

Notes sur l'entretien des oscillations d'un pendule

Professeur Georges Derron, Einev, Ing. élect. EPUL

Professeur Freddy Mudry, heig-vd, Ing. phys. EPFL

Avril 1995 et décembre 2010

Résumé

Cette étude a pour objet l'analyse du comportement d'un pendule dont le point de suspension oscille verticalement au double de la fréquence du pendule. L'étude est limitée aux petites oscillations.

L'originalité de la présente étude est de considérer une force de frottement causée par l'air proportionnelle au carré de la vitesse de la masse du pendule. Cette considération permet d'établir que, dans ce cas, le comportement du pendule est naturellement stable quelle que soit l'amplitude de l'excitation.

1 Introduction

Peu avant la réalisation du pendule de Foucault de la heig-vd, Georges Derron, professeur à l'Einev, a fait une analyse détaillée du fonctionnement d'un pendule dont le mouvement est entretenu par l'élévation périodique de son point de suspension.

Ses notes étant restées sous forme manuscrite [1] et devant l'intérêt renaissant pour le pendule de Foucault de la heig-vd, F. Mudry, professeur à la heig-vd, a retranscrit et mis en page une partie de ces notes sous la forme du présent document. Il a également adapté les résultats numériques et les graphiques aux paramètres du PF tel qu'il a été réalisé en décembre 1995.

On notera que seul l'essentiel des résultats développés dans [1] a été repris et discuté ici. De plus, les parties suivantes n'ont pas été retranscrites :

- l'étude des régimes transitoire ([1], p. 12) et permanent ([1], p. 15) ;
- l'analyse des oscillations propres du système fil-masse ([1], annexe 8) ;
- l'étude détaillée du pendule conique excité périodiquement prenant en compte l'anharmonicité cause d'une ellipticité et d'une précession modifiée. ([1], annexe 9).

2 Équation d'un pendule à mouvement entretenu

Considérant le pendule de la figure 1 dont le point de suspension S oscille verticalement sur l'axe OZ avec une excitation $s(t)$, on montre ([1], annexe 1) que le mouvement pendulaire est décrit par l'équation suivante

$$-mgL \sin \theta + F_f L = mL^2 \ddot{\theta} + mL \ddot{s} \sin \theta. \quad (1)$$

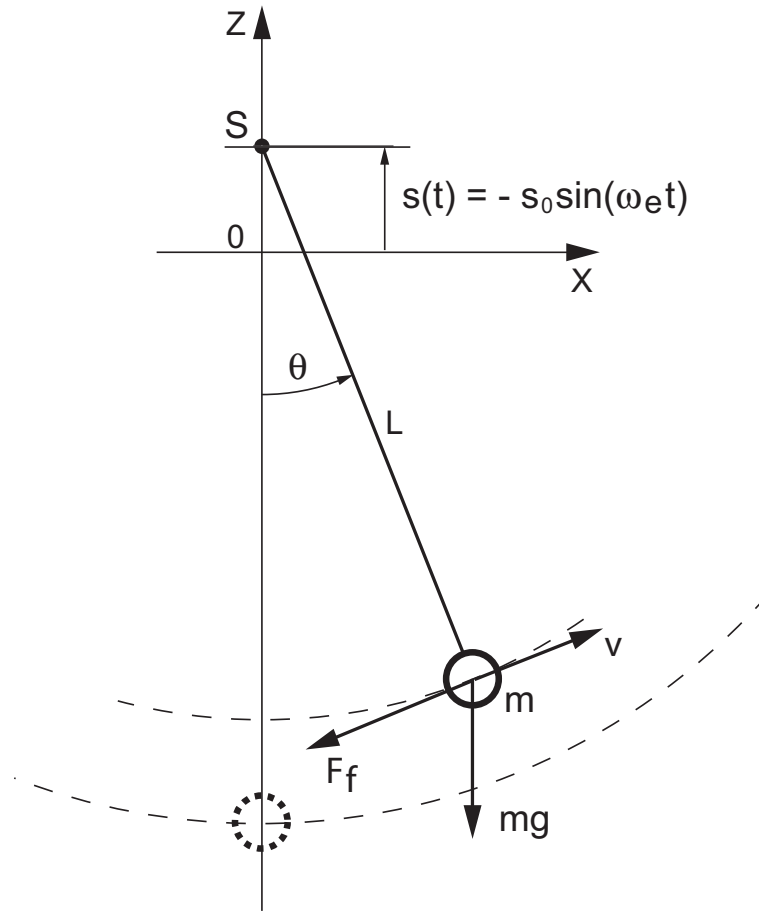


FIG. 1 : Pendule dans son plan Oxz

En simplifiant par mL^2 , cela donne

$$\ddot{\theta} - \frac{F_f}{mL} + \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{\ddot{s}}{L} \sin \theta = 0. \quad (2)$$

Admettant un faible angle d'oscillation ($\sin \theta \simeq \theta$), et définissant de manière classique la pulsation propre d'oscillation du pendule

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad (3)$$

on obtient l'équation du mouvement de la masse du pendule

$$\ddot{\theta} - \frac{F_f}{mL} + \omega_0^2 \theta + \frac{\ddot{s}}{L} \theta = 0. \quad (4)$$

2.1 Paramètres du pendule de la heig-vd

Dans ce qui suit, on sera amené à quantifier certains calculs. On le fera à partir des mesures relevées sur le pendule de la heig-vd, à savoir :

- sa longueur $L = 20$ m,
- sa masse $m = 19.45$ kg,

- le diamètre de la sphère $D_s = 16.6$ cm,
- le diamètre $d_{cyl} = 2$ cm et la longueur $l_{cyl} = 10$ cm du cylindre de fixation du fil,
- le diamètre du fil de suspension $d_{fil} = 1$ mm,
- le rayon de lancement $R_0 = 0.9$ m,
- le temps $T_{demi} = 61$ mn nécessaire, en régime libre, pour que le frottement de l'air réduise d'un facteur 2 l'amplitude de l'oscillation.

De ces valeurs, on déduit que le pendule de la heig-vd oscille avec une pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0.7 \text{ [rad/sec]} \quad (5)$$

et une période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 9 \text{ [sec]}. \quad (6)$$

La figure 2 illustre l'évolution du pendule au cours du temps en l'absence de l'excitation $s(t)$.

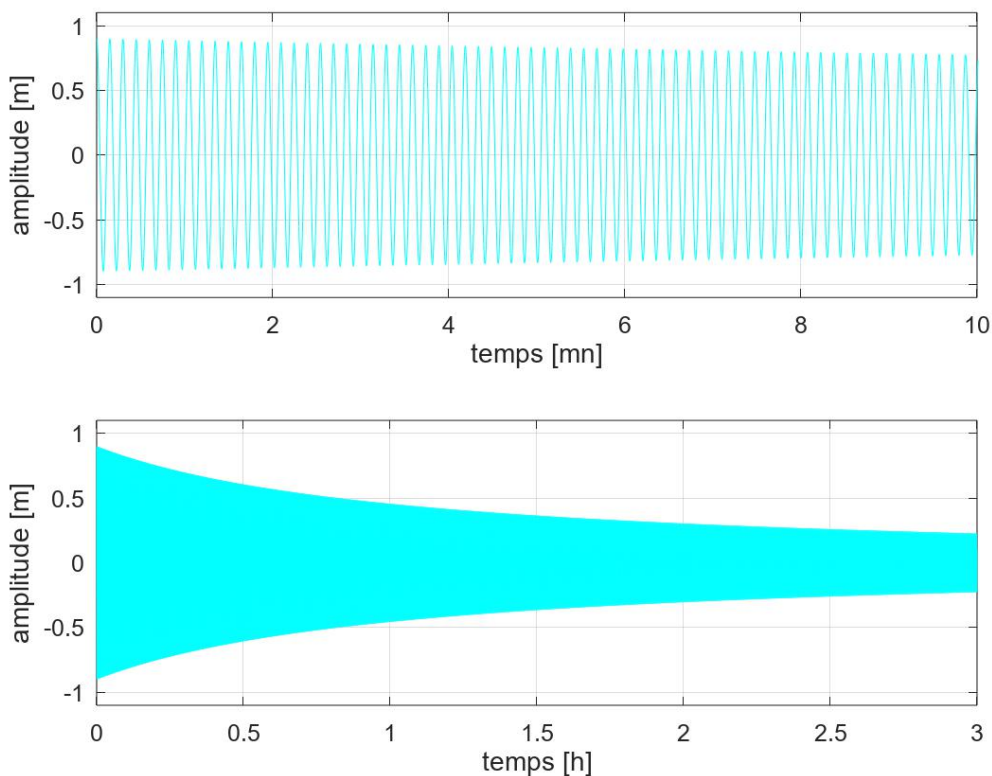


FIG. 2 : Evolution temporelle du pendule libre de la heig-vd

2.2 Force de frottement

Dans l'équation (4), seuls les paramètres L et m décrivant le pendule sont mesurables directement. Par contre, la force de frottement F_f est inconnue ; ce qui, si l'on veut poursuivre l'analyse, nous oblige à rechercher un modèle pour celle-ci. Généralement, deux possibilités sont envisagées :

1. la force de frottement est proportionnelle à la vitesse ; on parle alors de frottement visqueux valable pour de faibles vitesses,
2. lorsque la vitesse est suffisamment élevée, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse car l'écoulement de l'air n'est plus laminaire.

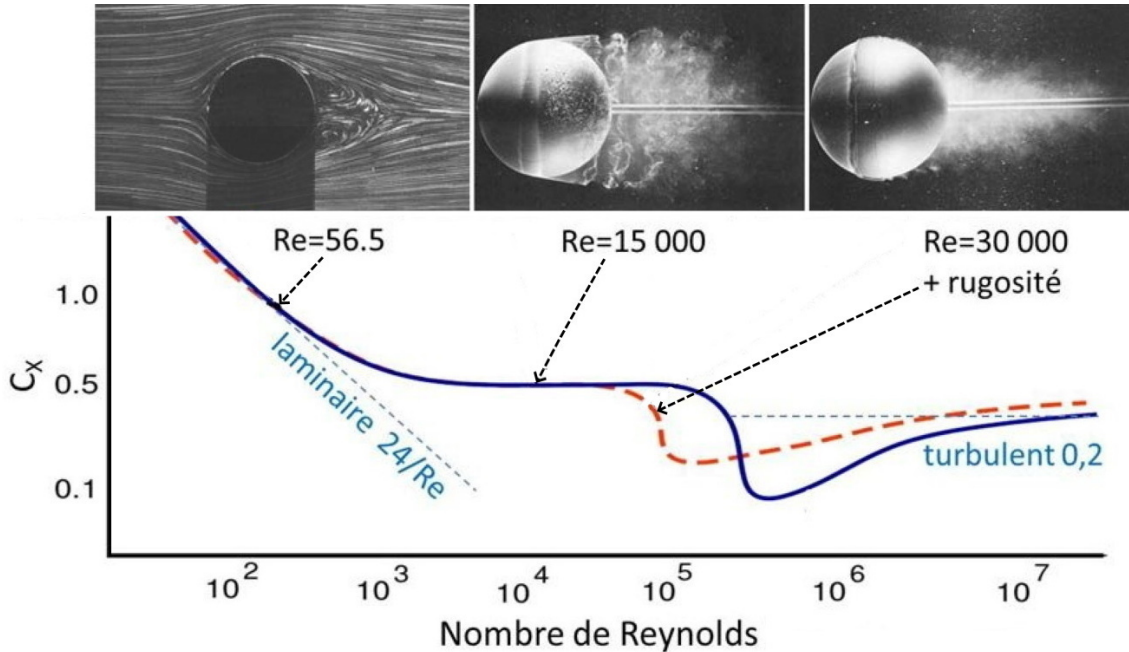


FIG. 3 : Sillages derrière une sphère [Encyclopédie Environnement]

La délimitation entre ces deux modèles est fixée par la valeur du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_{air} D_s v}{\mu_{air}} \quad (7)$$

qui dépend de la vitesse v de la sphère, de son diamètre D_s , de la masse spécifique de l'air ρ_{air} et de son coefficient de viscosité μ_{air} . Sachant que la vitesse maximum de la sphère est d'environ 0.6 [m/s] (2.2 [km/h]) et que pour l'air à 20°C, on a

$$\rho_{air} = 1.2 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \quad \mu_{air} = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ [kg/(m sec)]} \quad (8)$$

l'évaluation de Re pour le pendule de la heig-vd donne

$$Re \simeq 7'000. \quad (9)$$

Cette valeur étant sensiblement supérieure à la valeur ($Re \simeq 1'000$) délimitant les deux modèles de frottement, on admettra pour la suite que le module de la force de frottement est représenté par

$$F_f = -\lambda m \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right|. \quad (10)$$

Ainsi, le mouvement pendulaire entretenu est finalement décrit par l'équation

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{L} \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right| + \omega_0^2 \theta + \frac{\ddot{s}}{L} \theta = 0. \quad (11)$$

3 Pertes par frottement

On s'intéresse ici à la quantification de la force de frottement F_f ; plus précisément à la valeur du coefficient d'amortissement λ . Ce calcul repose sur l'évaluation des pertes énergétiques du pendule simple non entretenu.

3.1 Travail de freinage

Le travail de la force de frottement F_f est décrit ([1], p. 2) par

$$W_f = \int \vec{F}_f \cdot d\vec{l} = - \int F_f \cdot dl \quad (12)$$

dont la différentielle vaut

$$dW_f = -F_f dl = -F_f v dt = -F_f (-L\dot{\theta}) dt = F_f L \dot{\theta} dt. \quad (13)$$

Admettant que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse

$$F_f(t) = \lambda m \dot{\theta}^2(t), \quad (14)$$

il vient

$$dW_f = \lambda m L \dot{\theta}^3 dt. \quad (15)$$

3.2 Évaluation de λ

Comme le mouvement du pendule est périodique sinusoïdal, on a

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (16)$$

et sa vitesse est décrite par

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t). \quad (17)$$

Ce qui, pour une demi-période d'oscillation, donne un travail de freinage valant

$$\begin{aligned} W_{f,T/2} &= \lambda m L \int_0^{T/2} \dot{\theta}_0^3 dt \\ &= -\lambda m L (\omega_0 \theta_0)^3 \int_0^{T/2} \sin^3(\omega_0 t) dt \\ &= -\lambda m L \omega_0^2 \theta_0^3 \int_0^\pi \sin^3 x dx \end{aligned}$$

d'où

$$W_{f,T/2} = -\frac{4}{3} \lambda m L \omega_0^2 \theta_0^3 = -\frac{4}{3} \lambda m g \theta_0^3. \quad (18)$$

Considérant la perte d'énergie durant une demi-période, on a

$$\begin{aligned} mg z(t=0) + W_{f,T/2} &= mg z(t=T/2) \\ mgL (1 - \cos \theta(0)) + W_{f,T/2} &= mgL (1 - \cos \theta(T/2)) \\ \cos \theta(0) + \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \theta^3(0) &= \cos \theta(T/2) \end{aligned}$$

d'où

$$\theta(T/2) = \text{acos} \left(\cos \theta(0) + \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \theta^3(0) \right). \quad (19)$$

Ainsi, admettant a priori connaître λ , on peut itérativement évaluer l'amplitude de l'oscillation au cours du temps. Pour ce faire, après avoir choisi une valeur initiale de λ , on l'augmente progressivement jusqu'à ce que le nombre d'oscillations nécessaire pour passer de θ_0 à $\theta_0/2$ soit égal à $N_{demi} \equiv T_{demi} / (T_0/2)$.

Pour une amplitude initiale R_0 de 0.9 [m], on a mesuré $T_{demi} \simeq 61$ [mn]. Comme le pendule oscille avec une période $T_0 \simeq 9$ [sec], on voit que $N_{demi} = T_{demi} / (T_0/2) = 816$ demi-oscillations. Le code Matlab ci-dessous permet de chiffrer le coefficient de frottement quadratique

$$\lambda_{th} \simeq 0.41 \text{ [m]}. \quad (20)$$

```
% calcul du coeff de frottement quadratique
% paramètres du pendule
g = 9.81; L = 20; M = 19.45;
R0 = 0.9; Tdemi = 61*60;
theta0 = R0/L;
T0 = 2*pi*sqrt(L/g);
Ndemi = round(Tdemi/(T0/2));

% calcul itératif de lambda
lambda = 0.1; dlambda = 0.001; cpt = 0;
theta1 = theta0;
while (theta1 >= theta0/2)
    lambda = lambda + dlambda;
    theta1 = theta0;
    while (cpt < Ndemi)
        theta2 = acos(cos(theta1) + 4/3*lambda/L*theta1^3);
        theta1 = theta2;
        cpt = cpt + 1;
    end
end;
cpt_theta1_lambda = [cpt, theta1, lambda]
% cpt_theta1_lambda = 816, 0.022497, 0.408
```

3.3 Évolution de $R(t)$

La figure 4 illustre l'évolution de l'amplitude de l'oscillation au cours du temps. On y voit en particulier à quel point le frottement visqueux n'est pas adapté pour décrire le mouvement du pendule.

D'autre part, une analyse détaillée de l'évolution de l'amplitude ([1], annexe 4) montre que l'inverse de l'amplitude $R(t)$ varie linéairement avec le temps

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R(0)} + \frac{8}{3L^2T_0} \lambda t. \quad (21)$$

Un ajustement polynomial d'ordre 1 permet de trouver une valeur de λ basée sur l'ensemble des points mesurés plutôt que sur la seule valeur de T_{demi} . On trouve alors pour

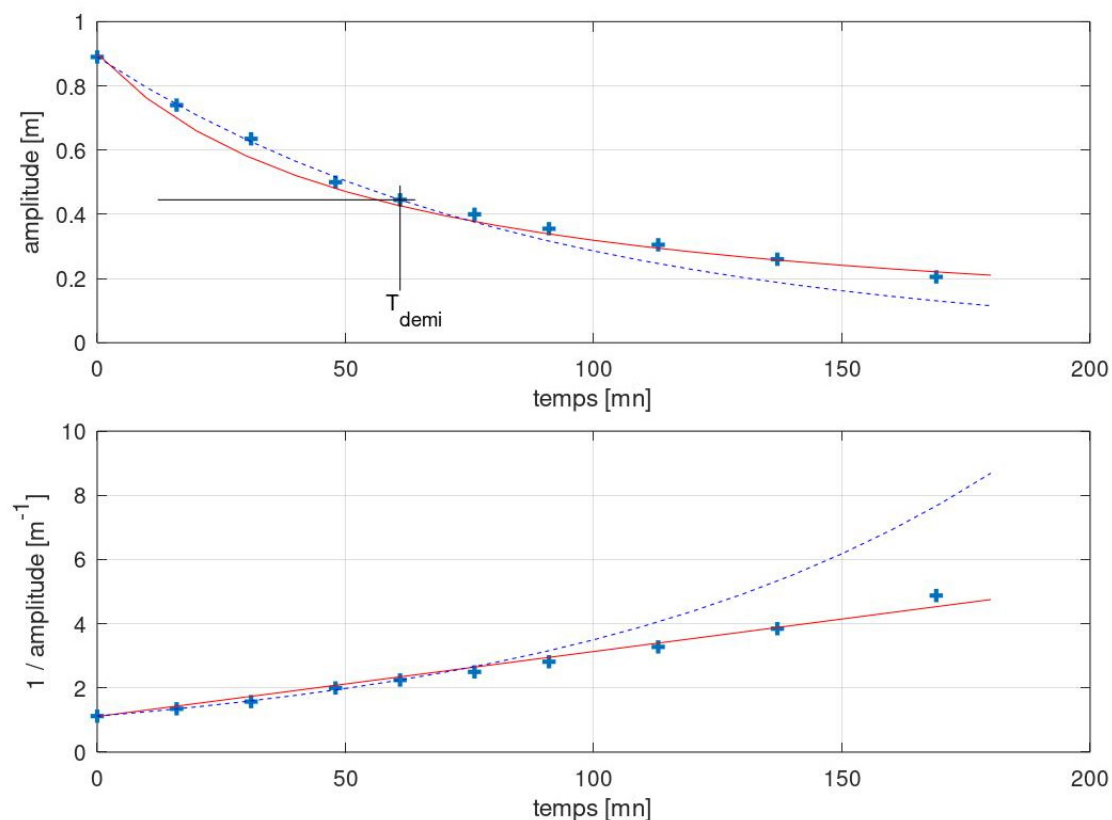


FIG. 4 : Evolution temporelle de l'amplitude : + + + mesures, — modèle en v^2 , - - - modèle en v

λ et R_0 des valeurs supérieures à celles obtenues par l'analyse théorique des pertes

$$\lambda_{exp} = 0.486 \text{ [m]} \quad \text{avec} \quad R_0 = 1.05 \text{ [m]}.$$

En fixant R_0 à sa valeur réelle (0.9m), le coefficient de frottement diminue légèrement et vaut

$$\lambda_{exp} = 0.454 \text{ [m]} \quad \text{avec} \quad R_0 = 0.9 \text{ [m]} \quad (22)$$

mais il reste 10% supérieur à la valeur théorique.

On notera que l'équation (21) permet d'obtenir une relation simple entre la durée T_{demi} et le coefficient de frottement λ

$$\lambda = \frac{3L^2}{8R_0} \frac{T_0}{T_{demi}}. \quad (23)$$

On constate ainsi que, contrairement aux systèmes à frottement visqueux, le temps caractéristique T_{demi} dépend du rayon initial R_0 et que leur produit est une constante

$$R_0 T_{demi} = \frac{3L^2}{8\lambda} T_0 \simeq 3'300 \text{ [m} \cdot \text{sec]}. \quad (24)$$

3.4 Coefficient de traînée

À ce stade, il est intéressant d'évaluer la valeur de λ à partir des coefficients de traînée généralement admis (fig. 5).

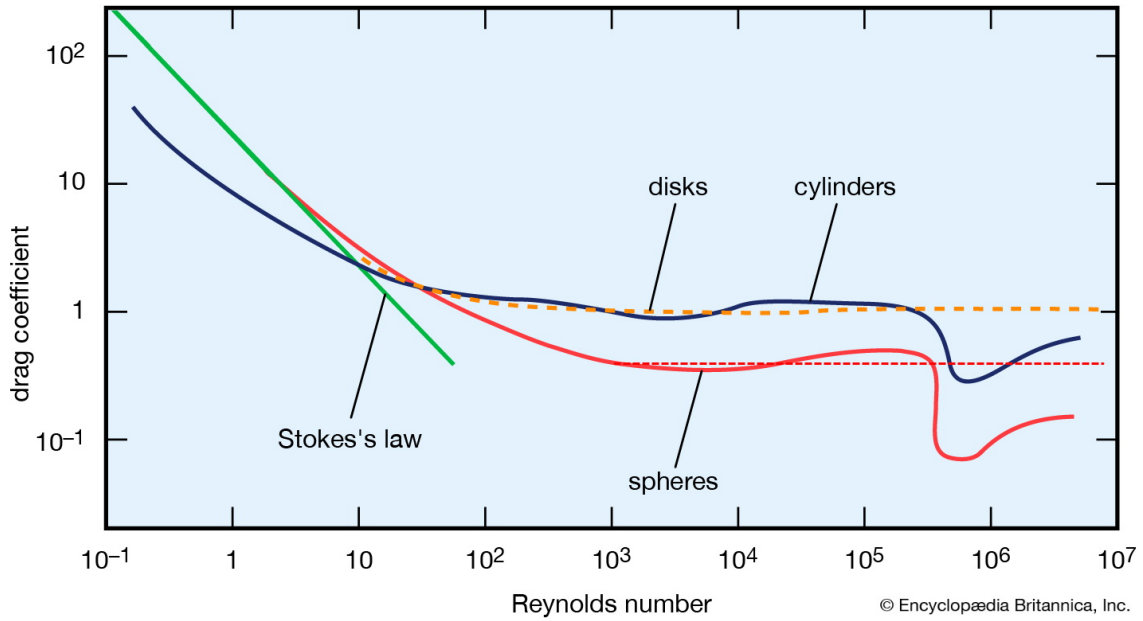


FIG. 5 : Coefficients de traînée en fonction du nombre de Reynolds

Lorsqu'un corps se déplace rapidement dans un fluide, il se voit opposé une force de frottement (la traînée) dépendant de sa section A_w et de sa forme représentée par le coefficient c_w ainsi que de la masse volumique ρ du fluide et de la vitesse de déplacement v à travers celui-ci.

Considérant la définition du coefficient de traînée

$$c_w \equiv \frac{|F_{tr}|}{F_{inertie}} \quad \text{avec} \quad F_{inertie} = \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 A_w, \quad (25)$$

on en déduit que la traînée est égale à la force d'inertie exercée par l'air multipliée par le coefficient de traînée. Dans le cas où plusieurs composants participent aux pertes par frottement (ici, la sphère, le cylindre de fixation du fil et le fil de suspension), la force de freinage vaut

$$\begin{aligned} |F_{tr}| &= c_w F_{inertie} = \sum_k c_k F_k \\ &= c_{sph} F_{sph} + c_{cyl} F_{cyl} + c_{fil} F_{fil} \\ &= \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 \left(c_{sph} A_{sph} + c_{cyl} A_{cyl} + c_{fil} \frac{A_{fil}}{3} \right). \end{aligned}$$

On notera que la section apparente du fil vaut $A_{fil}/3$ à cause de la variation linéaire de la vitesse le long de celui-ci. On en déduit l'expression générale de la force frottement causée par un mobile se déplaçant dans l'air

$$|F_{tr}| = \frac{1}{2} \rho_{air} v^2 \sum_k c_k A_k. \quad (26)$$

Considérant que les masses du cylindre et du fil sont négligeables par rapport à celle de la sphère, la force de frottement causée par le mouvement du pendule est décrite par

$$|F_f| \equiv \lambda m \dot{\theta}^2 = \lambda m \frac{v^2}{L^2}. \quad (27)$$

L'égalité de ces deux force permet d'évaluer la valeur de λ

$$\lambda_{Re} = \frac{\rho_{air}}{2} \frac{L^2}{m} \sum_k c_k A_k. \quad (28)$$

Pour un nombre de Reynolds compris entre 1000 et 100'000, les coefficients de traînée varient peu. Pour une sphère et un cylindre, ils valent environ 0.5 et 1.5, respectivement. Prenant en compte l'ensemble des valeurs numériques, on obtient

$$\lambda_{Re} \simeq 0.29[\text{m}]$$

qui est 25% inférieur à la valeur théorique 0.41 [m] et bien inférieur à la valeur expérimentale 0.45 [m].

3.5 Simulation vs mesures

La bonne concordance entre les mesures (fig. 6) et la résolution numérique de l'équation différentielle non-linéaire

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{L} \dot{\theta} \left| \dot{\theta} \right| + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (29)$$

confirme la qualité du modèle représentant le pendule libre. On notera également la relation de linéarité entre le temps et l'inverse de l'amplitude $R(t)$.

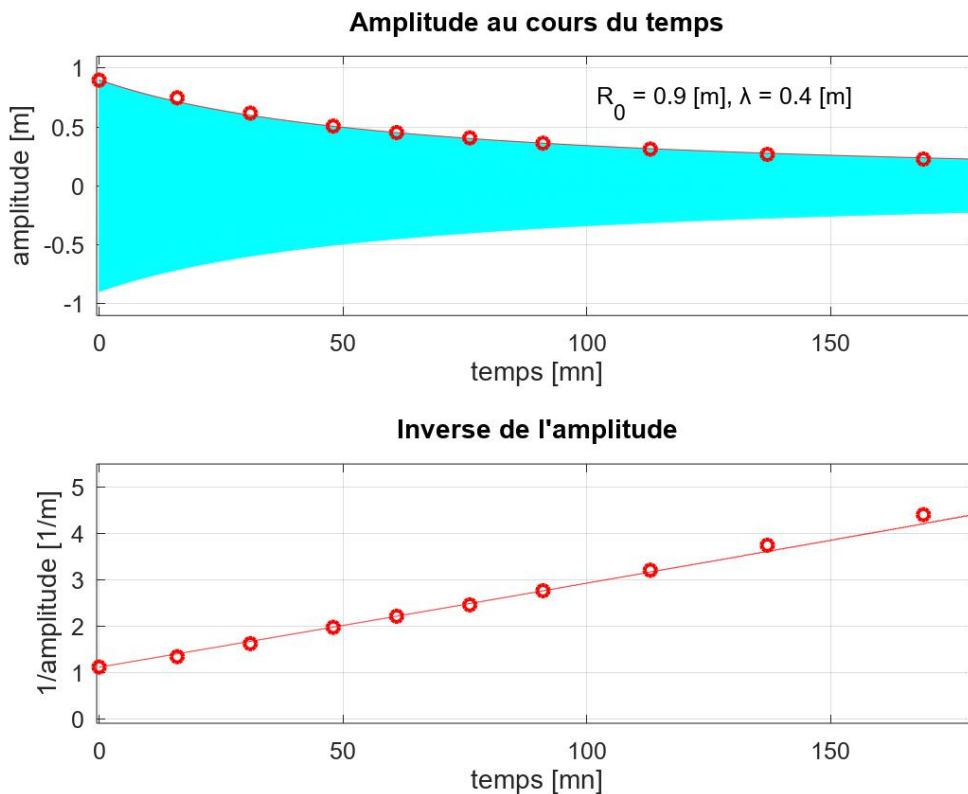


FIG. 6 : Simulation (—) et mesures (o) de l'évolution de l'amplitude du pendule libre

4 Pendule entretenu

Deux approches pour l'entretien du mouvement pendulaire sont retenues. L'une consiste à élever ou abaisser brusquement le point de suspension S du pendule aux moments opportuns alors que dans la deuxième, plus élaborée, on déplace sinusoidalement le point de suspension.

4.1 Approche simplifiée

On se propose ici de calculer le travail nécessaire à l'entretien du mouvement pendulaire en considérant que l'élévation se fait brusquement au moment du passage à la verticale du pendule et que l'abaissement du pendule se fait également brusquement aux extrémités de l'oscillation ([1], p. 4).

Lorsque le pendule passe en position verticale, sa vitesse est maximale et la tension T dans le fil est également maximale ; elle vaut alors

$$T_{max} = mg + m \frac{v^2}{L}. \quad (30)$$

Lorsque le pendule atteint l'une des deux position extrêmes ($\theta = \pm\theta_0$), la tension dans le fil est minimale et elle vaut

$$T_{min} = mg \cos \theta_0. \quad (31)$$

On comprend ainsi que le travail d'élévation est plus grand que le travail d'abaissement et que la différence est l'énergie fournie au pendule par le moteur qui entraîne le point de suspension S . Ce gain d'énergie sert à compenser la perte d'énergie causée par le freinage de l'air et, le cas échéant, à accroître l'amplitude de l'oscillation du pendule.

Considérant les énergies mises en cause pour une élévation et un abaissement brusques de la valeur pic-pic $2s_0$, on a

$$W_{el} = T_{max} \cdot 2s_0 = \left(mg + m \frac{v^2}{L} \right) \cdot 2s_0 \quad (32)$$

$$W_{ab} = T_{min} \cdot 2s_0 \cos \theta_0 = mg \cdot 2s_0 \cos^2 \theta_0 \quad (33)$$

$$\Delta W \equiv W_{el} - W_{ab} = |W_{f,T/2}| = \frac{4}{3} \lambda m L \omega_0^2 \theta_0^3. \quad (34)$$

De la conservation de l'énergie, on déduit

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgz = mgL (1 - \cos \theta_0) \quad (35)$$

d'où

$$\frac{v^2}{L} = 2g (1 - \cos \theta_0). \quad (36)$$

Partant de ces relations, on montre ([1], p. 4) que l'amplitude nécessaire au maintien de l'oscillation vaut

$$s_0 = \frac{2 \lambda \theta_0^3}{3 (3 - 2 \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0)}. \quad (37)$$

Ce qui, tenant compte des valeurs numériques proposées plus haut, donne une amplitude pour le déplacement du point de suspension valant

$$s_0 \simeq 6 \text{ [mm]}$$

On notera que cette valeur est certainement trop petite car le gain d'énergie réel est plus faible que ne le prévoit cette approche simplifiée en admettant une élévation et un abaissement brusques du point de suspension.

4.2 Excitation sinusoïdale

En réalité pour entretenir le mouvement du pendule, on préfère déplacer son point de suspension S en un mouvement vertical sinusoïdal synchronisé avec l'oscillation du pendule. On fera donc en sorte, grâce à un asservissement, que

- la vitesse d'élévation du point de suspension S soit maximale lorsque le pendule passe en position verticale ($\theta = 0$),
- la vitesse de descente du point de suspension S soit maximale lorsque le pendule passe par chacune de ses positions extrêmes ($\theta = \pm\theta_0$).

À partir des mouvements oscillants sinusoïdaux du pendule $\theta(t)$ et du point de suspension $s(t)$,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (38)$$

$$s(t) = -s_0 \sin 2\omega t, \quad (39)$$

on peut calculer les accélérations \ddot{x} et \ddot{y} de la masse du pendule ([1], p. 6) et en déduire que la tension T dans le fil de suspension vaut

$$T = mg \cos \theta + m\ddot{s} \cos \theta + mL \dot{\theta}^2$$

et également cette relation

$$\frac{T}{mg} = \cos(\theta_0 \cos \omega t) \cdot \left(1 + 4 \frac{s_0}{L} \sin 2\omega t\right) + \theta_0^2 \sin^2 \omega t. \quad (40)$$

qui sera utile à la section 6 pour estimer les variations de la longueur L du pendule dues à l'élasticité du fil.

4.3 Travail d'excitation

Le moteur déplaçant le point de suspension S effectue sur une demi-oscillation du pendule un travail donné par

$$W_{T/2} = \int_0^{T/2} \vec{T} \cdot \vec{ds} = \int_0^{T/2} T \cos \theta ds \quad (41)$$

avec

$$\theta = \theta_0 \cos x, \quad x = \omega_0 t, \quad dx = \omega_0 dt \quad (42)$$

$$\frac{ds}{dt} = -2\omega_0 s_0 \cos 2x, \quad ds = -2s_0 \cos 2x dx \quad (43)$$

$$T = mg \cos \theta + m\ddot{s} \cos \theta + mL \dot{\theta}^2. \quad (44)$$

Ce qui donne ([1], p. 7)

$$W_{T/2} = -2mgs_0 \int_0^\pi \cos 2x \cos \theta \left[\left(1 + 4\frac{s_0}{L} \sin 2x\right) \cos \theta + \theta_0^2 \sin^2 x \right] dx. \quad (45)$$

Le calcul numérique (fig. 7) de la valeur de cette intégrale se fait par la méthode de Simpson pour différentes valeurs de s_0 . En recherchant une valeur de s_0 telle que le travail d'excitation $W_{T/2}$ ci-dessus corresponde au travail de la force de freinage calculé plus haut (équ. 18)

$$W_{f,T/2} = -\frac{4}{3} \lambda mL \omega_0^2 \theta_0^3 \simeq -9.5 \cdot 10^{-3} \text{ [J]},$$

on trouve qu'une amplitude d'élévation de 8 mm environ est nécessaire pour compenser la perte d'énergie due au freinage par l'air.

```
% calcul du travail d'excitation
theta0 = 0.045;
s0 = 7e-3; ds = 0.1e-3;
Wf = 9.4586e-3; Wexc = 0;
while Wexc < Wf
    s0 = s0+ds;
    F_dW = @(x) -2*M*g*s0 * cos(2*x) .* cos(theta0*cos(x)) ...
        .* ((1 + 4*s0/L*sin(2*x)) .* cos(theta0*cos(x))...
        + (theta0*sin(x)).^2);
    Wexc = quad(F_dW,0,pi); % intégration de Simpson
end;
s0_Wf_Wexc = [s0, Wf, Wexc]
% s0_Wf_Wexc = 0.0078  0.0094586  0.0094648
```

FIG. 7 : Calcul du travail d'excitation

4.4 Diagramme gain–perte d'énergie

Dans la figure 8, on a reporté les énergies d'excitation et de freinage en fonction de l'amplitude d'oscillation R_0 pour différentes valeurs de frottement λ et d'excitation s_0 . Ce diagramme permet les observations suivantes ([1], p. 9) :

1. Les points de fonctionnement possibles se situent aux intersections des courbes énergétiques de perte (en rouge) avec celles de gain (en bleu).
2. Pour un coefficient de freinage $\lambda = 0.41$ et des excitations de 7, 8 et 9 mm, l'amplitude de l'oscillation vaudra environ 0.81, 0.92 et 1.04 m. On trouve ainsi qu'une variation de 1 mm de l'excitation conduit à une variation d'environ 10 cm de l'amplitude d'oscillation.
3. Autour d'un point donné, on remarque que la pente des courbes de perte est plus grande que celle de gain. Il en résulte que l'amplitude R_0 de l'oscillation autour d'un point de fonctionnement est stable.
Si une perturbation apparaît, l'amplitude θ_0 varie ; mais dès que la perturbation a disparu, l'amplitude tend à reprendre sa valeur initiale. Il n'est donc pas nécessaire

d'asservir l'amplitude d'excitation s_0 à celle du pendule θ_0 . Par contre, il est bien clair que le mouvement de suspension doit être synchronisé avec celui du pendule comme mentionné au début de la section 4.2.

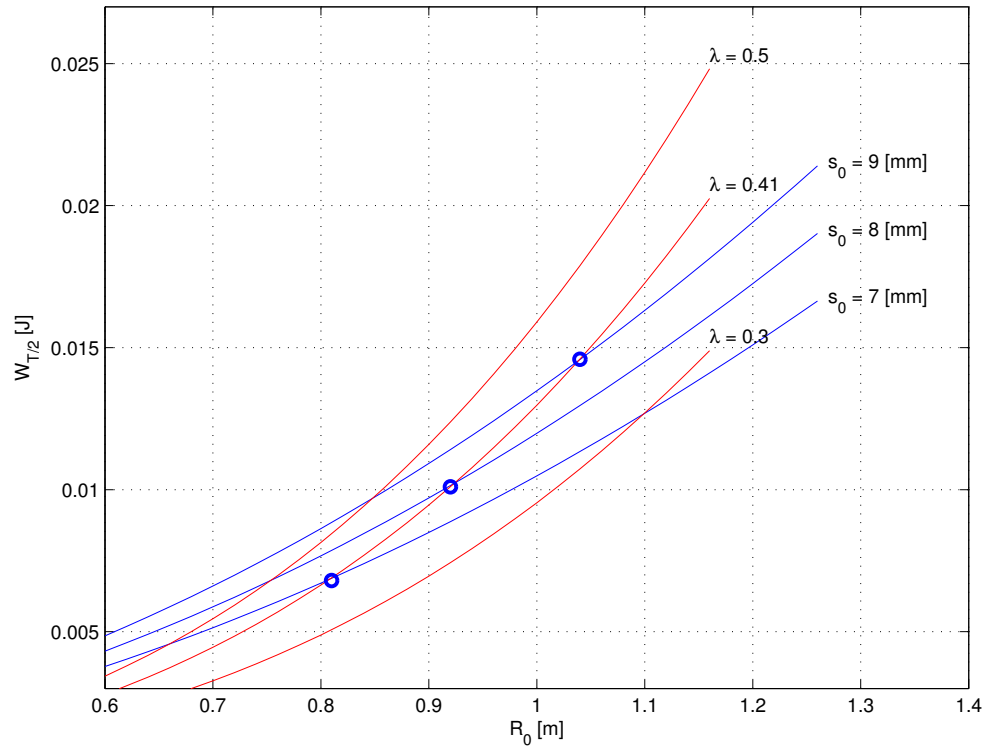


FIG. 8 : Graphe gain-perte d'énergie

4.5 Force de freinage proportionnelle à v

Dans l'analyse qui précède, on a considéré que la force de freinage était proportionnelle à v^2

$$F_f = \lambda m \dot{\theta}^2. \quad (46)$$

Comme, dans la pratique, il est fréquent d'admettre que la force est de type visqueux

$$F_v = c_v m \dot{\theta} \quad \text{avec} \quad c_v = \frac{2L}{t_{demi}} \ln 2 = 7.6 \cdot 10^{-3} \text{ [m/sec]}, \quad (47)$$

il est intéressant à ce stade d'analyser l'effet d'une telle force ([1], annexe 3). Dans un tel cas, le travail de freinage sur une demi-période vaut

$$W_{vf, T/2} = -\frac{\pi}{2} c_v m L \theta_0^2 \quad (48)$$

alors que le travail d'excitation est décrit par

$$W_{ve, T/2} = \pi m g s_0 \theta_0^2. \quad (49)$$

Comme ces deux travaux sont proportionnels à θ_0^2 , leurs graphes sont deux paraboles qui ne se croisent pas. Dans cette situation, en cas d'excitation permanente, il ne peut

pas y avoir d'état stationnaire ; l'amplitude du mouvement pendulaire croît ou décroît exponentiellement.

La frontière entre ces deux comportements est donnée par une valeur critique de l'excitation s_0 telle que

$$s_0^* = \frac{c_v}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} = 5.4 \text{ [mm]}. \quad (50)$$

5 Ellipticité de la trajectoire

Les imperfections de la construction du PF conduisent inévitablement à une trajectoire spatiale elliptique du pendule.

En 1835, George Biddell Airy, mathématicien et astronome britannique, a montré que le mouvement elliptique d'un pendule crée une précession dont la vitesse Ω_A est proportionnelle à l'aire de l'ellipse ($A = \pi a b$) ou à l'ellipticité b/a de celle-ci :

$$\Omega_A = \frac{3 \pi a b}{4 L^2 T_0} = \frac{3}{8} \omega_0 \frac{a^2}{L^2} \frac{b}{a} \quad (51)$$

où a et b sont, respectivement, les demi-grand et demi-petit axes de l'ellipse.

Les simulations numériques conduites par G. Derron ([1], annexe 9) montrent, comme on pouvait s'y attendre, que l'excitation paramétrique du PF diminue l'ellipticité de la trajectoire d'environ un facteur 2.

6 Influence de l'élasticité du fil

Pour les calculs qui suivent, on considère un fil de diamètre $d_{fil} = 1 \text{ [mm]}$ en acier ressort de haute résistance tel que

$$E_{ac} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ [N/mm}^2\text{]}. \quad (52)$$

La tension dans le fil d'acier est donné par la relation (40) :

$$\frac{T}{mg} = \cos(\theta_0 \cos \omega t) \cdot \left(1 + 4 \frac{s_0}{L} \sin 2\omega t\right) + \theta_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Le tracé de celle-ci (fig. 9) montre que la tension varie sinusoïdalement avec une amplitude inférieure à 0.3% du poids de la sphère de masse $m = 19.45 \text{ [kg]}$. On constate ainsi que l'allongement dû au poids de la sphère ([1], p. 11)

$$\Delta L = \frac{\sigma}{E_{ac}} L$$

est d'environ 23 mm et que les variations sont trop faibles pour être perceptibles.

Cependant, il reste intéressant de connaître la fréquence propre du système fil-masse où le fil agit comme un ressort linéaire de constante

$$k_{fil} = \frac{A E_{ac}}{L} = \pi \frac{d_{fil}^2}{4} \frac{E_{ac}}{L} = 8250 \text{ [N/m]}. \quad (53)$$

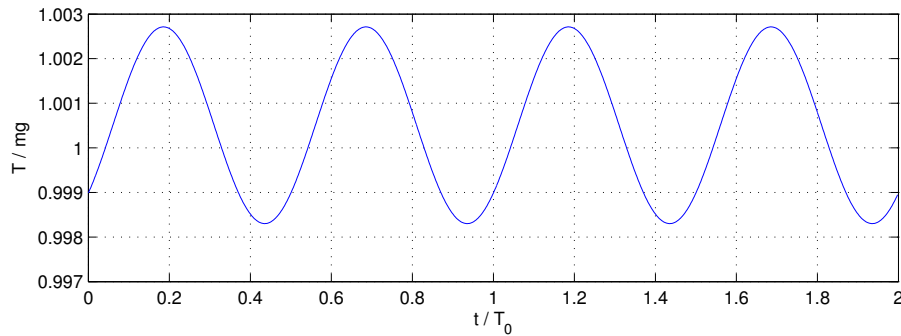


FIG. 9 : Tension dans le fil

La fréquence propre vaut alors

$$f_{fil} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.3 \text{ [Hz]}. \quad (54)$$

Comme elle est 30 fois supérieure à la fréquence propre du PF

$$f_{PF} = 0.11 \text{ [Hz]}, \quad (55)$$

on voit qu'elle ne perturbera aucunement le bon fonctionnement du système d'entretien du mouvement pendulaire.

7 Dispositif de suspension et anisotropie

Si l'on veut éviter que le fil de suspension ne casse après quelques heures d'oscillations, il faut supprimer toute flexion de celui-ci au niveau de sa fixation. Pour éviter cela, la suspension du pendule de la heig-vd est actuellement réalisée à l'aide de deux couteaux croisés qui suivent simplement l'orientation du fil au cours du temps. Cependant cette situation conduit à une anisotropie du système qui amène le pendule à avoir une précession propre indépendante de la rotation de la Terre et qui peut aller, si l'anisotropie est trop grande, jusqu'à masquer la précession naturelle du pendule.

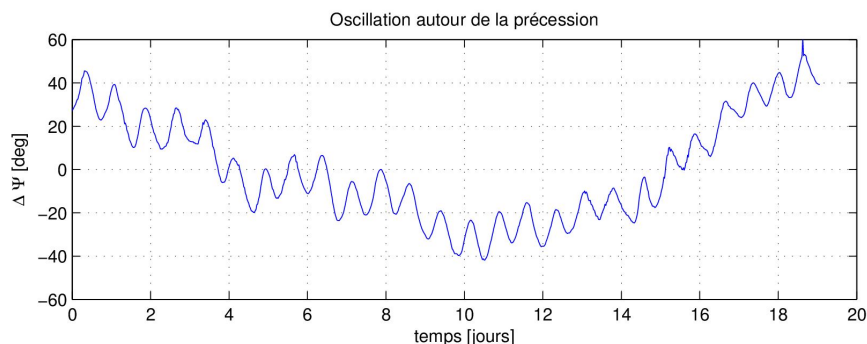


FIG. 10 : Variation de la précession

Ce phénomène a été mis en évidence en 1998 lors d'une mesure automatique de l'évolution du pendule à l'aide d'une caméra [2]. Cet enregistrement (fig. 10) effectué pendant

dix-neuf jours montre une oscillation lente et une oscillation rapide dont une estimation de la période donne environ $18.5j/26 = 0.71 j = 17 h$. Cette valeur coïncide avec la demi-période de la précession qui, à Yverdon-les-Bains ($\theta_L = 46^\circ 50'$), vaut

$$\frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\Omega_p} = \frac{\pi}{\Omega_{Terre} \sin\theta_L} = 16.4 [h] = 0.68 [\text{jour}].$$

On déduit que la précession naturelle du pendule est perturbée par une anisotropie vraisemblablement causée par les couteaux croisés.

Quant à la variation lente, il est difficile de se prononcer car la durée de l'enregistrement est insuffisante.

7.1 Suspension à ancrage rigide

Une telle situation peut être corrigée en remplaçant les couteaux croisés par une suspension où le fil du pendule serait ancré rigidement à la plateforme motorisée de la suspension. Des calculs de résistance de matériaux ([1], annexe 7) montrent qu'un fil en acier ressort à haute résistance de 3 à 5 mm de diamètre et d'une longueur de deux mètres environ est capable de résister sans rompre aux flexions successives. Avec cette modification très simple à mettre en oeuvre, l'anisotropie du système actuel devrait disparaître.

8 Conclusion

Cette étude a montré, par une approche simple et didactique, comment la juxtaposition de l'analyse et des moyens de calculs numériques permet d'évaluer quantitativement le comportement d'un système non linéaire. On a ainsi pu mettre en évidence combien il est important d'utiliser un modèle adéquat pour représenter les pertes par frottement.

9 Références

1. Derron Georges, Notes sur l'entretien des oscillations d'un pendule, Einev, juin 1995
2. Freddy Mudry, Description et fonctionnement du pendule de Foucault de la heig-vd, heig-vd, 2010

10 Liste des notes manuscrites (1995-1997) du Prof. Georges Derron

Notes

1. Equations du pendule / p. 1
2. Pendule idéal / p. 2
3. Pendule réel. Travail de freinage / p. 2

4. Entretien des oscillations / p. 4
5. Le pendule entretenu / p. 5
6. Equations du mouvement / p. 6
7. Travail d'excitation / p. 7
8. Diagramme Gain vs Perte d'énergie / p. 9
 - a) stabilité des oscillations / p. 9
9. Influence de l'élasticité du fil / p. 10
10. Fréquence propre du système fil – masse / p. 11
11. Régime transitoire / p. 12
 - a) méthode Gain – Perte d'énergie / p. 12
 - b) intégration numérique avec RGKF / p. 13
12. Régime permanent. Décomposition en série de Fourier / p. 15
 - a) avec équation différentielle approchée / p. 17
 - b) avec équation différentielle exacte / p. 21
 - c) comparaison / p. 26
13. Résumé / p. 27

Annexes

1. Le moment cinétique / p. 30
2. Résistance de l'air ; coefficient de traînée / p. 32
3. Forces de freinage proportionnelles à v et v^2 / p. 33
4. Détermination expérimentale du coefficient de freinage / p. 37
5. Série de Fourier de $y(x) = \pm \sin^2(x)$ / p. 42
6. Evaluation du projet, dimensionnement / p. 43
7. Suspension flexible pour le fil du pendule / p. 45
 - 7b. Suspension avec guide-fil
8. Oscillations du système "fil–masse" / p. 48
 - a) procédure de lancement / p. 50
 - b) liaison fil–masse / p. 51
9. Le pendule conique excité : précession et ellipticité / p. 56
10. Graphes No 1 à 39 / pp. 63 à 102