n - N)^2 & \text{si } +N/2 < n < +N \end{cases} \quad (6.30)$$

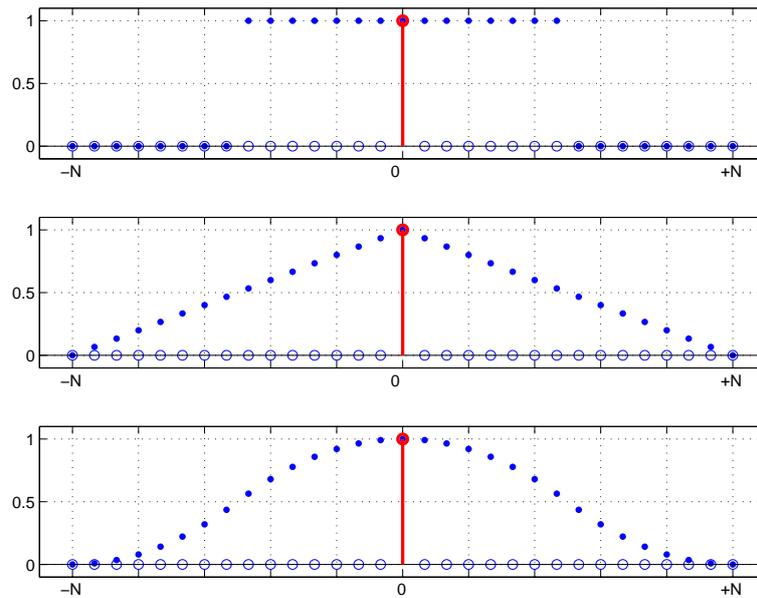


FIGURE 6.12.: Réponses impulsionnelles de trois interpolateurs

La figure 6.13 illustre l'effet des interpolateurs d'ordre $N = 15$ appliqués à trois impulsions d'amplitude 1, 4 et 2. On y voit très bien que chaque impulsion est remplacée par une fonction d'interpolation et que la somme de celles-ci conduit au résultat global représenté par les points interpolés. Il est important de noter que pour utiliser la convolution en tant qu'interpolateur, il faut au préalable insérer entre les valeurs à interpoler un nombre de zéros égal à $N - 1$. Ainsi, avant d'effectuer le produit de convolution pour obtenir la suite interpolée

$$y[n] = h[n] \otimes x_0[n] \quad (6.31)$$

on doit remplacer la suite $x[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{2}\}$ par une nouvelle suite valant

$$x_0[n] = \{\mathbf{0}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{4}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{2}\} \quad (6.32)$$

Puis, afin d'éliminer les effets de bords, on enlèvera du résultat de cette convolution les N valeurs extrêmes obtenues de part et d'autre de la suite originale $x_0[n]$.

La figure 6.14 montre les résultats des trois interpolations appliquées à une suite de valeurs oscillantes amorties. On notera que le choix d'une fonction d'interpolation n'est pas anodin car il peut conduire à une représentation erronée du signal analogique enregistré. La figure 6.15 illustre le résultat de ces trois mêmes interpolations appliquées à une image agrandie d'un facteur huit.

6.4. Systèmes décrits par des équations récursives

Dans la section précédente, nous avons analysé les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI). Ces systèmes étaient représentés par leur réponse impulsionnelle $h[n]$ et l'obtention de la réponse $y[n]$ à un signal d'entrée quelconque faisait

6.4. Systèmes décrits par des équations récursives

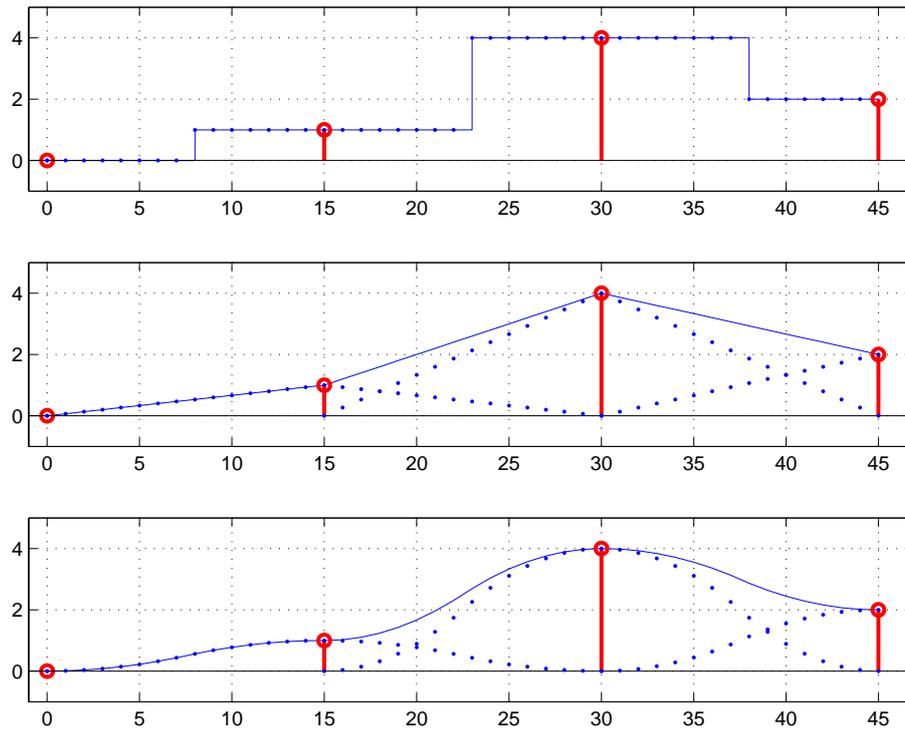


FIGURE 6.13.: Réponses individuelle et globale de trois interpolateurs d'ordre 15

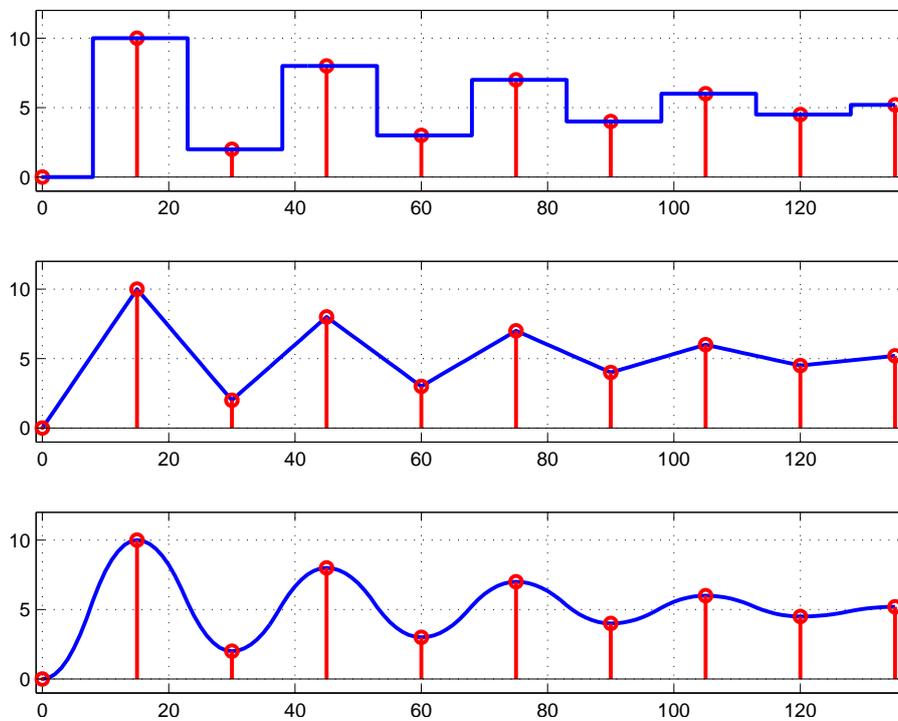


FIGURE 6.14.: Trois interpolations d'une même suite de valeurs

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

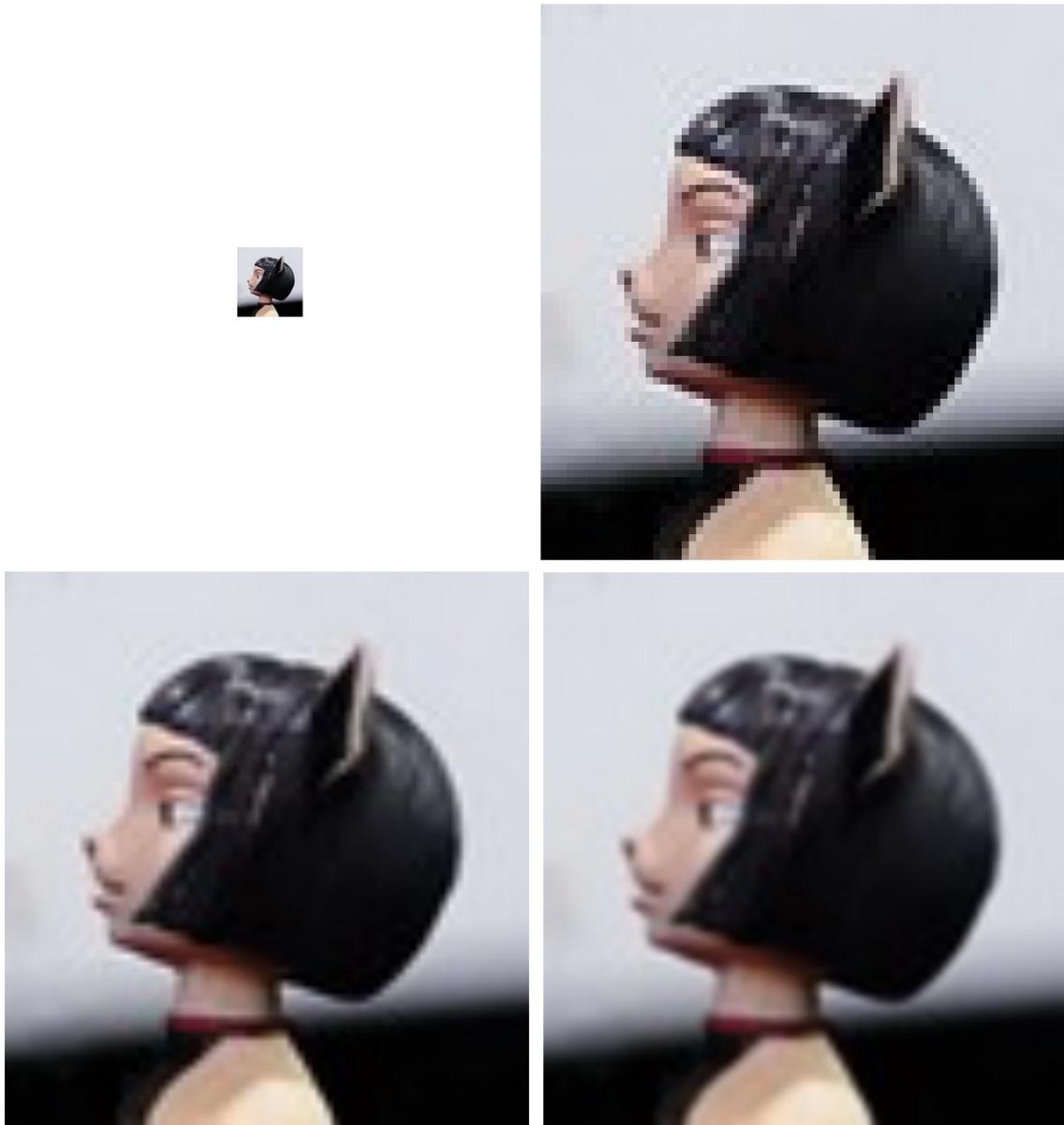


FIGURE 6.15.: Agrandissement d'une image par interpolation constante, linéaire ou parabolique

appel au produit de convolution. Dans le calcul de celui-ci n'intervient que le signal d'entrée $x[n]$ et $h[n]$ (équation non récursive). Cette manière de faire nécessite, pour chaque instant n , le calcul complet de $y[n]$ sans utiliser des résultats précédemment calculés :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n-k]$$

Dans les quelques exemples qui suivent, on montre qu'il est généralement assez facile de trouver une équation utilisant des résultats obtenus préalablement. Le système est alors décrit, de manière équivalente, par une équation récursive.

6.4.1. Quelques exemples

Accumulateur Un accumulateur causal est représenté par l'équation :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] \quad (6.33)$$

On voit immédiatement que ce résultat peut être récrit sous la forme :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^n x[k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] \end{aligned}$$

donc :

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (6.34)$$

Cette dernière équation n'est autre que la forme récursive de l'accumulateur.

Filtre passe-bas On a vu plus haut que la réponse d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pouvait être décrite par :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] \quad (6.35)$$

Ce résultat peut également s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] = \frac{T_e}{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} R^k x[n-k] \\ &= \frac{T_e}{\tau} \{ R^0 x[n] + R^1 x[n-1] + R^2 x[n-2] + \dots \} \\ &= \frac{T_e}{\tau} x[n] + R \frac{T_e}{\tau} \{ R^0 x[n-1] + R^1 x[n-2] + R^2 x[n-3] + \dots \} \end{aligned}$$

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Ce qui donne finalement la forme réursive suivante :

$$y[n] = \frac{T_e}{\tau} x[n] + R y[n - 1] \quad (6.36)$$

On voit ainsi que le calcul de la réponse $y[n]$, qui dans l'approche non réursive demande pour chaque instant n le calcul de N multiplications et additions, peut être remplacé par une équation réursive ne demandant qu'une multiplication et une addition.

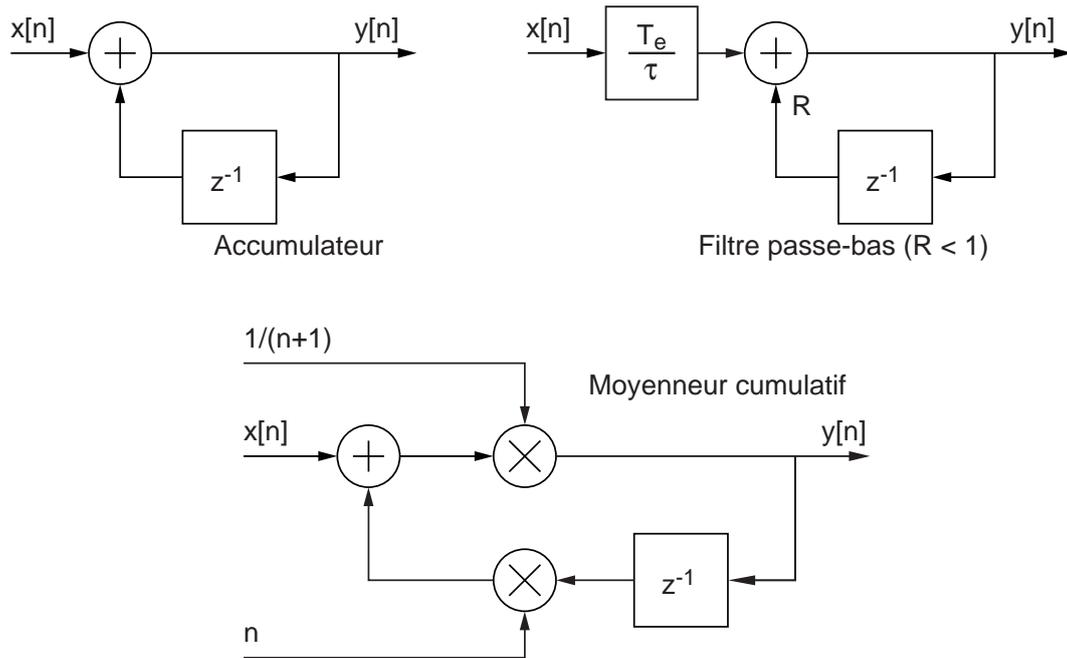


FIGURE 6.16.: Schémas fonctionnels : (a) d'un accumulateur, (b) d'un filtre passe-bas, (c) d'un moyenneur cumulatif

Moyenne cumulée Considérons le calcul d'une moyenne que l'on souhaite évaluer à l'apparition de chaque nouvel échantillon :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x[k] \quad (6.37)$$

En multipliant les 2 membres de l'équation par $n+1$, on obtient :

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$$

Ce qui peut également s'écrire sous la forme :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \left(x[n] + n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \right)$$

pour donner finalement

$$y[n] = \frac{1}{n+1} (x[n] + n y[n-1]) \quad (6.38)$$

Les schémas fonctionnels correspondant à chacun de ces 3 systèmes sont illustrés par la figure 6.16.

Conclusion Ces quelques exemples ont montré que bien des opérations linéaires peuvent être ramenées à des équations récursives et qu'alors le nombre d'opérations à effectuer est fortement réduit.

6.5. Exercices

SNB 1 Esquissez les signaux suivants

$$\begin{aligned} x_1[n] &= -\epsilon[n-2] & x_4[n] &= 0.9^n \epsilon[n] \\ x_2[n] &= +\epsilon[n+1] + \delta[n] & x_5[n] &= \sin(\pi n/6) \\ x_3[n] &= 2\epsilon[n+2] - \epsilon[3-n] & x_6[n] &= \sin(\pi n/8) \epsilon[n] \end{aligned}$$

SNB 2 Esquissez le signal $x[n] = \{\dots, 0, 0, -1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots\}$ puis faites de même avec les signaux suivants

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n-2] & y_4[n] &= x[n] \cdot \delta[n] \\ y_2[n] &= x[3-n] & y_5[n] &= x[n+1] \cdot \delta[n] \\ y_3[n] &= x[n+1] \cdot \epsilon[n] & y_6[n] &= x[3-n] \cdot \delta[n-2] \end{aligned}$$

SNB 3 Trouvez les expressions mathématiques décrivant les signaux de la figure SNB 3.

SNB 4 Considérant les fonctions oscillantes ci-dessous, donnez pour chacune d'entre-elles la pulsation normalisée Ω_0 , la période numérique N et le nombre de périodes analogiques par période numérique.

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos(n\pi/20) & x_4[n] &= \exp(jn\pi/4 - \pi/2) \\ x_2[n] &= \cos(n3\pi/8) & x_5[n] &= 3 \sin(5n + \pi/6) \\ x_3[n] &= \cos(n13\pi/8 - \pi/3) & x_6[n] &= \cos(n3\pi/10) - \sin(n\pi/10) + 3 \cos(n\pi/5) \end{aligned}$$

SNC 1 On considère un système temporellement invariant auquel on applique successivement les signaux d'entrée $x_1[n]$, $x_2[n]$ (figure SNC 1). A ces signaux distincts correspondent les suites $y_1[n]$, $y_2[n]$.

1. Quelle est la réponse impulsionnelle du système ?
2. Déterminez si le système est linéaire ou non.
3. Donnez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

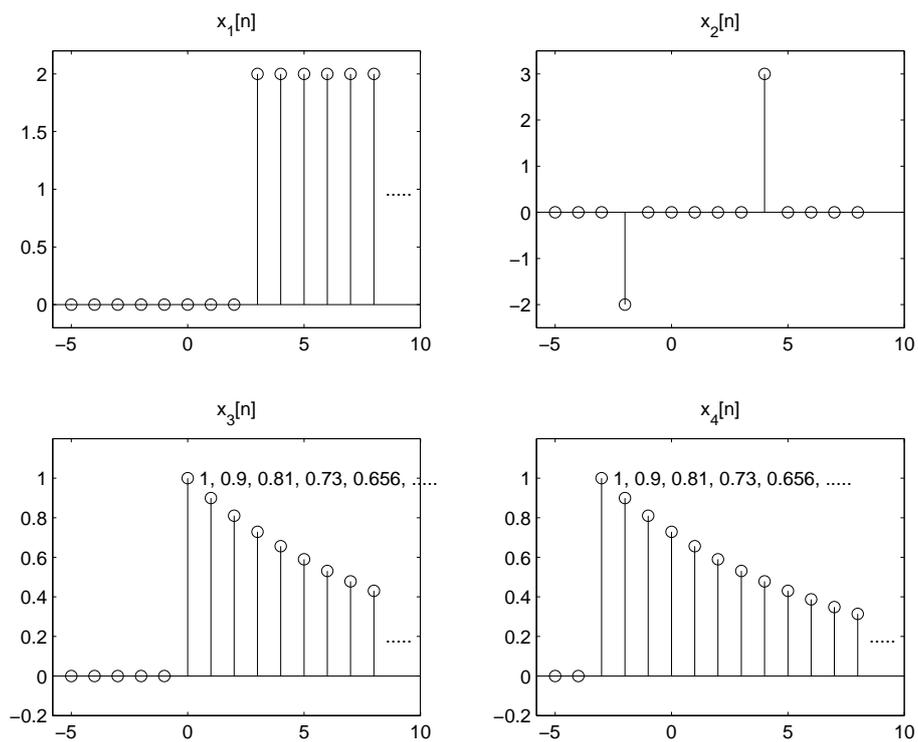


FIGURE 6.17.: Ex. SNB 3

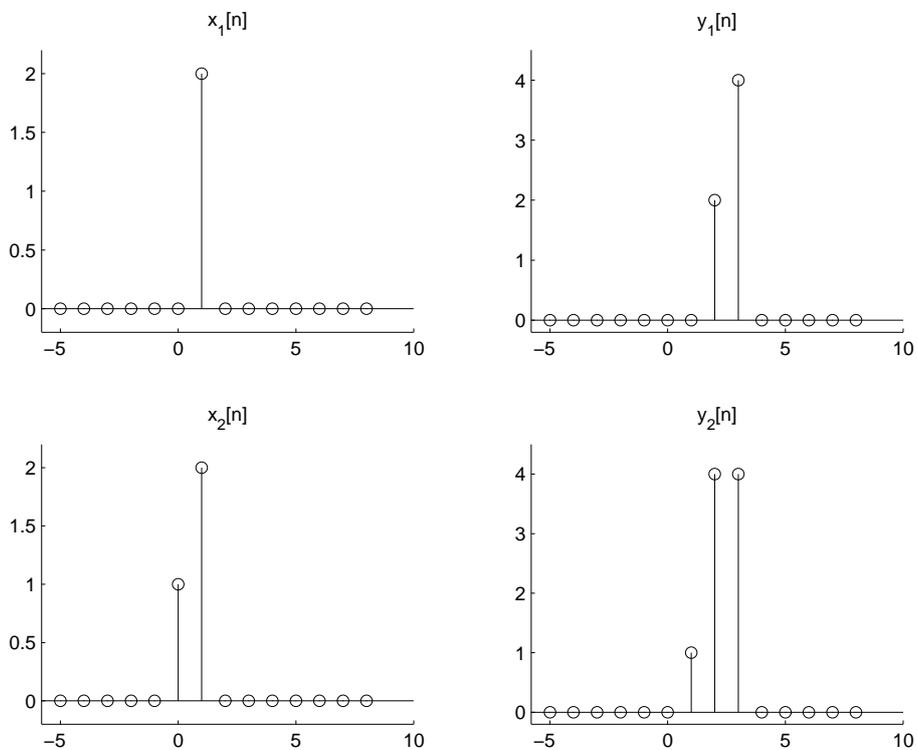


FIGURE 6.18.: Ex. SNC 1

SNC 2 On considère un système LTI causal décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = \{4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \dots\} \quad n \geq 0$$

et les signaux d'entrée suivants

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \delta[n - 1] & x_3[n] &= \epsilon[n] - \epsilon[n - 5] \\ x_2[n] &= +2\delta[n] - \delta[n - 1] & x_4[n] &= \epsilon[n + 5] \end{aligned}$$

Esquissez ces signaux $x_k[n]$ et les réponses respectives $y_k[n]$ après les avoir calculées avec le produit de convolution.

SNC 3 Étant donné la réponse impulsionnelle causale

$$h[n \geq 0] = \{0, 1, 1, 1, 1, -2, -2, 0, 0, \dots\}$$

d'un système LTI, dessinez cette réponse puis calculez et esquissez sa réponse à $x[n] = \epsilon[n]$. De quel filtre s'agit-il ?

SNC 4 Utilisez le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle d'un système causal et LTI décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n] = 0.8^n \epsilon[n]$.

SNC 5 On considère un système décrit par l'équation aux différences suivantes

$$y[n] = 2x[n - 1] + \frac{3}{4}y[n - 1] - \frac{1}{8}y[n - 2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel et calculez sa réponse impulsionnelle sachant que les CI sont nulles.

SNC 6 Trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système causal LTI qui a répondu avec le signal $y[n]$ au signal appliqué $x[n]$ (figure SNC 6).

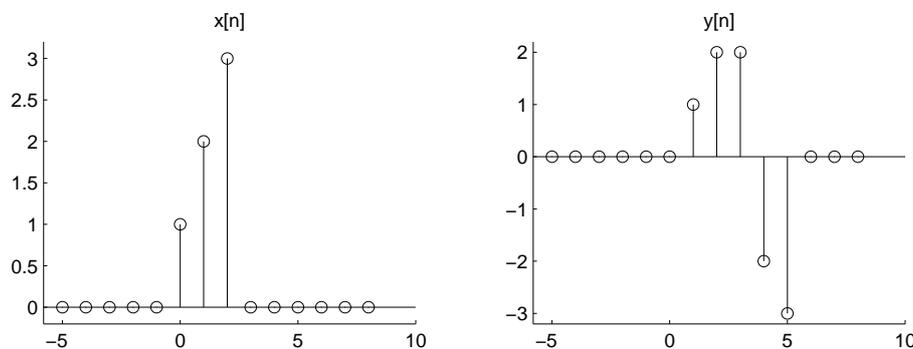


FIGURE 6.19.: Ex. SNC 6

Remarque : Ce calcul, qui porte le nom d'opération de déconvolution, se fait de manière récursive directement à partir de la définition du produit de convolution.

6. DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

SNC 7 On souhaite appliquer une interpolation en cosinus d'ordre 4 à la séquence numérique $x[n] = \{1, 6, 3\}$. Pour ce faire,

1. calculez littéralement la réponse impulsionnelle $h[n]$ en cosinus telle que $h[0] = 1$ et $h[\pm N] = 0$;
2. calculez les valeurs numériques de $h[n]$;
3. créez la suite $x_0[n]$ et calculez la suite interpolée $y[n]$.

Rép. :

$$h[n] = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{avec} \quad -N \leq n \leq +N$$

$h[n]$	0	0.1465	0.5	0.8535	1	0.8535	0.5	0.1465	0
$x_0[n]$	1	0	0	0	6	0	0	0	3
$h_1[n]$	1	0.8535	0.5	0.1465	0				
$h_6[n]$	0	0.8787	3	5.1213	6	5.1213	3	0.8787	0
$h_3[n]$					0	0.4394	1.5	2.5606	3
$y[n]$	1	1.7322	3.5	5.2678	6	5.5607	4.5	3.4393	3

7. Réponses des systèmes numériques

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un système numérique peut être décrit par une équation aux différences. De manière générale, c'est celle-ci qui est implantée dans un processeur afin de réaliser en temps réel la fonction souhaitée. Afin que les calculs se fassent dans un temps très court, on utilise de préférence un processeur spécialisé pour le traitement de signaux (Digital Signal Processor = DSP) qui, en un cycle d'horloge ($t_{clock} \simeq 10 \text{ ns}$) va chercher deux variables, effectue leur produit et ajoute le résultat dans un registre.

Cependant, avant d'implanter dans un DSP un système ou un filtre numérique sous la forme d'un algorithme, il est nécessaire d'analyser et comprendre le comportement de celui-ci. Pour ce faire, on doit pouvoir au préalable :

- décrire le système considéré par sa réponse impulsionnelle ou par une équation aux différences ;
- représenter ce système avec une fonction de transfert ;
- prévoir la stabilité du système numérique ;
- calculer les réponses temporelle et fréquentielle du système.

7.1. Réponse temporelle des systèmes linéaires

7.1.1. Résolution d'une équation récursive

À titre introductif, considérons l'équation linéaire suivante :

$$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.2y[n-2] = x[n] \equiv 0.8^n$$

dont on recherchera la solution pour $n \geq 0$ en tenant compte des deux conditions initiales : $y[-1] = 0$, $y[0] = 0$.

La démarche à suivre pour résoudre cette équation aux différences est la même que celle utilisée pour résoudre les équations différentielles à coefficients constants. C'est-à-dire qu'il faut :

1. rechercher la solution générale $y_h[n]$ de l'équation homogène ;
2. rechercher une solution particulière $y_p[n]$ de l'équation non-homogène ;
3. en déduire la solution générale $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$;
4. calculer les coefficients indéterminés en tenant compte des conditions initiales.

7.1.2. Solution de l'équation homogène

On sait que la solution générale d'une équation différentielle à coefficients constants est une somme d'exponentielles de la forme e^{pt} . Il en va de même pour une équation aux différences à coefficients constants ; mais dans ce cas, l'exponentielle numérique sera de la forme λ^n . On recherchera donc une solution générale de l'équation homogène en posant :

$$y_h[n] = C \lambda^n$$

où λ est une constante, complexe ou non, et C une constante réelle.

En portant cette solution dans l'équation homogène, on obtient :

$$C \lambda^n - 0.9 C \lambda^{n-1} + 0.2 C \lambda^{n-2} = 0$$

En mettant en évidence le terme commun $C \lambda^{n-2}$, on obtient une équation quadratique en λ qui est l'équation caractéristique de l'équation aux différences :

$$\lambda^2 - 0.9 \lambda + 0.2 = 0$$

dont les racines sont :

$$\lambda_1 = +0.4 \quad \lambda_2 = +0.5$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ &= C_1 0.4^n + C_2 0.5^n \end{aligned}$$

7.1.3. Solution particulière

La solution particulière de l'équation aux différences est du même type que la fonction du second membre de l'équation ; dans notre cas, on posera :

$$y_p[n] = C_3 \lambda_3^n \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = 0.8$$

En portant cette solution dans l'équation aux différences, il vient :

$$C_3 \lambda_3^n (1 - 0.9 \lambda_3^{-1} + 0.2 \lambda_3^{-2}) = \lambda_3^n$$

Après simplification par λ_3^n , on en tire le coefficient C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{1 - 0.9 \cdot 0.8^{-1} + 0.2 \cdot 0.8^{-2}} = \frac{16}{3}$$

La solution particulière vaut donc :

$$y_p[n] = \frac{16}{3} 0.8^n$$

7.1.4. Solution générale

La solution générale

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

de l'équation aux différences complète s'écrit donc :

$$y[n] = C_1 0.4^n + C_2 0.5^n + \frac{16}{3} 0.8^n$$

Les coefficients C_1 et C_2 se calculent en tenant compte des conditions initiales. Celles-ci nous permettent d'écrire deux équations algébriques :

$$\begin{aligned} y[-1] &= 0 \\ &= C_1 0.4^{-1} + C_2 0.5^{-1} + \frac{16}{3} 0.8^{-1} \\ &= 2.5 C_1 + 2.0 C_2 + \frac{20}{3} \\ y[0] &= 0 \\ &= C_1 0.4^0 + C_2 0.5^0 + \frac{16}{3} 0.8^0 \\ &= C_1 + C_2 + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

dont les solutions sont :

$$C_1 = +\frac{24}{3} \quad C_2 = -\frac{40}{3}$$

La solution générale de l'équation aux différences pour $n \geq 0$ est donc :

$$y[n] = \frac{1}{3} (+24 \cdot 0.4^n - 40 \cdot 0.5^n + 16 \cdot 0.8^n)$$

7.1.5. Généralisation

On peut généraliser ce que nous venons de voir en considérant l'équation d'ordre N :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \quad (7.1)$$

dont on cherchera la solution en tenant compte des N conditions initiales.

Solution de l'équation homogène

La solution d'une équation aux différences linéaire et à coefficients constants est du type :

$$y_h[n] = C \lambda^n \quad (7.2)$$

En portant cette solution dans l'équation aux différences, on obtient une équation caractéristique dont les racines déterminent la forme de la solution générale. Celle-ci dépend des trois cas suivants.

Racines réelles et distinctes

Chaque terme λ_i^n avec $i = 1, 2, \dots, M$ est une solution de l'équation aux différences homogène. La solution générale est une combinaison linéaire de tous ces termes :

$$y_h[n] = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_M \lambda_M^n \quad (7.3)$$

Les coefficients C_i sont des constantes fixées par les conditions initiales.

Racines complexes conjuguées

Soit $\lambda_{1,2} = a \pm jb$, deux racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, la solution $y_h[n]$ est une combinaison linéaire de chaque racine élevée à la puissance n :

$$y_h[n] = C_1 (a + jb)^n + C_2 (a - jb)^n$$

On peut également écrire les racines sous forme polaire :

$$a \pm jb = R e^{\pm j\Omega}$$

avec :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Omega = \text{atan} \left(\frac{b}{a} \right)$$

On a donc

$$(a \pm jb)^n = (R e^{\pm j\Omega})^n = R^n (\cos(n\Omega) \pm j \sin(n\Omega))$$

Comme les coefficients de l'équation aux différences sont réels, la solution l'est également. Cela signifie que les termes imaginaires se simplifieront et que l'on obtiendra finalement :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1 R^n \cos(n\Omega) + A_2 R^n \sin(n\Omega) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} R^n \cos \left(n\Omega + \text{atan} \left(\frac{-A_2}{A_1} \right) \right) \end{aligned}$$

Le résultat général est alors le suivant :

$$y_h[n] = A R^n \cos(n\Omega + \alpha) \quad (7.4)$$

Les conditions initiales permettront de calculer les valeurs de A_1 et A_2 ou celles de A et α .

Racines multiples

Si la racine est de multiplicité m telle que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, on pose :

$$y_h[n] = (C_1 + C_2 n + \dots + C_m n^{m-1}) \lambda_1^n \quad (7.5)$$

Ici également, les coefficients C_1 à C_m seront fixés par les conditions initiales.

Solution particulière

La solution particulière $y_p[n]$ a la même forme que le second membre de l'équation aux différences $x[n]$. Comme exemple, on peut rappeler les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} x[n] = A &\Rightarrow y_p[n] = C \\ x[n] = A \lambda^n &\Rightarrow y_p[n] = C \lambda^n \\ x[n] = A \cos(n\Omega + \alpha) &\Rightarrow y_p[n] = C \cos(n\Omega + \varphi) \end{aligned}$$

7.2. Stabilité des systèmes numériques

Nous venons de voir que la dynamique de la réponse d'un système dépend directement des racines de son équation caractéristique. Comme la réponse du système est décrite par des exponentielles λ^n , il suffit que le module de la racine λ soit inférieur à l'unité pour que cette réponse tende vers zéro au fur et à mesure que n augmente.

Comme on le verra plus loin, les racines de l'équation caractéristique ne sont autres que les pôles de la fonction de transfert représentant le système. On parlera donc indifféremment de pôles du système ou de racines de l'équation caractéristique.

Conclusion Un système numérique est stable si toutes les racines de son équation caractéristique sont à l'intérieur du cercle de rayon unité (figure 7.1), alors qu'un système analogique n'est stable que si ses pôles sont à partie réelle négative.

7.3. Instants caractéristiques

On connaît l'importance des paramètres dynamiques d'un système pour évaluer son comportement temporel. Dans le cas des systèmes analogiques, on sait que, si les pôles $p_{1,2}$ sont complexes conjugués à partie réelle négative, la solution homogène $y_h(t)$ est une fonction sinusoïdale amortie telle que :

$$y_h(t) = C \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right)$$

avec τ et T représentant la constante de temps et la période d'oscillation de l'évolution temporelle du signal. On montre aisément que ces deux temps caractéristiques valent respectivement :

$$\tau = \left| \frac{1}{\operatorname{Re}\{p_{1,2}\}} \right| \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}\{p_{1,2}\}|}$$

Dans le cas des systèmes numériques, il est également intéressant d'évaluer des instants caractéristiques K_c et K_p correspondant à la constante de temps τ et à la

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

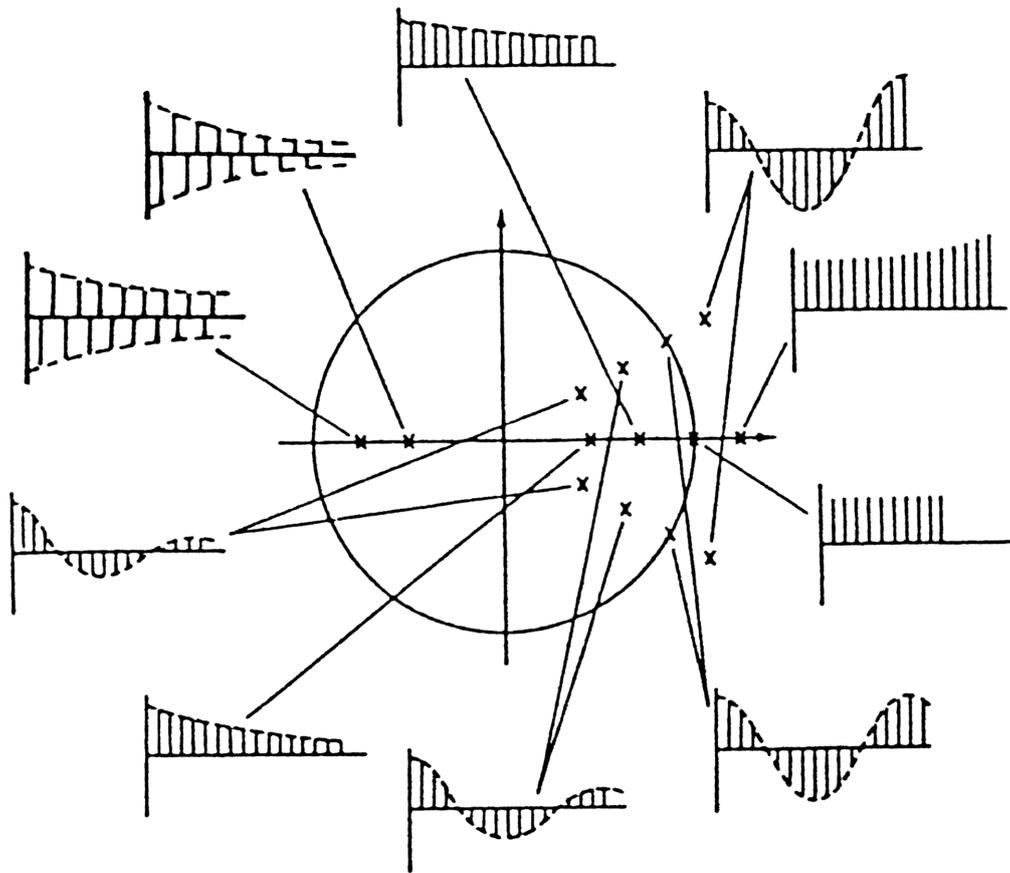


FIGURE 7.1.: Pôles et réponses impulsionnelles d'un système numérique

période d'oscillation T . Il est important de noter ici que K_c et K_p sont des valeurs sans unité, multiples de la période d'échantillonnage T_e du signal considéré.

Ces instants caractéristiques sont définis de la même manière que les paramètres continus τ et T :

1. L'instant K_c est celui pour lequel l'amplitude R^n a diminué ou augmenté d'une valeur égale à e . On a donc $R^{K_c} = e^{\pm 1}$. En prenant le logarithme naturel de cette égalité, on obtient :

$$K_c = \pm \frac{1}{\ln(R)} = \frac{1}{|\ln(R)|} \quad (7.6)$$

2. La période K_p d'une oscillation est telle que $K_p \Omega = 2\pi$. On en tire donc :

$$K_p = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (7.7)$$

Comme la durée du régime transitoire est égale à environ cinq fois la constante de temps, on a :

$$K_{tr} \simeq 5 K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \quad (7.8)$$

et le nombre d'oscillations visibles pendant cette durée vaudra :

$$N_{osc} = \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5 \Omega}{2\pi |\ln(R)|} \simeq \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \quad (7.9)$$

7.4. Transformation en z

La transformation en z fait pour les systèmes numériques ce que la transformation de Laplace fait pour les systèmes continus. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert $H(z)$ dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

7.4.1. Définition

La transformation en z s'applique à une suite de nombres $x[n]$ au travers de la définition suivante :

$$X(z) = Z \{x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (7.10)$$

On peut montrer que cette définition découle de la transformation de Laplace d'un signal analogique $x(t)$:

$$X(s) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

En effet, considérant que $x[n]$ est la représentation échantillonnée de $x(t)$, on peut remplacer l'intégrale par une somme. Il vient alors :

$$X(s) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} x(n T_e) e^{-sn T_e} T_e = T_e \sum_{n=0}^{+\infty} x(n T_e) (e^{s T_e})^{-n}$$

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

En définissant la variable z par

$$z \equiv e^{+sT_e} \quad (7.11)$$

et en attribuant à la période d'échantillonnage T_e la valeur unitaire, on obtient :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Ce résultat sert de définition à la transformation en z .

On notera que la définition de la variable z correspond à celle de l'opérateur de décalage avant égal à une période d'échantillonnage T_e et que l'opérateur de décalage arrière ou de retard est naturellement

$$z^{-1} \equiv e^{-sT_e} \quad (7.12)$$

7.4.2. Calcul de quelques transformées

Impulsion unité Elle est définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z , on obtient :

$$D(z) = Z \{ \delta[n] \} = \sum_{n=0}^0 1 z^{-n} = 1 \quad (7.13)$$

Saut unité Il est défini par :

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z , on obtient :

$$E(z) = Z \{ \epsilon[n] \} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$$

Cette somme est celle d'une suite géométrique $(z^{-1})^n$ qui est finie si $|z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1 \quad (7.14)$$

Exponentielle Celle-ci est définie par

$$y[n] = \alpha^n \epsilon[n]$$

Alors :

$$Y(z) = Z \{ \alpha^n \epsilon[n] \} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Cette équation représente la somme d'une suite géométrique de raison (αz^{-1}) qui est finie si $|\alpha z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \quad \text{si} \quad |\alpha z^{-1}| < 1 \quad (7.15)$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(n \Omega_0)$	$\frac{\sin \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \alpha \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \sin(n \Omega_0)$	$\frac{\alpha \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

TABLE 7.1.: Quelques transformées en z et de Laplace

7.4.3. Quelques propriétés de la transformation en z

La transformation en z possède des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace. Seules quelques unes sont rappelées ci-après sans démonstration.

1. linéarité :

$$Z \{ a x[n] + b y[n] \} = a X(z) + b Y(z) \quad (7.16)$$

2. décalage temporel :

$$Z \{ x[n + d] \} = z^{+d} X(z) \quad (7.17)$$

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

3. amortissement :

$$Z \{ \alpha^n x[n] \} = X \left(\frac{z}{\alpha} \right) \quad (7.18)$$

4. valeur initiale :

$$x[0] = X(z)|_{z \rightarrow \infty} \quad (7.19)$$

5. valeur finale (si le système est stable) :

$$x[\infty] = (z - 1) X(z)|_{z=1} \quad (7.20)$$

7.4.4. Équation aux différences et fonction de transfert

Nous avons vu qu'un système pouvait être décrit par une équation aux différences d'ordre N :

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (7.21)$$

On notera au passage que l'ordre M de la partie non-homogène de l'équation n'est pas nécessairement égal à celui de la partie homogène. Son schéma fonctionnel est représenté à la figure 7.2.

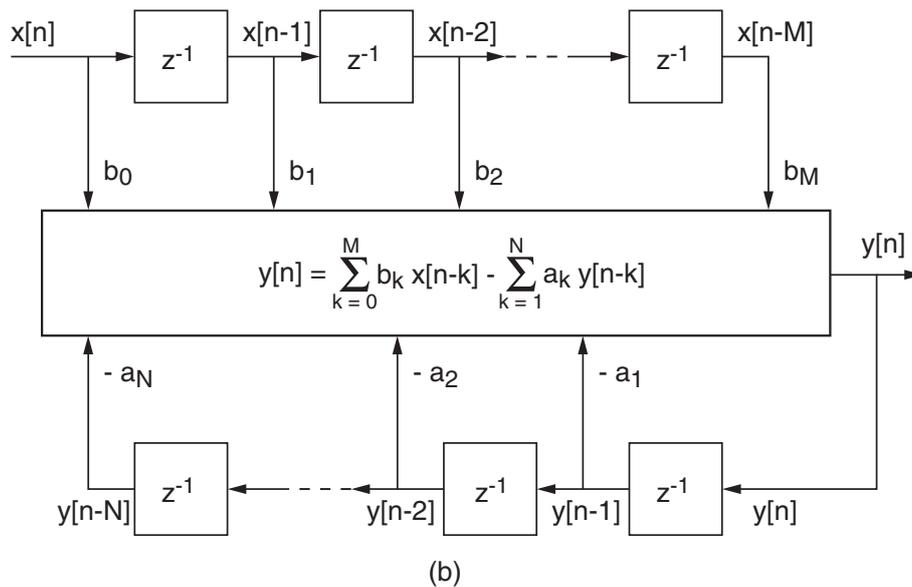


FIGURE 7.2.: Schéma fonctionnel d'une équation aux différences

Dans le cas particulier des systèmes d'ordre 2, on a donc

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (7.22)$$

Utilisant la propriété de linéarité, la transformation en z de l'équation aux différences se calcule aisément et donne :

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z)$$

En mettant en évidence $Y(z)$ et $X(z)$, il vient :

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z) (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

Comme le rapport des grandeurs de sortie $Y(z)$ et d'entrée $X(z)$ définit la fonction de transfert $H(z)$, on obtient :

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.23)$$

En multipliant numérateur et dénominateur par z^2 , cette fonction de transfert peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (7.24)$$

On remarque alors que le dénominateur de $H(z)$ n'est autre que l'équation caractéristique de l'équation aux différences représentant le système :

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (7.25)$$

La recherche des pôles de $H(z)$ est donc équivalente à la recherche des racines de l'équation caractéristique. On notera que la forme de $H(z)$ en z^{-1} est dite de *réalisation* (équ. 7.23) alors que celle en z est dite *analytique* (équ. 7.24) .

7.5. Réponse fréquentielle des systèmes LTI

7.5.1. Fonction de transfert et réponse fréquentielle

On a vu plus haut que la variable z correspond à l'opérateur d'avance

$$z = e^{sT_e} \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j\omega \quad (7.26)$$

Comme dans le cas d'une réponse fréquentielle on travaille en régime sinusoïdal permanent, la variable de Laplace vaut simplement $s = j\omega$ et la variable z devient alors

$$z = e^{j\omega T_e} = e^{j\Omega} \quad \text{avec} \quad \Omega \equiv \omega T_e = 2\pi f / f_e \quad (7.27)$$

La variable $\Omega = 2\pi f / f_e$ est la pulsation normalisée définie entre $+\pi$ et $-\pi$; elle représente les fréquences comprises entre $+f_e/2$ et $-f_e/2$. On voit donc que pour calculer une réponse fréquentielle, il suffit de remplacer la variable z par la valeur se situant sur le cercle de rayon unité et d'argument $\Omega = 2\pi f / f_e$.

Ainsi, de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (7.28)$$

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

on tire la réponse fréquentielle

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 e^{+j2\Omega} + b_1 e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1 e^{j\Omega} + a_2} \quad (7.29)$$

Dans le cas où la fonction de transfert est décrite avec l'opérateur de retard z^{-1}

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (7.30)$$

on a bien évidemment

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}} \quad (7.31)$$

Les réponses fréquentielles pour $f = 0$, $f = f_e/4$ et $f = f_e/2$ se calculent aisément car on a

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow z = +1 \\ f = \frac{f_e}{4} &\Leftrightarrow \Omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = +j \\ f = \frac{f_e}{2} &\Leftrightarrow \Omega = \pi \Leftrightarrow z = -1 \end{aligned}$$

Ce qui donne pour une cellule biquadratique

$$H(jf)|_{f=0} = H(z)|_{z=+1} = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \quad (7.32)$$

$$H(jf)|_{f=f_e/4} = H(z)|_{z=j} = \frac{b_0 - b_2 + j b_1}{1 - a_2 + j a_1} \quad (7.33)$$

$$H(jf)|_{f=f_e/2} = H(z)|_{z=-1} = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \quad (7.34)$$

7.5.2. Pôles, zéros et réponse fréquentielle

Toute fonction de transfert peut être décrite à l'aide des pôles et zéros qui sont les racines des dénominateur et numérateur :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (7.35)$$

Comme la variable z parcourt le cercle unité de 0 à $\pm\pi$ quand la fréquence varie de 0 à $\pm f_e/2$ (figure 7.3), on voit que la réponse fréquentielle s'affaiblit si la fréquence est proche des zéros car $(z - z_k)$ s'amenuise et qu'elle passe par un maximum lorsque la fréquence se situe aux environs des pôles car $(z - p_k)$ diminue.

La configuration pôles-zéros d'un filtre passe-bande ainsi que sa réponse fréquentielle sont représentées à la figure 7.3. Une bonne interprétation de la signification des pôles et zéros permet ainsi d'évaluer facilement une réponse fréquentielle.

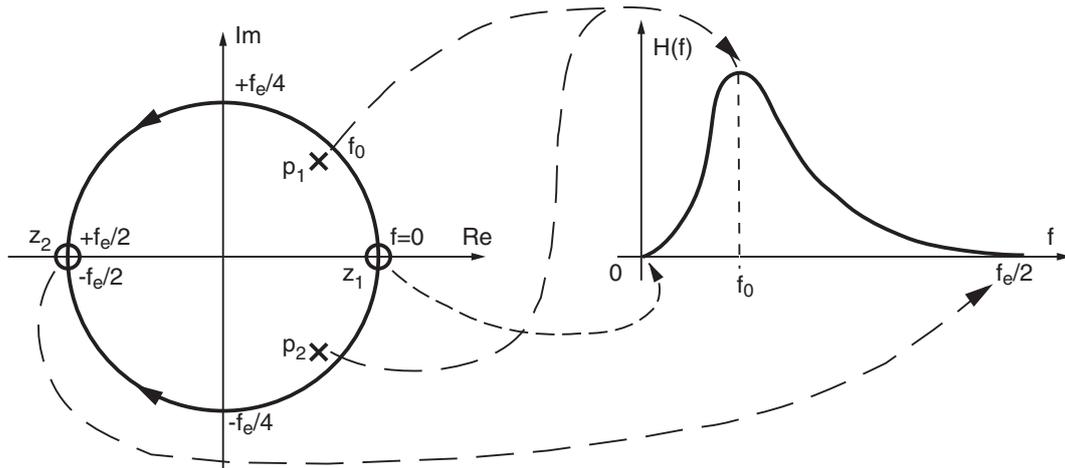


FIGURE 7.3.: Pôles, zéros et réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande

Évaluation d'une réponse fréquentielle

Considérons comme exemple un filtre passe-bande décrit par une fonction de transfert d'ordre 2

$$H(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

et caractérisé par les points suivants.

1. Il ne doit pas laisser passer la fréquence nulle qui se situe en $z = +1$ dans le plan complexe ; on doit donc avoir un zéro en cet endroit, d'où

$$z_1 = +1$$

2. Il doit bloquer les signaux de fréquence $f_e/2$ qui se situe en $z = -1$; on a donc

$$z_2 = -1$$

3. Il doit laisser passer la fréquence centrale f_0 qui correspond à deux pôles situés en

$$p_{1,2} = R e^{\pm j\Omega_0} \quad (7.36)$$

avec la pulsation normalisée $\Omega_0 = 2\pi \frac{f_0}{f_e}$ et $R < 1$ pour que le filtre soit stable.

La fonction de transfert sera donc décrite par

$$\begin{aligned} H(z) &= A \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - R e^{+j\Omega_0})(z - R e^{-j\Omega_0})} \\ &= A \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2R \cos \Omega_0 z + R^2} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, par

$$H(z) = A \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2R \cos \Omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}} \quad (7.37)$$

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

La réponse fréquentielle vaut donc

$$H(j\Omega) = A \frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 - 2R \cos \Omega_0 e^{-j\Omega} + R^2 e^{-j2\Omega}} \quad (7.38)$$

Comme application numérique, considérons le cas particulier où

$$f_0 = f_e/8 \Leftrightarrow \Omega_0 = \pi/4, \quad R = 0.9, \quad A = 1 - R = 0.1$$

Pour un filtre passe-bande, on doit bien évidemment obtenir

$$H(f = 0) = 0, \quad H(f = f_e/2) = 0$$

De plus, avec $\Omega_0 = \pi/4$ et $2\Omega_0 = \pi/2$, il vient

$$\begin{aligned} H(j\Omega_0) &= A \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 - 2R \cos(\pi/4) e^{-j\pi/4} + R^2 e^{-j\pi/2}} \\ &= A \frac{1 + j}{1 - \sqrt{2}R \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - jR^2} \\ &= A \frac{1 + j}{1 - R(1 - j) - jR^2} = A \frac{1 + j}{1 - R + jR - jR^2} \end{aligned}$$

Comme $R = 0.9$ et $A = 1 - R$, on obtien finalement

$$H(jf_0) = (1 - R) \frac{1 + j}{(1 - R)(1 + jR)} = \frac{1 + j}{1 + j0.9} = 1.05 \angle + 0.053 [rad]$$

7.5.3. TFD et réponse fréquentielle

Sachant que les transformations de Fourier directe et inverse d'une suite de valeurs numériques sont définies par :

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-jn\Omega) \quad (7.39)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (7.40)$$

il est possible de calculer la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ en transformant de Fourier soit la réponse impulsionnelle $h[n]$, soit l'équation aux différences. Comme illustration, appliquons ces deux approches à un système d'ordre 1.

Système décrit par une réponse impulsionnelle

En transformant de Fourier la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système numérique d'ordre 1,

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad 0 < R < 1$$

on obtient la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ suivante

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A R^n e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A (R e^{-j\Omega})^n \end{aligned}$$

L'observation de ce résultat nous montre que l'on a affaire à une suite géométrique. Se souvenant que la somme d'une suite géométrique infinie de raison r vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1 \quad (7.41)$$

on peut calculer aisément $H(j\Omega)$:

$$H(j\Omega) = A \frac{1}{1 - R e^{-j\Omega}} \quad \text{si } |R| < 1 \quad (7.42)$$

Système décrit par une équation aux différences

On a vu qu'un système numérique d'ordre 1 peut également être décrit par une équation réursive :

$$y[n] = A x[n] + R y[n-1]$$

Les propriétés de linéarité et de décalage de la transformation de Fourier permettent d'écrire immédiatement

$$Y(j\Omega) = A X(j\Omega) + R e^{-j\Omega} Y(j\Omega)$$

En regroupant les termes communs, puis en effectuant leur rapport, on obtient la fonction de transfert du système ou sa réponse fréquentielle :

$$H(j\Omega) \equiv \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{A}{1 - R e^{-j\Omega}}$$

Comme on pouvait s'y attendre, les deux expressions de la réponse fréquentielle sont identiques ; elles ne dépendent pas de la méthode de calcul utilisée.

Relation avec la transformation en z

Les résultats que nous venons de calculer peuvent également s'obtenir directement à partir des transformées en z des fonctions et signaux considérés en remplaçant l'opérateur d'avance z par son équivalent fréquentiel $e^{j\Omega}$. Ainsi, dans le cas de la réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad \leftrightarrow \quad H(z) = A \frac{z}{z - R}$$

on obtient

$$H(j\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = A \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - R} = A \frac{1}{1 - R e^{-j\Omega}}$$

7.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

Afin d'illustrer le calcul et le traçage de quelques réponses fréquentielles, considérons quelques exemples de systèmes numériques décrits soit par leur réponse impulsionnelle, soit par leur équation récursive.

7.6.1. Moyenneur non causal

Un moyenneur non causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = \frac{1}{5} \left(x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2] \right) \quad (7.43)$$

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si } -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.44)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 7.4.

Utilisant la transformation en z , on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$H(z) = \frac{1}{5} (z^{-2} + z^{-1} + z^0 + z^1 + z^2)$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5} (e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega} + e^{-j0} + e^{+j\Omega} + e^{+j2\Omega})$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5} \left(1 + 2 \cos(\Omega) + 2 \cos(2\Omega) \right) \quad (7.45)$$

On constate que la réponse fréquentielle ainsi obtenue est réelle; ceci n'est pas surprenant si on se souvient que la réponse impulsionnelle $h[n]$ considérée est paire. Le traçage de la réponse fréquentielle de ce moyenneur (figure 7.5) montre qu'il agit comme un filtre passe-bas et qu'il annule même la sortie pour certaines pulsations.

7.6.2. Moyenneur causal

Un moyenneur causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y[n] = \frac{1}{5} \left(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] \right) \quad (7.46)$$

7.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

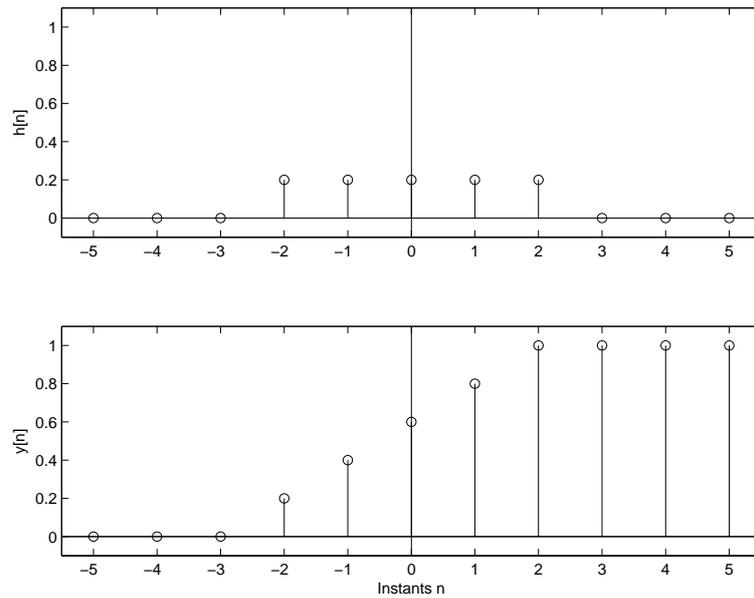


FIGURE 7.4.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un moyeneur non causal d'ordre 5

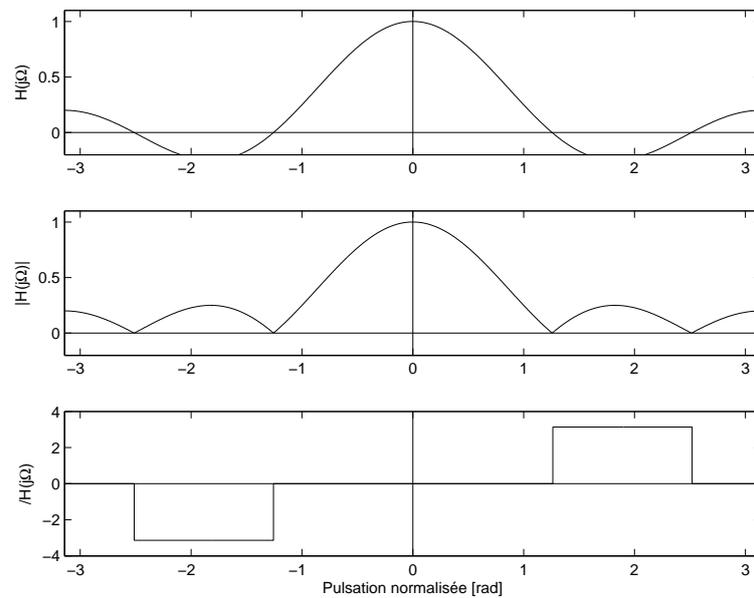


FIGURE 7.5.: Réponse fréquentielle d'un moyeneur non causal d'ordre 5

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.47)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 7.4 et on constate que, par rapport au moyennneur non causal, ces réponses temporelles sont simplement retardées de deux échantillons.

Utilisant la transformation en z , on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{5} (z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}) \\ &= \frac{z^{-2}}{5} (z^2 + z^1 + z^0 + z^{-1} + z^{-2}) \end{aligned}$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5} (e^{+j2\Omega} + e^{+j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega})$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5} \left(1 + 2 \cos(\Omega) + 2 \cos(2\Omega) \right) \quad (7.48)$$

On constate ainsi que, à un phaseur près, la réponse fréquentielle obtenue est la même que précédemment ; ce qui n'est pas surprenant puisque le moyennneur causal n'est qu'une version translatée du moyennneur non causal. Les modules des deux réponses fréquentielles sont donc les mêmes ; seules les phases diffèrent (figure 7.7). On notera que la phase ainsi obtenue est linéaire par rapport à la fréquence ; ce qui n'est autre que l'effet de la translation temporelle.

7.6.3. Filtre passe-bas d'ordre 1

On a vu plus haut qu'un filtre passe-bas numérique d'ordre 1 était décrite par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \varepsilon[n] \quad R < 1$$

ou par sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{A}{1 - R z^{-1}}$$

On en a déduit que sa réponse fréquentielle vaut :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R e^{-j\Omega}} \quad (7.49)$$

7.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

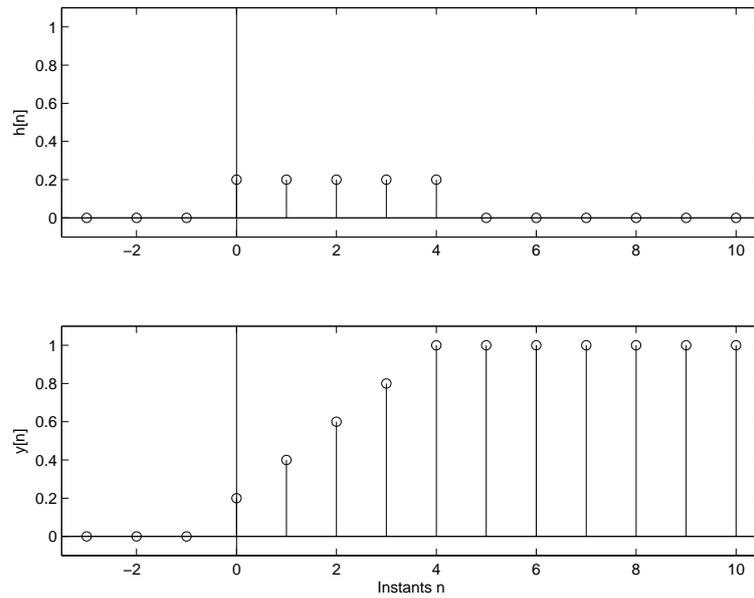


FIGURE 7.6.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un moyeneur causal d'ordre 5

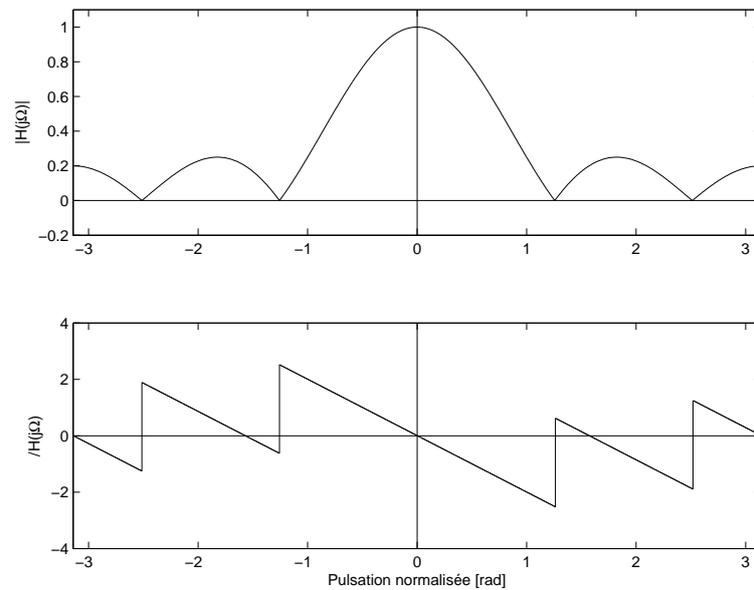


FIGURE 7.7.: Réponse fréquentielle d'un moyeneur causal d'ordre 5

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

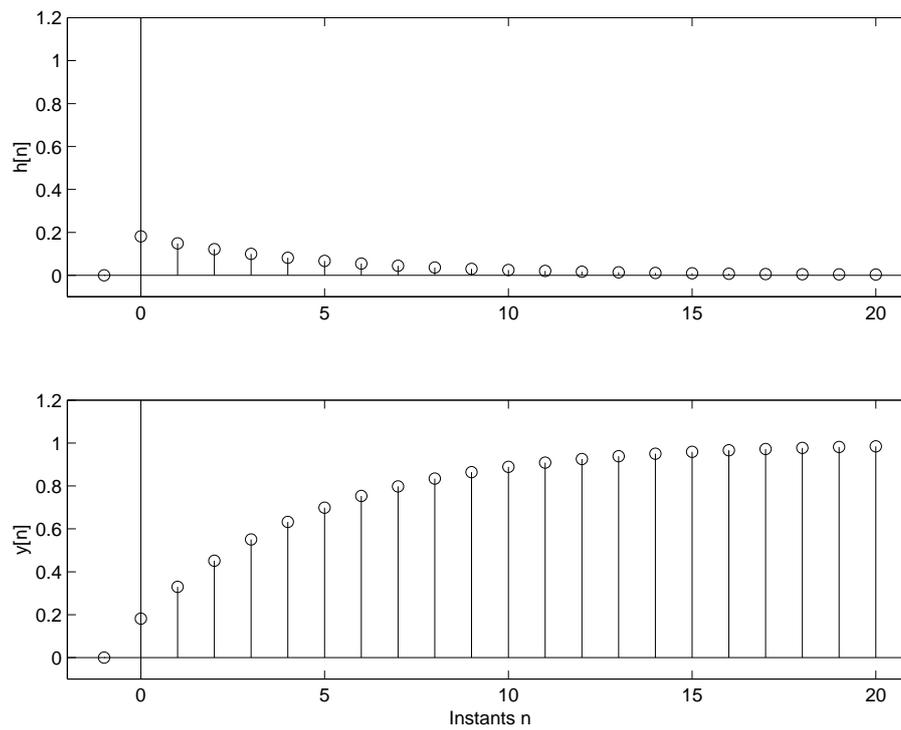


FIGURE 7.8.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

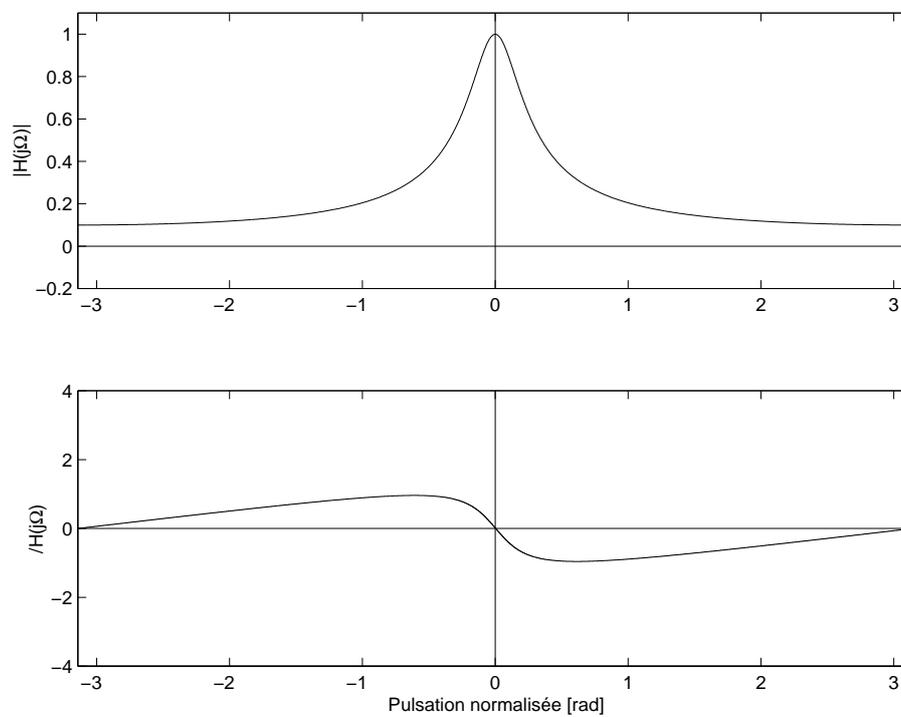


FIGURE 7.9.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

7.6. Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = 1 - R \quad (7.50)$$

Cette fonction à valeur complexe peut encore être décrite par :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R \cos(\Omega) + jR \sin(\Omega)} \quad (7.51)$$

Ce qui permet de calculer le module et la phase de la réponse fréquentielle :

$$|H(j\Omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1 - R \cos(\Omega))^2 + (R \sin(\Omega))^2}} \quad (7.52)$$

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan\left(\frac{R \sin(\Omega)}{1 - R \cos(\Omega)}\right) \quad (7.53)$$

Les réponses temporelles et fréquentielles sont présentées dans les figures 7.8 et 7.9.

7.6.4. Filtre passe-bas d'ordre 2

Prenons, comme nouvel exemple, un filtre passe-bas numérique d'ordre deux avec résonance décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A R^n \sin(n \Omega_0) \varepsilon[n] \quad R < 1 \quad (7.54)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont représentées dans la figure 7.10.

La transformée en z de $h[n]$ (voir tableau 7.1) donne la fonction de transfert

$$H(z) = A \frac{R \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2R \cos \Omega_0 z + R^2} = A \frac{R \sin \Omega_0 z^{-1}}{1 - 2R \cos \Omega_0 z^{-1} + R^2 z^{-2}}$$

dont on tire la réponses fréquentielle

$$H(j\Omega) = A \frac{R \sin(\Omega_0) e^{-j\Omega}}{1 - 2R \cos(\Omega_0) e^{-j\Omega} + R^2 e^{-j2\Omega}} \quad (7.55)$$

qui pour $\Omega = 0$ donne un gain

$$H(j0) = A \frac{R \sin(\Omega_0)}{1 - 2R \cos(\Omega_0) + R^2}$$

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = \frac{1 - 2R \cos(\Omega_0) + R^2}{R \sin(\Omega_0)} \quad (7.56)$$

Il est également possible de retrouver cette réponse fréquentielle à partir de la donnée des pôles du filtre. Cette approche, très simple, est laissée comme exercice.

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

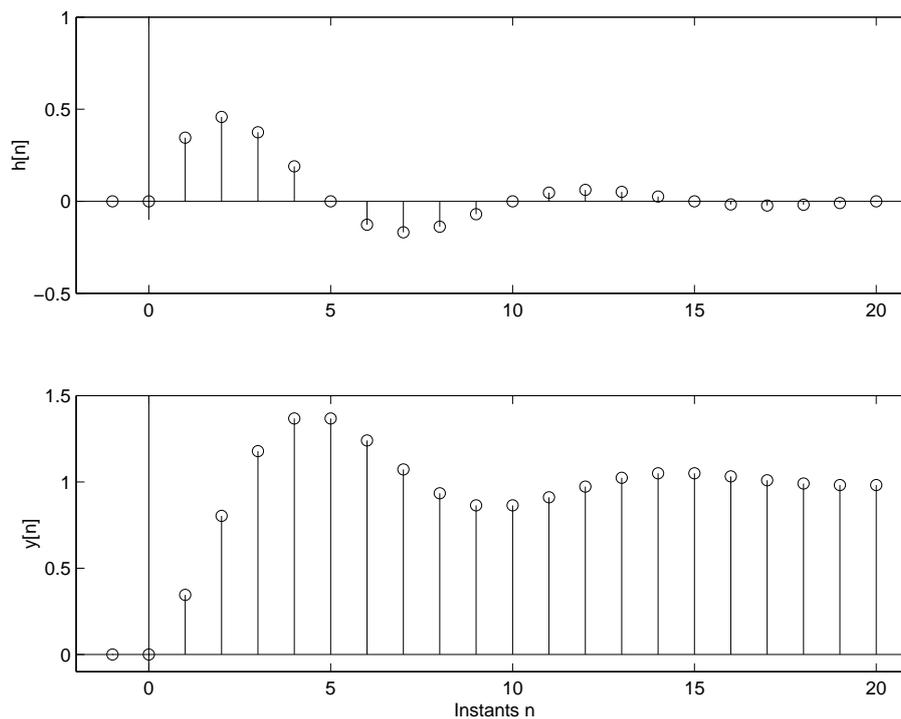


FIGURE 7.10.: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

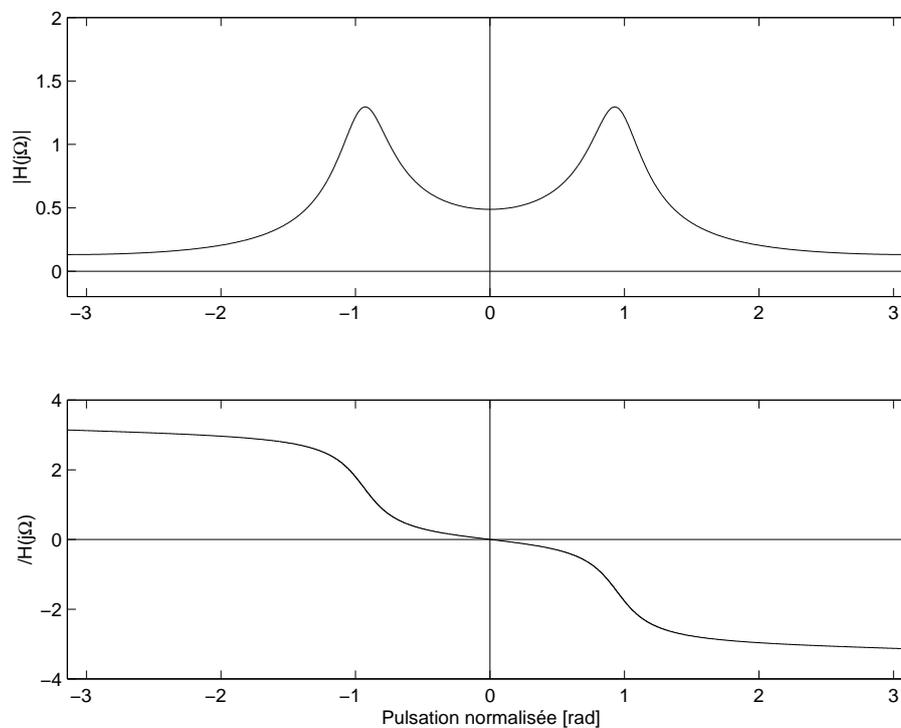


FIGURE 7.11.: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

7.7. Analyse et réalisation d'un filtre

Dans cette section, on souhaite illustrer les différentes étapes à parcourir pour analyser et réaliser un filtre numérique. Pour cela, considérons un filtre décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0.21 \frac{z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

et étudions ses réponses temporelle et fréquentielle.

7.7.1. Calcul de la réponse temporelle du filtre

Nous avons vu que le comportement dynamique d'un filtre numérique est déterminé par les instants caractéristiques K_c et K_p et que leurs valeurs se calculent à partir des pôles de la fonction de transfert $H(z)$.

Pôles et réponse temporelle

En multipliant numérateur et dénominateur de $H(z)$ par z^2 , on obtient la forme canonique nécessaire pour l'analyse :

$$H(z) = 0.21 \frac{z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

On calcule aisément les pôles de cette fonction de transfert qui valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(1.6 \pm \sqrt{1.6^2 - 4 \cdot 0.81} \right) \\ &= 0.8 \pm j 0.412 \\ &= 0.9 e^{\pm j 0.476} \end{aligned}$$

Comme ces pôles sont complexes et de module inférieur à 1, on en déduit que la réponse transitoire, c'est-à-dire la solution homogène de l'équation aux différences, comportera une oscillation amortie du type :

$$y_h[n] = C R^n \cos(n\Omega + \alpha)$$

ce qui, en tenant compte des valeurs numériques, donne :

$$y_h[n] = C 0.9^n \cos(0.476 n + \alpha)$$

Instants caractéristiques

La réponse étant oscillante, il faut rechercher la constante de temps K_c et la période d'oscillation K_p :

$$K_c = \frac{1}{|\ln(0.9)|} = 9.5 \quad K_p = \frac{2\pi}{0.476} = 13.2$$

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

On aura donc une durée du régime transitoire valant

$$K_{tr} \simeq 5 K_c = 47.5 \quad \text{instants}$$

et un nombre d'oscillations visibles d'environ

$$N_{osc} \simeq \frac{K_{tr}}{K_p} \simeq 3.6 \quad \text{oscillations}$$

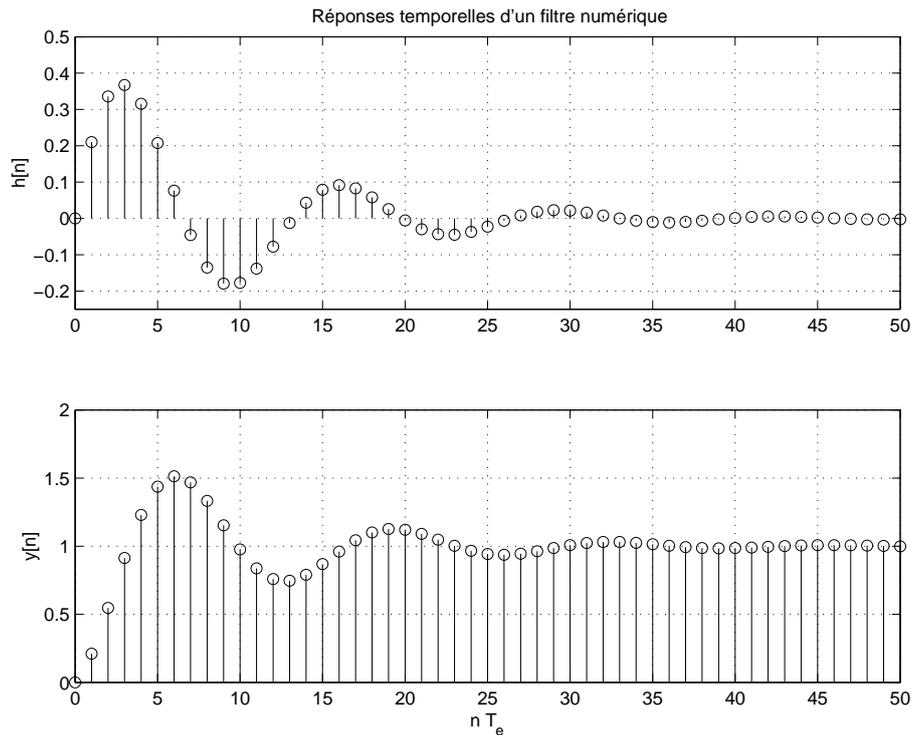


FIGURE 7.12.: Réponses impulsionnelle et indicielle du filtre

Évaluation de la réponse indicielle

À un saut unité dont l'image est

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

correspond la réponse indicielle suivante

$$Y(z) = X(z) H(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

Dans cette réponse, on retrouve naturellement les deux pôles ($p_{1,2} = 0.9 e^{\pm j 0.476}$) dus au filtre, plus un pôle ($p_3 = +1$) dû au saut unité appliqué à l'entrée. L'évolution

temporelle sera donc celle décrite précédemment, à laquelle on doit ajouter un terme constant A correspondant au pôle p_3 :

$$y[n] = A + C 0.9^n \cos(0.476 n + \alpha)$$

Ces informations peuvent être complétées par les valeurs initiale et finale que l'on calcule en utilisant le théorème des valeurs limites :

$$y[0] = Y(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

$$y[\infty] = (z - 1) Y(z)|_{z=1} = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = 1$$

La figure 7.12 illustre les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre. On remarquera que toutes les valeurs calculées ci-dessus sont confirmées par ces graphes.

7.7.2. Calcul de la réponse fréquentielle

Partant de la fonction de transfert du filtre

$$H(z) = \frac{0.21 z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}} = \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

on obtient l'expression de la réponse fréquentielle en remplaçant la variable z par le phaseur $e^{+j\Omega}$; il vient alors :

$$H(j\Omega) = \frac{0.21 e^{-j\Omega}}{1 - 1.6 e^{-j\Omega} + 0.81 e^{-j2\Omega}} = \frac{0.21 e^{+j\Omega}}{e^{+j2\Omega} - 1.6 e^{+j\Omega} + 0.81}$$

Quelques valeurs particulières

On a vu plus haut que

$$\begin{aligned} H(jf)|_{f=0} &= H(z)|_{z=+1} \\ H(jf)|_{f=f_e/4} &= H(z)|_{z=+j} \\ H(jf)|_{f=f_e/2} &= H(z)|_{z=-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne dans notre cas

$$H(j0) = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = +1 = 1 \angle 0$$

$$H(jf_e/4) = \frac{+j 0.21}{-1 + 0.81 - j 1.6} = -0.129 + j 0.015 = 0.130 \angle - 3.02$$

$$H(jf_e/2) = \frac{-0.21}{1 + 1.6 + 0.81} = -0.06 = 0.06 \angle - \pi$$

Traçage de la réponse fréquentielle

Le calcul et le traçage de cette réponse fréquentielle se fait avantageusement avec l'aide de Matlab. Dans ce cas, il faut décrire la fonction de transfert avec l'opérateur d'avance z

$$H(z) = \frac{0.21 z}{z^2 - 1.6 z + 0.81}$$

Le calcul et traçage se fait ensuite avec les commandes suivantes :

```
% donnees:
num = [0, 0.21, 0];
den = [1, -1.6, 0.81];
% reponse frequenteille
fe = 1; Npoints = 500;
[Hjf, ff] = freqz(num,den,Npoints,fe);
% tracage
figure;
subplot(2,1,1);
plot(ff, 20*log10(abs(Hjf))); grid on;
title('Réponse fréquentielle d'un filtre numérique');
ylabel('|H(jf)|');
axis([0,0.5,-30,+10]);
subplot(2,1,2);
plot(ff,angle(Hjf)*180/pi); grid on;
ylabel('/H(jf)');
xlabel('f / f_e');
```

La figure 7.13 présente le module et la phase de la réponse fréquentielle du filtre. On y retrouve bien les trois valeurs particulières

$$H(0) = 1 \angle 0$$

$$H(jf_e/4) = 0.130 \angle -3.02 = -17.7 \text{ dB} \angle -3.02$$

$$H(f_e/2) = 0.06 \angle -\pi = -24 \text{ dB} \angle -\pi$$

7.7.3. Comment réaliser ce filtre ?

Une fois le comportement du filtre analysé et vérifié, il reste à le réaliser. Pour cela, on implantera l'équation aux différences correspondant au filtre désiré dans un processeur numérique. Puis on devra bien entendu le relier au monde analogique à l'aide des convertisseurs AN et NA et des filtres d'antirepliement (FAR) et de lissage (FL) (figure 7.14).

L'équation aux différences du filtre est déduite directement de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.21 z^{-1}}{1 - 1.6 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

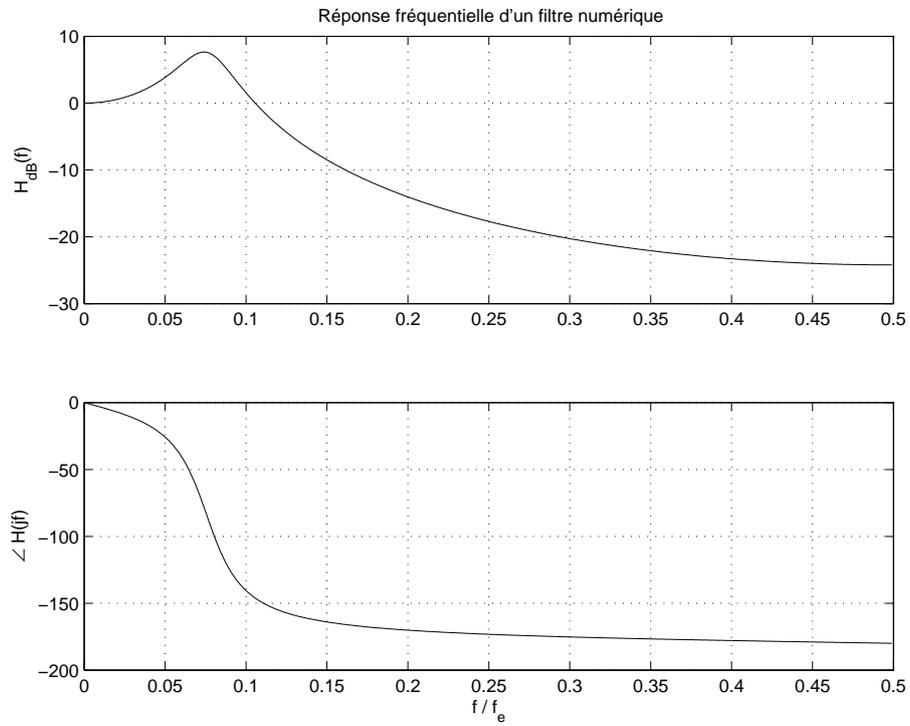


FIGURE 7.13.: Réponse fréquentielle du filtre

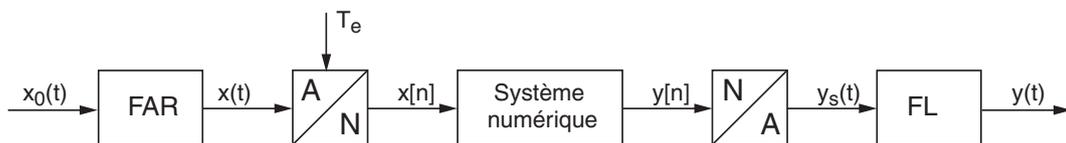


FIGURE 7.14.: Schéma bloc d'un filtre numérique

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

En effet, les produits croisés de cette équation donnent :

$$Y(z) - 1.6 z^{-1} Y(z) + 0.81 z^{-2} Y(z) = 0.21 z^{-1} X(z)$$

Ce qui, par transformation inverse, correspond à l'équation

$$y[n] - 1.6 y[n - 1] + 0.81 y[n - 2] = 0.21 x[n - 1]$$

Algorithmiquement, cette équation s'écrit plutôt sous la forme suivante

$$y[n] = 0.21 x[n - 1] + 1.6 y[n - 1] - 0.81 y[n - 2]$$

C'est cette équation aux différences qui sera implantée dans le processeur et exécutée à chaque nouvel instant d'échantillonnage T_e . Le code réalisant ce filtre pourrait s'écrire comme suit :

```
% initialisation des constantes
b0 = 0.0; b1 = +0.21; b2 = 0.0;
a1 = -1.6; a2 = +0.81;
% initialisation des variables
xn1 = 0.0; xn2 = 0.0; % valeurs anciennes de x[n]
yn1 = 0.0; yn2 = 0.0; % valeurs anciennes de y[n]

% operation de filtrage (xn0, yn0: valeurs actuelles)
repeat
  xn0 = AnalogInput;
  yn0 = b0*xn0 + b1*xn1 + b2*xn2 - a1*yn1 - a2*yn2;
  AnalogOutput(yn0);
  % mise a jour des 2 piles xn et yn
  yn2 = yn1; yn1 = yn0;
  xn2 = xn1; xn1 = xn0;
until stop;
```

7.8. Classification des systèmes numériques

Au travers des sections précédentes, nous avons vu différentes formes de représentation des systèmes numériques : équations aux différences, schémas fonctionnels et fonctions de transfert. Les divers exemples ont permis de montrer que la réponse d'un système peut se calculer en prenant en compte le signal d'entrée seulement ou les signaux d'entrée et de sortie simultanément.

De ces deux possibilités découle une classification des systèmes qu'il est important de connaître. Ces deux classes de représentations des systèmes linéaires sont souvent désignées avec des acronymes anglo-saxons qui seront utilisés par la suite.

7.8.1. Systèmes non récurrents (dits RIF, FIR ou MA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal non récurrent d'ordre N se calcule uniquement à partir du signal d'entrée $x[n]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 7.15a.

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_N x[n-N] \quad (7.57)$$

On peut remarquer que sa réponse impulsionnelle correspond aux coefficients b_k ; elle est donc de longueur finie N . Ainsi le calcul de $y[n]$ revient-il à convoluer le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle $h[k] \equiv b_k$ du système linéaire. On peut également observer que ce système effectue une pondération des valeurs du signal d'entrée et que cela correspond à une moyenne glissante (moving average).

Ces systèmes sont donc désignés avec l'acronyme *RIF* (Réponse Impulsionnelle Finie) ou *FIR* (Finite Impulse Response) ou *MA* (Moving Average) et leur fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N} \quad (7.58)$$

De par leur structure, les systèmes FIR sont toujours stables, mais ils demandent passablement de temps de calcul car la longueur de la réponse impulsionnelle d'un tel système est généralement très élevée ($N > 100$).

7.8.2. Systèmes récurrents (dits RII, IIR ou ARMA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal récurrent d'ordre N se calcule à partir du signal d'entrée $x[n]$ et des valeurs précédentes de la sortie $y[n-k]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 7.15b.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (7.59)$$

On peut remarquer que ces systèmes ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leur fonction de transfert

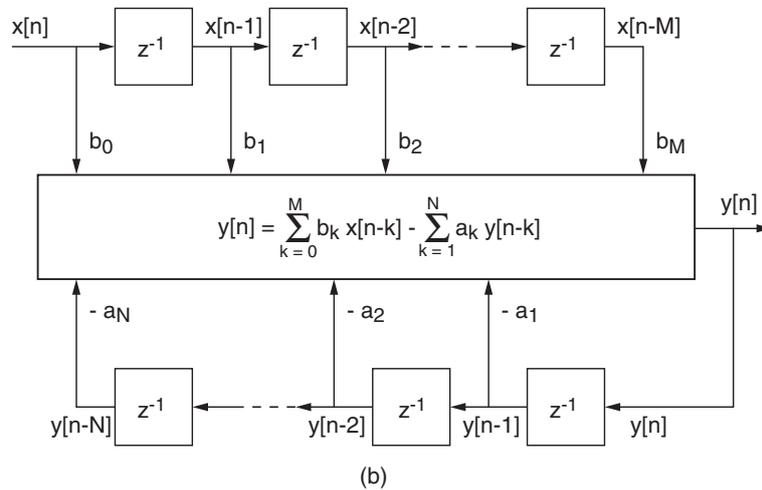
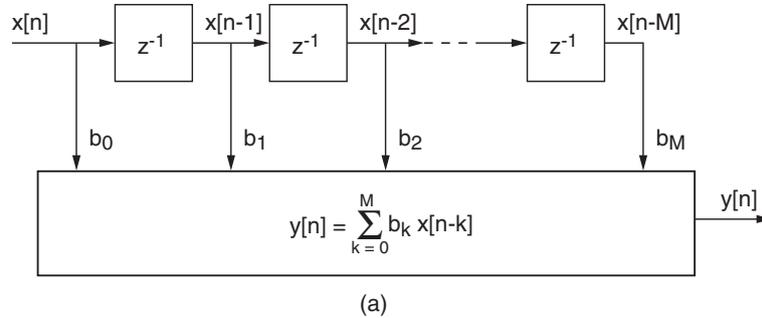
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (7.60)$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette fonction de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie *RII* ou *IIR* (Infinite Impulse Response) ou Auto Régressive (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (Moving Average MA). D'où l'appellation *ARMA* (Auto Régressive and Moving Average).

Généralement, l'ordre d'un système IIR est peu élevé ($N = 1 \dots 10$) et il est réalisé en plaçant en série des cellules biquadratiques (cellules IIR d'ordre 2). Il est donc très efficace en temps de calcul mais, de par sa structure récurrente, il peut devenir instable.

7.8.3. Caractéristiques des filtres FIR et IIR

Les qualités (indiquées en gras) et les défauts des filtres FIR et IIR sont présentés dans le tableau de la figure 7.15.



Caractéristiques	Filtres FIR ou MA	Filtres IIR ou ARMA
sélectivité	faible	élevée
ordre	élevé	faible
nombre d'opérations	élevé	faible
mémoire nécessaire	élevée	faible
temps de propagation constant (phase linéaire)	naturellement réalisable	impossible au sens strict
stabilité	absolue	limitée
nombre de bits nécessaires	raisonnable	élevé
précision des coefficients	raisonnable	élevée
cycles limites	aucun	présents
filtres adaptatifs	possibles	difficiles

FIGURE 7.15.: Schémas fonctionnels et caractéristiques des filtres FIR et IIR

7.9. Exercices

SNT 1 Considérant les systèmes numériques suivants

$$y_1[n] = x[n] + x[n-4] + x[n-8]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^6 x[n-k]$$

$$y_3[n] = n \sum_{k=0}^6 x[n-k]$$

$$y_4[n] = x[n] + y_4[n-1] - 0.5y_4[n-2] \quad \text{avec } y_4[-2] = y_4[-1] = 0$$

dessinez leur schéma fonctionnel ainsi que leurs réponses impulsionnelle et indicielle.

SNT 2 Considérant le schéma fonctionnel d'un filtre numérique (figure SNT 2),

1. Écrivez son équation aux différences et sa réponse impulsionnelle.
2. Dessinez les réponses impulsionnelle et indicielle.
3. Ce filtre est-il récursif? Quelle est son action?

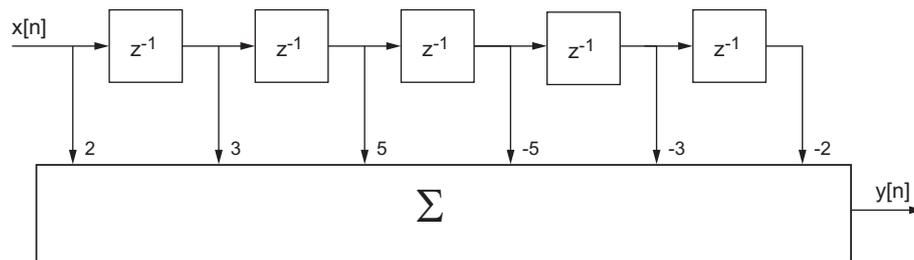


FIGURE 7.16.: Ex. SNT 2

SNT 3 Écrivez l'équation aux différences d'un moyenneur causal d'ordre 5 et dessinez sa réponse $y[n]$ au signal $x[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-10]$.

SNT 4 On souhaite réaliser l'équivalent numérique d'un filtre analogique passe-bas d'ordre 1. Pour cela :

1. Considérez l'équation différentielle du filtre analogique

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

et remplacez la dérivée par une différentielle finie pour obtenir l'équation aux différences du filtre numérique.

2. Utilisez vos résultats et calculez les coefficients du filtre numérique dont la fréquence de coupure se situe aux environs de 1kHz alors que le signal d'entrée est échantillonné à $f_e = 10$ kHz. Dessinez son schéma fonctionnel.

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

3. Calculez les premiers points de sa réponse indicielle et comparez à celle du filtre analogique.
4. Que valent en particulier $y[0]$ et $y[\infty]$? Comparez à $y(0)$ et $y(\infty)$. Justifiez les différences. Que se passe-t-il si on augmente la fréquence d'échantillonnage?

SNT 5 On considère deux filtres numériques décrits par

$$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

Que valent $y[0]$ et $y[\infty]$ si $x[n] = \epsilon[n]$? Quelle est la fonction de chaque filtre?

SNT 6 Considérant six systèmes numériques linéaires décrits par leurs équations aux différences :

1	$y[n] = x[n] + 0.8y[n-1]$
2	$y[n] = x[n] - 0.8y[n-1]$
3	$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1]$
4	$y[n] = x[n] - 1.2y[n-1]$
5	$y[n] = x[n] + 1y[n-1] - 0.8y[n-2]$
6	$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.32y[n-2]$

1. Calculez et dessinez leurs racines dans le plan complexe; où se situent-elles par rapport au cercle unité?
2. Calculez les instants caractéristiques K_c , K_p et N_{osc} pour chaque cas.
3. Donnez l'expression générale de leur réponse transitoire et esquissez leur réponse indicielle.

SNT 7 Calculez la réponse indicielle d'un système numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.6y[n-1] - 0.75y[n-2] \quad \text{avec} \quad y[0] = y[-1] = 0$$

En particulier, que valent $y[0]$, $y[\infty]$, K_{trans} et N_{osc} ?

SNTZ 1 Calculez la transformée en z de la suite suivante

$$y[n] = \{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \dots\}, \quad n \geq 0$$

SNTZ 2 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$.
2. Calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles.
3. Admettant $x[n] = \epsilon[n]$, esquissez $y[n]$ après avoir calculé $y[0]$ et $y[\infty]$.

SNTZ 3 Répondez aux questions de l'exercice précédent pour

$$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.75y[n-2]$$

SNTZ 4 Considérant la réponse indicielle d'un système décrit par

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1.6z + 0.81}$$

calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles ainsi que les valeurs $y[0]$ et $y[\infty]$. Esquissez $y[n]$.

SNTZ 5 Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est décrite par

$$h[n] = \exp\left(-\frac{nT_e}{\tau}\right) \sin(n2\pi f_0 T_e) \epsilon(n)$$

lorsque $T_e = 1$ msec, $\tau = 10$ msec, $f_0 = 100$ Hz?

Rép. :

$$h[n] = R^n \sin(n\Omega_0) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{0.53z}{z^2 - 1.46z + 0.82}$$

SNF 1 Considérant un moyennneur pondéré décrit par l'équation aux différences suivante qui accorde plus d'importance aux valeurs récentes

$$y[n] = \frac{1}{6} (3x[n] + 2x[n-1] + x[n-2])$$

1. Dessinez son schéma ainsi que ses réponses impulsionnelles et indicielle.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

SNF 2 Un filtre passe-bas d'ordre 1 est décrit par

$$y[n] = x[n-1] + 0.9y[n-1]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ lorsque $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

7. RÉPONSES DES SYSTÈMES NUMÉRIQUES

SNF 3 Considérant un filtre d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = R \sin(\Omega_0) x[n-1] + 2R \cos(\Omega_0) y[n-1] - R^2 y[n-2]$$

avec $R = 0.8$ et $\Omega_0 = \pi/4$.

1. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$. Quel type de filtre est ainsi réalisé ?

SNF 4 Un filtre numérique biquadratique est décrit par l'équation aux différences suivante

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] - b_1 y[n-1] - b_2 y[n-2]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0, f_e/4, f_e/2$?
4. Quelles conditions faut-il satisfaire pour que le filtre soit :
 - a) un filtre passe-bas de gain unité ?
 - b) un filtre passe-haut de gain unité ?

SNF 5 On applique un signal sinusoïdal permanent $x(t) = 5 \sin(2\pi \text{kHz} t)$ à un filtre numérique décrit par $y[n] = 0.1 x[n] + 0.9 y[n-1]$. Sachant que $f_e = 10 \text{kHz}$, que vaut le signal analogique $y(t)$ obtenu après conversion N-A ?

SNF 6 Considérant un moyennneur non causal centré d'ordre 5 :

1. Écrivez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ et écrivez-la à l'aide de fonctions en cosinus seulement.
3. Que valent $H(0)$ et $H(\pi)$? Y a-t-il des pulsations pour lesquelles $H(j\Omega)$ s'anule ?

SNF 7 Calculez puis esquissez les réponses indicielle $y[n]$ et fréquentielle $H(j\Omega)$ d'un filtre décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A \{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \dots\}, \quad n \geq 0, \quad A = 1$$

Que doit valoir A pour que le gain de ce filtre soit égal à 1 ?

SNF 8 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Recherchez les valeurs numériques de $H(j\Omega)$ lorsque $f = 0, f_e/4, f_e/2$.
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$.

SNF 9 Répétez l'exercice précédent pour un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2y[n-1] - 0.72y[n-2]$$

SNF 10 Considérant le schéma fonctionnel du filtre numérique de l'exercice SNT 2 pour lequel la réponse impulsionnelle vaut

$$h[n] = \{+2, +3, +5, -5, -3, -2, 0, 0, \dots\}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Écrivez cette dernière avec un phaseur et une somme de sinus.
3. Écrivez le module et la phase de $H(j\Omega)$. Observez- alors que la phase est linéaire ; expliquez a posteriori pourquoi cette phase doit être linéaire.
4. Esquissez le module et la phase de $H(j\Omega)$ après avoir calculé les valeurs particulières pour $f = 0, f_e/4, f_e/2, 3f_e/4, f_e$.

Troisième partie .
Travaux pratiques

8. Analyse de signaux périodiques

Le but de ce travail pratique est d'apprendre à générer et analyser des signaux dans les domaines temporels et fréquentiels. Pour ce faire, vous créez des signaux périodiques tels que les suites d'impulsions rectangulaires (`sir`), triangulaires (`sit`), exponentielles (`sie`) et oscillantes amorties (`sinam`) pour les analyser ensuite.

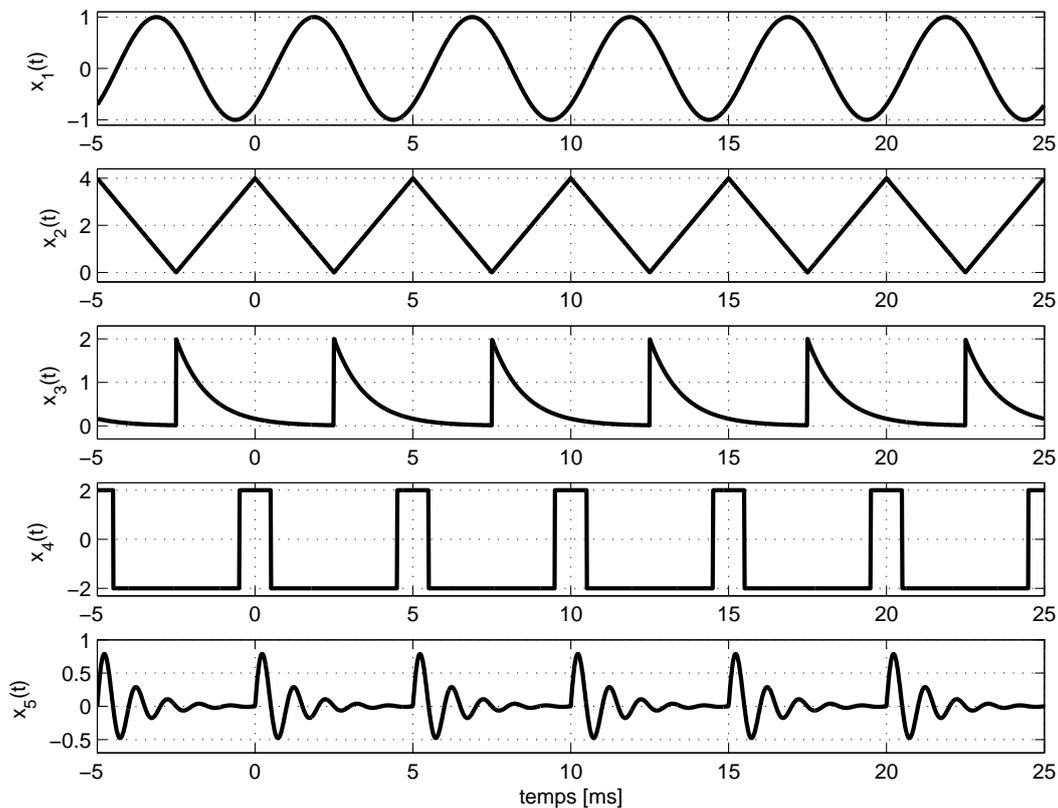


FIGURE 8.1.: Exemples de signaux

Commencez par lire la section 8.4 et observez à quel point il est simple de créer des signaux périodiques où, sauf pour la `sit`, deux lignes de code suffisent. Copiez dans votre répertoire de travail les fonctions `sir.m`, `sit.m`, `sie.m`, `sinam.m` génératrices de quelques signaux utiles. Puis, dans la fenêtre de commandes Matlab, tapez `help sir.m` ou autres pour voir comment on utilise ces fonctions.

8.1. Analyse temporelle

8.1.1. Création de quelques signaux

Écrivez un fichier `signaux_a.m` dans lequel vous calculerez et tracerez les signaux de la figure 8.1. Puis :

1. Générez un vecteur temps constitué de $N = 1000$ valeurs comprises entre t_{min} et t_{max} .
2. Pour chacun des signaux, définissez les paramètres t_{dec} , T_0 , rc , τ , T_p ainsi que l'amplitude A et le décalage en ordonnée.
3. Calculez et tracez les cinq signaux.
4. Modifiez les valeurs des paramètres ; est-ce que tout se passe bien ? est-il raisonnable de prendre des valeurs faibles pour N ?

8.1.2. Valeurs moyennes, puissance

Pour mémoire, on rappelle que la puissance d'un signal peut être calculée dans les domaines temporel ou fréquentiel (théorème de Parseval)

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 \quad (8.1)$$

et que la puissance totale d'un signal est égale à la somme des puissances DC et AC

$$P_x = P_{dc} + P_{ac} = X_{dc}^2 + X_{ac}^2 \quad (8.2)$$

On en déduit alors que la puissance et la valeur efficace de la composante alternative valent

$$P_{ac} = P_x - X_{dc}^2, \quad X_{ac} = \sqrt{P_{ac}} \quad (8.3)$$

Comme les signaux que l'on traite avec Matlab sont des grandeurs analogiques numérisées, il est important de définir comment on calcule les valeurs associées aux signaux analogiques $x(t)$ ou numériques $x[n]$:

– la composante continue ou valeur moyenne du signal

$$X_{dc} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \quad X_{dc} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (8.4)$$

– la puissance normalisée du signal

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt, \quad P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \quad (8.5)$$

Afin d'obtenir les paramètres caractéristiques de vos signaux, écrivez une fonction fournissant ces valeurs :

```
function [Xdc, Xac, Px] = ParamSignal (xt);
```

Quatre lignes de codes suffisent si vous employez les deux fonctions élémentaires, mais très utiles, que sont `sum` et `length`.

8.1.3. Analyse des résultats

Pour chacun des signaux ci-dessus,

1. rappelez l'expression des **valeurs théoriques** des paramètres P_x, P_{dc}, P_{ac} ; tirez-en X_{eff}, X_{dc}, X_{ac} et calculez leur valeur avec Matlab;
2. utilisez votre fonction `ParamSignal.m` pour calculez les valeurs mesurées sur vos signaux;
3. à l'aide d'un tableau, comparez ces résultats aux valeurs théoriques et expliquez les différences éventuelles.

	Sinus	Triangle	Exponentielle	Impulsion	Sinus amorti
X_{dc} théor.					
X_{dc} mes.					
X_{ac} théor.					
X_{ac} mes.					

8.2. Analyse spectrale

Le travail qui est demandé dans cette section s'inspire directement du chapitre consacré à l'analyse spectrale numérique. Vous devez donc commencer par relire son contenu et vous attachez plus particulièrement aux deux premiers exemples d'analyse spectrale. Une fois cela fait, copiez dans votre répertoire de travail le fichier `enreg_signaux.txt` et créez un nouveau fichier `signaux_c.m` dans lequel vous effectuerez les opérations et analyses suivantes.

1. Chargez le fichier enregistré et extrayez les informations utiles


```
mesure = load('enreg_signaux.txt');
tt = mesure(:,1); xt = mesure(:,2); N = length(xt);
dt = tt(2) - tt(1); duree = N * dt;
```
2. Tracez et observez le signal $x(t)$;
 - a) que valent sa puissance et ses valeurs moyenne et efficace?
 - b) que valent la durée du signal et sa période d'échantillonnage?
 - c) que vaudront l'incrément fréquentiel et la fréquence maximum du spectre?
3. Calculez le vecteur $f[k]$ des fréquences et le spectre $X[jk]$ du signal $x(t)$. Vérifiez que la puissance calculée avec $X[jk]$ donne bien le même résultat que celle calculée avec $x(t)$.
4. Tracez (`subplot(2,1,k)`) les spectres d'amplitudes unitlatéraux A_k et $A_{w,k}$ avec des axes satisfaisants; observez et analysez;
 - a) pouvez-vous mettre en évidence des composantes spectrales?
 - b) que valent leurs fréquence, amplitude et phase?
 - c) quelle est l'incertitude sur la valeur des fréquences?
 - d) commentez l'allure du contenu spectral.

8. ANALYSE DE SIGNAUX PÉRIODIQUES

5. À partir des composantes spectrales choisies comme significatives, reconstruisez le signal original $x_o(t)$ et calculez sa valeur efficace ainsi que le rapport signal sur bruit (SNR) de l'enregistrement proposé. Rappel :

$$SNR = 10 \cdot \log \left(\frac{P_{x_o}}{P_{tot}} \right)$$

8.3. Reconstruction d'un signal

Comme on l'a vu dans l'analyse de Fourier, la reconstruction ou synthèse d'un signal se fait à partir de ses K composantes spectrales $X(jk)$:

$$x_{(K)}(t) = \sum_{k=-K}^{+K} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad (8.6)$$

En préalable à votre travail, rappelez ce que valent les spectres d'une SIR et d'une SIT puis ouvrez un fichier `signaux_b.m` dans lequel vous créez des signaux de période $T_0 = 1$ ms et d'approximation $K = 5, 10, 20$. Pour cela :

1. Construisez les trois signaux périodiques suivants pour une durée $5T_0$:
 - a) un signal triangulaire similaire à celui de la figure 8.1 ;
 - b) une SIR centrée caractérisée par $A = 5$, $\Delta t = 0.2$ ms ;
 - c) un signal carré démarant au flanc montant et d'amplitude comprise entre -2.5 et +2.5.
2. Pour chacun des signaux tracez les trois approximations (`subplot(3,1,k)`) ; observez-les et concluez.
3. Pour chacun des trois signaux, calculez leur puissance dans les domaines temporel et fréquentiel. Comparez et expliquez les différences.

8.4. Annexe

Voici les fichiers Matlab permettant de générer les signaux particuliers définis en introduction. Vous noterez à quel point la fonction modulo est utile pour générer des signaux périodiques.

Suites d'impulsions rectangulaires (`sir.m`)

```
function [x] = sir(temps, T0, rc);
% sir(temps, T0, rc)
% Calcul d'une suite d'impulsions rectangulaires d'amplitude 1,durée 5T_{0}
% de rapport cyclique rc demarrant lorsque temps = 0
% Parametres:
% temps = variable temporelle
```

```

% rc = rapport cyclique = 0.5 par default
% Exemple d'utilisation:
% xt = amplitude * sir((temps+decalage),T0, rc);

% valeurs par default
if nargin == 2, rc = 0.5; end;
tm = mod(temps,T0); % rampe comprise entre 0 et T0
x = tm/T0 < rc; % x = 1 ou 0

```

Suites d'impulsions triangulaires (sit.m)

```

function [x] = sit(temps, T0, rc);
% sit(t, T0, rc)
% Calcul d'une suite d'impulsions triangulaires d'amplitude 1, de
% période T0, de rapport cyclique rc demarrant lorsque temps = 0
% Parametres:
% temps = variable
% T0 = période
% rc = rapport cyclique = 0.5 par default
% Exemple d'utilisation:
% xt = amplitude * sit(temps, T0, rc);

% verification des parametres d'entree
if nargin == 2, rc = 0.5; end; % valeur par default
if (rc > 1)|(rc < 0)
    error('Le rapport cyclique doit etre compris entre 0 et 1');
end;
% creation du signal x = 0
x = zeros(size(temps));
tm = mod(temps,T0); % rampe comprise entre 0 et T0
% creation des triangles
k1 = find(tm/T0 < rc/2);
x(k1) = tm(k1)/T0; % rampe positive 0 ... rc/2
k2 = find((tm/T0 >= rc/2)&(tm/T0 < rc));
x(k2) = rc - tm(k2)/T0; % rampe negative rc/2 ... 0
% normalisation
x = x/max(x);

```

Suites d'impulsions exponentielles amorties (sie.m)

```

function [x] = sie(temps, T0, tau);
% sie(temps, T0, tau)
% Calcul d'une suite d'impulsions exponentielles d'amplitude 1,
% de constante de temps tau demarrant lorsque temps = 0
% Parametres:
% temps = variable temporelle
% T0 = periode
% tau = constante de temps
% Exemple d'utilisation:

```

8. ANALYSE DE SIGNAUX PÉRIODIQUES

```
% xt = amplitude * sie(temps+decal, T0, tau);

tm = mod(temps,T0); % rampe comprise entre 0 et T0
x = exp(-tm/tau);
```

Suite de sinusoides amorties (sinam.m)

```
function [y] = sinam(temps, T0, tau, Tp);
% sinam(temps, T0, tau, Tp)
% Calcul d'une suite de sinusoides amorties de periode Tp,
% d'amortissement tau se repetant avec la periodicite T0
% Utilisation:
% yt = amplitude * sinam(temps+decal, T0, tau, Tp);

tm = mod(temps,T0); % rampe comprise entre 0 et T0
y = exp(-tm/tau).*sin(2*pi*tm/Tp);
```

9. Signaux et systèmes numériques

9.1. Numérisation des signaux analogiques

Lorsqu'on analyse et/ou traite signaux par programmation (Matlab ou autres), ces signaux sont par définition numériques. Au sens strict, on ne peut donc plus parler de signaux analogiques. Cependant, on se permet de le faire si l'incrément temporel utilisé pour les décrire est beaucoup plus petit que le temps caractéristique minimum du signal.

Dans tout ce qui suit, il est donc extrêmement important de bien distinguer au niveau des variables entre les signaux analogiques *numérisés* `xt` (équivalent de $x(t)$) et les signaux *échantillonnés* `xn` (équivalent de $x[n]$) qui sont tous deux numériques.

Dans le premier cas, on choisira un nombre élevé de points de manière à avoir un incrément temporel Δt très petit alors que dans le deuxième cas, l'incrément temporel T_e sera fixé par la fréquence d'échantillonnage qui doit respecter le théorème de Shannon ; généralement, le nombre de points sera beaucoup moins élevé que dans le premier cas. Une illustration en est donnée dans la figure 9.1.

9.2. Échantillonnage des signaux analogiques

9.2.1. Signal sinusoïdal

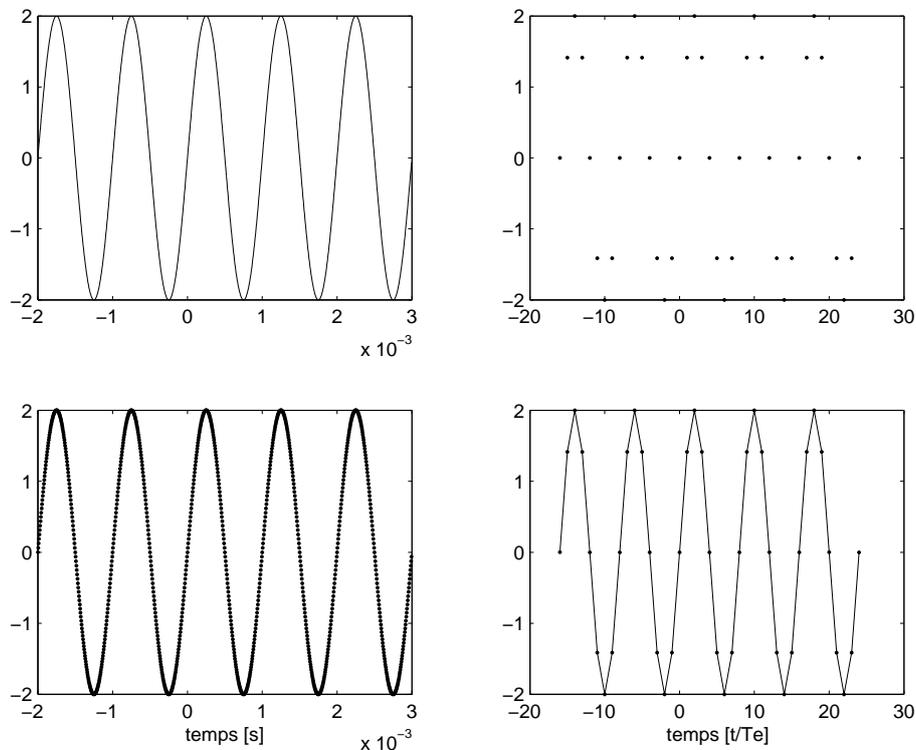
Construisez un signal $x(t)$ de période $T_0 = 1$ ms de durée $t_{max} = 20$ ms avec un incrément temporel de $20 \mu s$. Tracez ce signal (`plot(tt,xt)`) dans une fenêtre `subplot(5,1,1)`. Échantillonnez ce signal avec les fréquences d'échantillonnage f_e valant 4kHz, 2kHz, 1.1kHz, 0.9kHz et tracez (`plot(tn,xn)`) les signaux $x[n]$ dans les fenêtres `(5,1,k)`. Observez et concluez.

9.2.2. Signal audio

Dans cette section, vous allez créer un son pur échantillonné à 8 kHz durant 1 seconde. À l'aide de la carte-son, vous écouterez plusieurs sons dont les 9 fréquences sont comprises entre 800 Hz et 7200 Hz. Pour ce faire, créez une boucle `for k1 = 1:9` dans laquelle vous

- générez les signaux sinusoïdaux de fréquence $f_0 = k1*800$ et d'amplitude 1 ;
- tracez les graphes correspondants avec
`subplot(3,3,k1); plot(tn(1:80),xn(1:80)); ylabel(num2str(f0));`

9. Signaux et systèmes numériques



```
% signal analogique numérisé
tmin = -2e-3;
tmax = +10e-3;
Npts = 1000;
dt = (tmax - tmin)/Npts;
tt = tmin:dt:tmax-dt;
A = 2; T0 = 1e-3;
xt = A*sin(2*pi*tt/T0);
subplot(2,2,1);
plot(tt,xt);
subplot(2,2,2);
plot(tt,xt,'.');
```

```
% signal échantillonné
tmin = -2e-3;
tmax = +10e-3;
fe = 8000;
Te = 1/fe;
tn = tmin:Te:tmax-Te;
A = 2; T0 = 1e-3;
xn = A*sin(2*pi*tn/T0);
subplot(2,2,3);
plot(tn/Te,xn,'.');
```

FIGURE 9.1.: Exemple de signal numérisé ou échantillonné

- écoutez le signal avec `soundsc(xn,fe)`; `pause(2)`;
- Connaissant la fréquence d'échantillonnage et la durée du signal,
- calculez les fréquences `fk` du spectre numérique;
- répétez les opérations ci-dessus en traçant les spectres `Xjk` dans une nouvelle figure :
- `Xjk = fft(xn)/Npts; subplot(3,3,k1); plot(fk,abs(Xjk))`;
- écoutez, observez et concluez.

9.2.3. Signal modulé en fréquence

Dans cette section vous générerez un signal dont la fréquence varie linéairement au cours du temps (signal chirp). Après avoir tracé le signal et son évolution spectrale, vous pourrez l'écouter et conclure ce point consacré à l'échantillonnage des signaux.

1. Sachant qu'un signal chirp est décrit par

$$x(t) = \sin(\theta(t)) = \sin\left(2\pi\left(f_1 t + \frac{\beta}{2} t^2\right)\right)$$

calculez sa fréquence instantanée

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \omega(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Considérant que l'on choisit

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq t_{max} &= 1 \text{ [sec]} & f_e &= 8 \text{ [kHz]} \\ f_1 &= 100 \text{ [Hz]} & \beta &= 8000 \text{ [Hz/sec]} \end{aligned}$$

calculez les fréquences f_{min} , f_{max} . A quel instant t , la fréquence vaudra-t-elle 4 kHz ?

2. Tracez à la main l'évolution de la fréquence $f(t)$; imaginez l'allure du signal $x(t)$. Que se passera-t-il d'anormal à l'écoute de ce signal ?
3. Calculez le signal $x[n]$; tracez-le avec la fonction `large_plot.m` (voir en annexe).
4. Dans une nouvelle figure, tracez son spectrogramme `specgram(xn,Nfft,fe)`, avec le code des couleurs `colorbar` et `Nfft` valant 128 ou 256. Qu'est-ce qui change avec 128 et 256 ?
5. Écoutez le signal et concluez.

9.3. Réponse temporelle des systèmes numériques

9.3.1. Produit de convolution

On a vu que la réponse temporelle d'un système linéaire causal peut se calculer avec le produit de convolution suivant

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\min(n,N-1)} h[k] x[n-k], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

9. Signaux et systèmes numériques

La fonction `conv` existe bien entendu dans Matlab. Cependant, afin de bien comprendre l'algorithme de convolution, vous créez votre propre fonction `[yn] = myconv(hn,xn)`. Pour cela :

1. Calculez à la main la convolution entre $\mathbf{xn} = [1,2,3,4]$ et $\mathbf{hn} = [5,6]$; quelle est la longueur du résultat \mathbf{yn} ?
2. Qu'est ce qui change si on augmente la longueur de \mathbf{xn} avec des 0 (par exemple, $\mathbf{xn} = [1,2,3,4,0,0]$) ?
3. Écrivez un fichier `myconv.m` dont la première ligne sera `function [yn] = myconv(hn,xn)` ;
4. Définissez les longueurs des signaux dont vous aurez besoin. Écrivez la double boucle `for` vous permettant de calculer $\mathbf{yn}(n)$.
5. Testez votre fonction avec les signaux définis au point 1.

9.3.2. Réponses impulsionnelles et temporelles

On désire découvrir le comportement de systèmes décrits par les réponses impulsionnelles suivantes :

```
h1n = [1 1 1 1 1];
h2n = [5 4 3 2 1];
h3n = [1 2 3 4 5 4 3 2 1];
h4n = [1 2 3 4 5 -5 -4 -3 -2 -1];
h5n = 0.7^n; % n = 0...10;
h6n = [3.27, -0.7^n]; % n = 0...10;
```

Pour ce faire :

1. Tracez ces réponses impulsionnelles avec `subplot(3,2,k); plot(hkn, ' . ');` observez et commentez.
2. Dans une nouvelle figure, calculez et tracez leur réponse $\mathbf{yn} = \text{conv}(\mathbf{xn}, \mathbf{hkn})$ à un signal carré $\mathbf{xn} = [0, \text{ones}(1,20), \text{zeros}(1,20)]$.
3. Observez et analysez ces réponses ; à quels types de filtres a-t-on affaire ?
4. Quelles sont les longueurs de \mathbf{xn} et \mathbf{yn} ? Justifiez leur valeur.
5. Que faut-il faire pour que le gain des filtres passe-bas soit égal à 1 ?

9.3.3. Équations aux différences

Un filtre ou système numérique d'ordre 2 est décrit de manière générale par une équation aux différences telle que

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

ou par sa fonction de transfert

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

9.4. Réponse fréquentielle des systèmes numériques

1. Écrivez une fonction `[yn] = filtre_ed2(b,a,xn)` vous permettant de calculer la réponse temporelle d'un filtre décrit par les vecteurs `a` et `b` de longueur 2.
2. Considérant un filtre décrit par `a = [1,-1.4,+0.45]` et `b = [1,2,1]`, calculez ses pôles et ses zéros.
3. Quel sera le comportement transitoire du système? Que faut-il faire pour que le gain du filtre soit égal à 1?
4. Calculez et tracez sa réponse à `xn = [0, ones(1,50)]`.
5. Observez et commentez; de quel type de filtre s'agit-il?
6. Répétez les points 2 à 5 lorsque
 - a) `a = [1,-1.4,+0.7]` et `b = [1,2,1]`;
 - b) `a = [1,-1.4,+0.9]` et `b = [1,-2,1]`;
 - c) `a = [1,-1.4,+0.45]` et `b = [1,-2,1]`;
 - d) `a = [1,-1.4,+0.7]` et `b = [1,-2,1]`;
 - e) `a = [1,-0.7,0]` et `b = [1,0,0]`;
7. Comparez vos résultats avec ceux fournis par la fonction `filter(b,a,x)` de Matlab.

9.4. Réponse fréquentielle des systèmes numériques

Connaissant la fonction de transfert d'un système numérique

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

on peut facilement calculer sa réponse fréquentielle en remplaçant l'opérateur de retard z^{-1} par sa transformée de Fourier $\exp(-j\Omega)$ où Ω est la pulsation normalisée

$$\Omega \equiv 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e} \quad -\pi \leq \Omega \leq +\pi$$

On obtient alors

$$H(j\Omega) \equiv \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}}$$

1. Écrivez une fonction `[H] = myfreqz(b,a,W)` permettant de calculer la réponse fréquentielle d'un système numérique d'ordre 2.
2. Calculez et tracez les modules et phases des réponses fréquentielles des filtres numériques étudiés plus haut.
3. Comparez vos résultats à ceux fournis par la fonction `freqz(b,a,W)` de Matlab.

9.5. Annexe

Voici le code du fichier `large_plot.m` qui permet de tracer des enregistrements de longue durée.

```
function [] = large_plot(x,y);
% [] = large_plot(x,y); % plot a graph on 10 sub-graphs

Npts = length(x);
Ndiv = 10; Npdiv = round(Npts/Ndiv);
min_y = min(y); max_y = max(y);
for kk = 1:Ndiv
    deb = 1+Npdiv*(kk-1); fin = deb+Npdiv-1;
    subplot(Ndiv,1,kk); plot(x(deb:fin),y(deb:fin));
    axis([x(deb),x(fin),min_y,max_y]);
end;
```

10. Synthèse et réalisation d'un filtre numérique

10.1. Introduction

Une cellule biquadratique est décrite par la fonction de transfert générale

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Celle-ci permet, suivant les valeurs des coefficients b_m et a_m , de réaliser les filtres de base passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. Par transformation inverse de cette fonction de transfert, on obtient l'équation aux différences

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2]$$

On voit ainsi que tous ces filtres peuvent être réalisés à l'aide d'une seule fonction à laquelle on transmet les coefficients correspondants au filtre souhaité

```
function [yn] = equ_diff_num2(bm, am, xn);
```

On demande :

1. Calculez les gains A_{dc} et A_{f_N} de la cellule biquadratique sachant que $f_N = f_e/2$.
2. Quelles sont les conditions pour réaliser
 - a) un filtre passe-bas tel que $A_{dc} = 1$ et $A_{f_N} = 0$?
 - b) un filtre passe-haut tel que $A_{dc} = 0$ et $A_{f_N} = 1$?
 - c) un filtre passe-bande tel que $A_{dc} = 0$ et $A_{f_N} = 0$?

10.2. Synthèse

La synthèse d'un filtre numérique consiste en la recherche d'une fonction de transfert $H(z)$ satisfaisant à un cahier des charges donné.

Dans le cadre de ce TP, on souhaite réaliser un filtre passe-bande d'ordre 2 de fréquence centrale $f_0 = 100$ Hz alors que la fréquence d'échantillonnage vaut $f_e = 2$ kHz. Afin d'assurer la stabilité et la sélectivité du filtre, on placera ses pôles sur

10. Synthèse et réalisation d'un filtre numérique

un cercle de rayon $r = 0.98$. Puis on ajustera son gain A_0 de manière à ce que $|H(jf_0)| = 1$.

Sachant que z et f sont reliés entre eux par

$$z = e^{sT_e} = e^{j2\pi f T_e}$$

montrez que les correspondances suivantes sont vraies

f	0	f_0	$f_e/2$
z	+1	$e^{j\pi/10}$	-1

Étant donné le cahier des charges :

1. Que doivent valoir $H(f = 0)$ et $H(f = f_e/2)$?
2. Dessinez la position des pôles et zéros de ce filtre dans le plan complexe. Tirez-en les valeurs de $z_{1,2}$ et $p_{1,2}$ sachant que la fonction de transfert du filtre d'ordre 2 s'écrit

$$H(z) = A_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

3. Calculez le gain A_0 de manière à ce que $|H(jf_0)| = 1$.
4. Écrivez la fonction de transfert sous la forme d'un rapport de deux trinômes.

10.3. Analyse

Analyse fréquentielle

1. Calculez puis tracez la réponse fréquentielle du filtre entre 0 et $f_2/2$.
2. Que valent les fréquences de coupure inférieure f_i et supérieure f_s ? Sa bande passante ?
3. Quelles seront les amplitudes et les phases du signal de sortie aux fréquences 50Hz, 100Hz et 150Hz ?

Analyse temporelle

1. Recherchez les instants caractéristiques de ce filtre.
2. Connaissant la période d'échantillonnage T_e , calculez la durée de son régime transitoire.
3. Écrivez la fonction de transfert avec l'opérateur de retard z^{-1} . Tirez-en l'équation aux différences du filtre.
4. Calculez sa réponse indicielle puis tracez-la avec `plot(nn*Te, yn, '-')`. Mesurez la durée du régime transitoire et sa période d'oscillation.

10.4. Réalisation

La “réalisation” d’un filtre avec Matlab consiste à simuler le comportement de celui-ci en admettant que le signal d’entrée $x[n]$ provient d’un convertisseur AN. Connaissant cette suite de valeurs $x[n]$, on peut la “faire passer par le processeur numérique” sachant que celui-ci est représenté par l’équation aux différences.

Pour ce faire, on demande :

1. Calculez la suite $x[n]$ sachant que le signal d’entrée $x(t)$ est une sinusoïde $\sin(2\pi f t)$ de fréquence $f = 50$ Hz durant 150 msec.
2. Connaissant l’équation aux différences, calculez la réponse $y[n]$ du filtre.
3. Tracez cette réponse avec `plot(nn*Te, yn, ‘.-’)`.
4. Observez la partie transitoire de cette réponse; mesurez sa période et son amplitude en régime permanent.
5. Commentez vos observations en prenant en compte les résultats de l’analyse.

Répétez les points ci-dessus pour les fréquences $f = 100$ Hz et $f = 150$ Hz.

11. Analyse et réalisation d'un phonocardiogramme

11.1. Introduction

On s'intéresse ici à la mesure automatique des pulsations cardiaques à l'aide de moyens simples : un stéthoscope muni d'une capsule microphonique et la carte-audio d'un PC permettant d'enregistrer le son caractéristique des battements cardiaques.

On sait que l'oreille humaine n'entend pas les sons inférieurs à 20Hz. Or, nous sommes capables d'écouter le coeur battre à une période d'environ une seconde, ou à une fréquence d'environ un Hz. Cela est possible car le signal est rendu audible par un "souffle" (un bruit) basse-fréquence situé aux environs de 100 Hz dont l'amplitude varie en fonction des pulsations cardiaques. D'un point de vue technique, on a affaire à une modulation d'amplitude.

Comme le rythme cardiaque est périodique, on peut espérer, grâce à l'autocorrélation, éliminer le bruit environnant et faire apparaître clairement la période du rythme cardiaque. Cependant, à cause des perturbations liées à la mesure, les choses ne sont pas aussi simples et, très vite, on se rend compte qu'il vaut mieux travailler avec l'enveloppe du signal car c'est elle qui contient l'information utile et pas le signal lui-même. Ainsi, avant de se lancer sur un chemin peu balisé, il vaut mieux commencer par s'interroger sur le but à atteindre et éliminer ce qui est inutile en se posant les questions suivantes :

- dans quels domaines temporel et spectral se situe l'information recherchée ?
- doit-on considérer les fortes amplitudes ?
- dans quelle zone temporelle se situent les pulsations cardiaques ordinaires ?

11.2. Mise en oeuvre

En écoutant les pulsations cardiaques à l'aide d'un stéthoscope, on remarque que l'information (le rythme cardiaque) se situe aux environs du Hz et qu'on l'entend grâce à un bruit BF situé vers la centaine de Hz. Il est donc inutile de conserver des fréquences supérieures à 500Hz ; de même, en éliminant les fréquences inférieures à 60Hz, on supprime les perturbations causées par le réseau électrique.

L'observation du signal temporel montre que celui-ci est marqué par de forts pics d'amplitudes qui ne semblent pas reliés directement au rythme cardiaque. Si l'on admet que la distribution du bruit est gaussienne, on sait que la probabilité d'avoir

11. Analyse et réalisation d'un phonocardiogramme

des amplitudes supérieures à 3σ est quasiment nulle et que de telles amplitudes ne sont pas significatives.

On peut ainsi envisager rechercher la fréquence cardiaque en suivant la démarche suivante :

1. acquisition d'un signal $x_0(t)$ à l'aide de la carte son d'un PC ($f_e = 8$ kHz) et sauvegarde dans un fichier *.wav ;
2. création d'un fichier Matlab avec lequel on tracera et traitera le signal acquis $x_0(t)$;
3. élimination des fréquences inintéressantes par filtrage passe-bande du signal entre 60 et 500 Hz $\Rightarrow x_f(t)$;
4. limitation des amplitudes du signal à $3 \cdot \sigma$ où σ est l'écart-type ou valeur efficace du signal filtré $\Rightarrow x_{lim}(t)$;
5. recherche de l'enveloppe du signal ; celle-ci s'obtient de manière similaire à la démodulation d'amplitude par le redressement du signal et son filtrage passe-bas $\Rightarrow x_{env}(t)$;
6. autocorrélation de l'enveloppe $\Rightarrow r_{xx}(\tau)$;
7. recherche du maximum de $r_{xx}(\tau)$ situé dans le domaine des pulsations cardiaques ordinaires ; pour des pulsations comprises entre 50 et 200 puls/min, le premier pic se trouvera entre 1.2 et 0.3 secondes.

La figure 11.1 illustre les résultats obtenus en parcourant ces différentes étapes ; on obtient ainsi le rythme cardiaque avec un taux de réussite raisonnable.

11.3. Travail à effectuer

1. Avant le TP, enregistrez votre propre pouls à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 8$ kHz pendant environ dix secondes à l'aide d'un stéthoscope muni d'une capsule microphonique.
2. Puis, éditez un fichier Matlab en vous inspirant de celui présenté ci-dessous.
3. Avancez progressivement dans votre programme en vous arrêtant à chaque étape de manière à pouvoir observer et analyser le résultat de chaque action.
4. Modifiez des paramètres pour voir et comprendre leur effet.
5. N'hésitez pas à ouvrir d'autres voies que celle proposée ; soyez imaginatif et créatif.
6. Sur internet, recherchez le fonctionnement de la détection d'enveloppe. Puis commentez sa mise en application dans le programme ci-dessous.

11.4. Fichier Matlab

```
% mesure du rythme cardiaque
clear all; close all; clc;
```

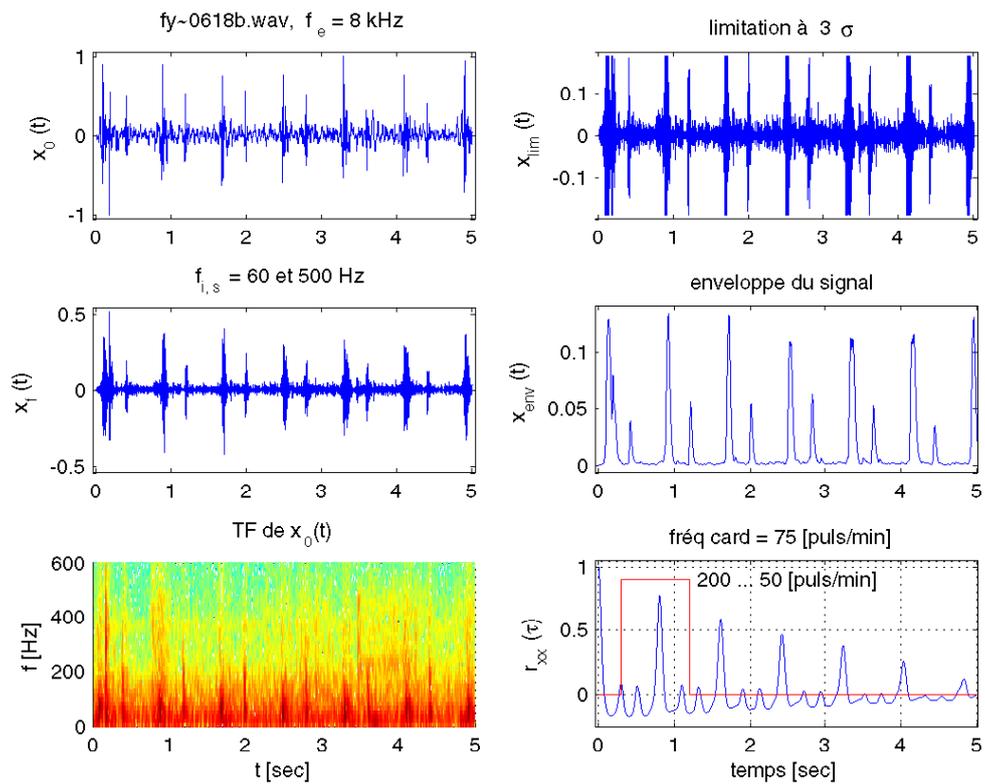


FIGURE 11.1.: Analyse d'un signal phonocardiographique

```

format compact;
%
%% lecture du signal
fichier = 'mon_stetho.wav';
[xt0,fs,bits] = wavread(fichier);
%
%% initialisation
T_anl = 5; % durée d'analyse
xt0 = xt0(1:round(T_anl*fs));
xt0 = xt0 - mean(xt0);
dt = 1/fs; duree = length(xt0)*dt;
tt = 0:dt:duree-dt;
%
%% observation du signal et de son spectre
figure;
subplot(2,2,1);
    plot(tt, xt0);
    .....
subplot(2,2,5);
    spectrogram(xt0,hamming(256),220,512,fs,'yaxis');
    .....
return

```

11. Analyse et réalisation d'un phonocardiogramme

```
%
%% filtrage passe-bande
fc = [60, 500]; % fréquences de coupure du filtre
Wn = fc/(fs/2); % pulsation normalisée
[b,a] = butter(6, Wn); % filtre de Butterworth d'ordre 6
xt = filter(b,a,xt0);
subplot(2,2,3);
    plot(tt, xt);
    .....
return
%
%% limitation de l'amplitude à 3*sigma
Xac = sqrt(var(xt));
A_lim = 3*Xac;
xt1 = xt;
kf = find(abs(xt1) > A_lim );
xt1(kf) = A_lim*sign(xt(kf));
subplot(2,2,2);
    plot(tt, xt1);
    .....
return
%
%% enveloppe
xte = xt1.^2; % redressement quadratique
xte = A_lim*xte/max(abs(xte));
tau = 10e-3; p1 = exp(-1/fs/tau); % FPB d'ordre 1
xte = filter([1-p1,0], [1, -p1], xte);
xte = filter([1-p1,0], [1, -p1], xte);
subplot(2,2,4);
    plot(tt, xte);
    .....
return
%
%% corrélation de l'enveloppe
long_corr = T_anl*fs; % n secondes
[rxx, kx] = xcorr(xte-mean(xte), long_corr);
rxx = (rxx/max(rxx));
k0 = max(find(kx<=0));
rxx = rxx(k0:end); % on ne garde que rxx(tau>=0)
t_rx = (0:length(rxx)-1)/fs;
subplot(2,2,6);
    plot(t_rx, rxx);
    .....
return
%
%% recherche de la valeur du RC
```

.....

Quatrième partie .

Annexes

12. Formulaire Signaux et systèmes

12.1. Systèmes analogiques

Produit de convolution pour des systèmes causaux

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

Transformation de Laplace

$$\epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \exp(-at) \leftrightarrow \frac{1}{s + a}$$

$$\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \qquad \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$x(t \rightarrow 0) = s X(s)|_{s \rightarrow \infty} \qquad x(t \rightarrow \infty) = s X(s)|_{s \rightarrow 0}$$

Formes canoniques de Bode et de Laplace

$$1 + \frac{s}{\omega_1} \qquad 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2$$

$$s + \omega_1 \qquad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \qquad \zeta \equiv \frac{1}{2Q_0}$$

Stabilité et instants caractéristiques

$$\text{stabilité} \Rightarrow \operatorname{Re}(p_k) < 0$$

$$\tau = \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_k)|}, \quad T_p = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}(p_k)|}, \quad t_{trans} \simeq 5\tau, \quad N_{osc} = \frac{t_{trans}}{T_p} \simeq \left| \frac{\operatorname{Im}(p_k)}{\operatorname{Re}(p_k)} \right|$$

Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

$$Y(s) = X(s) G(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$D(s) = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p \quad \text{si } \zeta < 1$$

$$t_{5\%} \simeq 3\tau \quad \text{et} \quad \zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Systèmes contre-réactionnés

$$G_{bf}(s) \equiv G_w(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

12.2. Signaux analogiques

Valeurs efficaces des signaux carrés, sinusoïdaux et triangulaires d'amplitude A

$$X_{car,eff} = A = \frac{A}{\sqrt{1}}, \quad X_{sin,eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad X_{tri,eff} = \frac{A}{\sqrt{3}}, \quad \text{avec } X_{dc} = 0$$

Signaux périodiques développés en séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad \text{avec} \quad X(jk) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 = X(j0) \\ A_k = 2 |X(jk)| \\ \alpha_k = \angle X(jk) \end{cases}$$

SIR centrée d'amplitude A , de période T et de largeur Δt

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}(k f_0 \Delta t)$$

SIT centrée d'amplitude A , de période T et de largeur $2\Delta t$

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}^2(k f_0 \Delta t)$$

SIE d'amplitude A , de période T et de constante de temps τ

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \frac{1 - \exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right)}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \simeq A \frac{\tau}{T} \frac{1}{1 + j2k\pi f_0 \tau} \quad \text{si } \tau \ll T$$

Quelques propriétés des séries de Fourier

puissance :
$$P \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = P_{dc} + P_{ac}$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

décalage :
$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk)$$

modulation :
$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(j(kf_0 \mp f_p))$$

rotation Oy :
$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X^*(jk)$$

Signaux non périodiques (transformation de Fourier)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \Leftrightarrow X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

convolution :
$$x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow H(jf) \cdot X(jf), \quad h(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow H(jf) \otimes X(jf)$$

énergie :
$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [\text{V}^2 \text{sec}] \text{ ou } [\text{V}^2/\text{Hz}]$$

valeurs à l'origine :
$$x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df, \quad X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

Impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt

$$x(t) = A \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right) \Leftrightarrow X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{sinc}(f \Delta t)$$

Filtre passe-bas idéal : $H(jf) = 1$ si $-\Delta f < f < +\Delta f$

$$H(jf) = \text{rect} \left(\frac{f}{2\Delta f} \right) \Leftrightarrow h(t) = 2\Delta f \frac{\sin(2\pi \Delta f t)}{2\pi \Delta f t} = 2\Delta f \text{sinc}(2\Delta f t)$$

12.3. Échantillonnage des signaux**Signaux échantillonnés**

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \Leftrightarrow X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e))$$

12. Formulaire Signaux et systèmes

recouvrement spectral : $f_{app} = |m f_e - f| < \frac{f_e}{2}, \quad m > 1$

théorème de Shannon : $f_e > 2 f_{max}, \quad$ pratiquement : $f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max}$

filtre anti-recouvrement (le plus souvent de type Butterworth d'ordre $m = 8$) :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}}$$

Bruit de quantification d'un convertisseur n bits

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}}, \quad Q_{eff} = \frac{Q}{\sqrt{12}}, \quad SNR \equiv \frac{X_{eff}}{Q_{eff}}$$

non linéarité = perte du bit LSB (de moindre poids)

$$SNR_{max} [\text{dB}] \approx 6 n_{bits} - 6 \quad (\text{y compris la perte du bit LSB})$$

12.4. Signaux et systèmes numériques

Transformation en z (systèmes causaux)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}, \quad z = \text{décalage avant}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

$$y[n=0] = Y(z)|_{z \rightarrow \infty}, \quad y[n \rightarrow \infty] = (z-1)Y(z)|_{z=1}$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(n \Omega_0)$	$\frac{\sin \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \alpha \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \sin(n \Omega_0)$	$\frac{\alpha \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

Produit de convolution (systèmes causaux RIF de longueur N)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

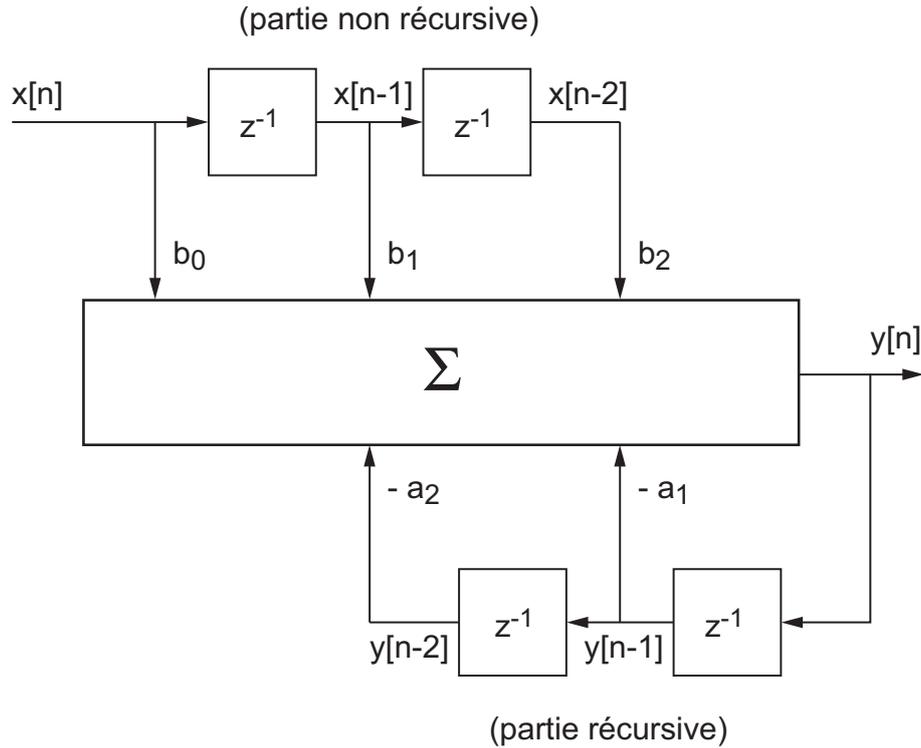
$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2} + \dots$$

Équations aux différences (systèmes causaux RII d'ordre N)

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots$$

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots}$$

Schéma fonctionnel (ordre 2)



Stabilité et instants caractéristiques (ordre 2)

$$\begin{aligned} \text{p\^oles de } H(z) &\Rightarrow D(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \\ \text{d'o\^u } p_{1,2} &= a \pm jb = R \exp(\pm j\Omega) \\ \text{avec } R &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Omega = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \text{stabilité} &\Rightarrow |p_k| = R < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{|\ln(R)|} & K_{tr} &\simeq 5 K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \\ K_p &= \frac{2\pi}{\Omega} & N_{osc} &= \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5}{2\pi} \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \end{aligned}$$

Fonctions de transfert et réponses fréquentielles (ordre 2)

$$H(j\Omega) = H(z)|_{z=e^{+j\Omega}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}} = \frac{b_0 e^{+j2\Omega} + b_1 e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1 e^{+j\Omega} + a_2}$$

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow z = +1 \Rightarrow H(f = 0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{4} &\Leftrightarrow \Omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = +j \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{4}\right) = \frac{-b_0 + j b_1 + b_2}{-1 + j a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{2} &\Leftrightarrow \Omega = \pi \Leftrightarrow z = -1 \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{2}\right) = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \end{aligned}$$

12.5. Analyse spectrale numérique

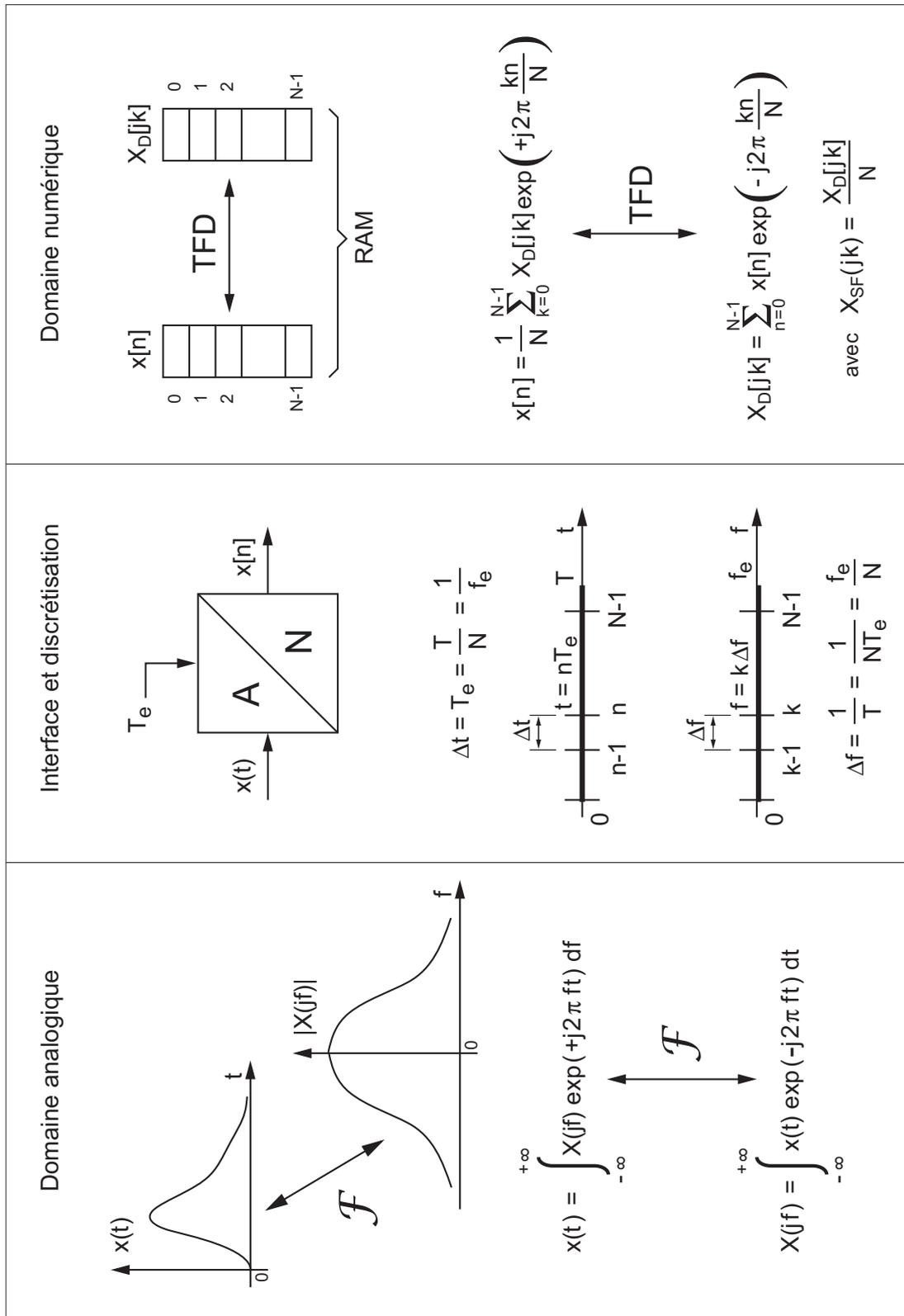


FIGURE 12.1.: Analyse spectrale numérique