

Pendule de Foucault de la HEIG-VD

30 ans d'observation et d'analyse expérimentale
(1996-2026)



Freddy Mudry, prof. honoraire, HEIG-VD

Table des matières

1	Introduction	6
2	Description du pendule de la HEIG-VD	7
2.1	Paramètres du pendule de la HEIG-VD	7
2.2	Modèle d'un pendule simple	8
2.3	Entretien du mouvement	8
2.4	Un pendule dans le monde réel	9
3	Frottement non linéaire	10
3.1	Évolution du mouvement libre	11
3.2	Amplitude de l'oscillation entretenue	11
4	Force de Coriolis et précession du plan d'oscillation	12
5	Anisotropie, ellipticité et précession de l'ellipse	13
5.1	Anisotropie	13
5.2	Ellipticité et précession d'Airy	13
5.3	Ellipticité et résidus	14
5.4	Ellipticité et excitation paramétrique	15
5.5	Périodes associées au PF	16
6	Effet des marées	16
7	Quelques mesures au fil des ans	17
7.1	1995, 4 jours : Relevés manuels	17
7.2	1998, 19 jours : Précession, anisotropie et ellipticité	18
7.3	2011, 61 jours : Enregistrement comportant des erreurs	19
7.4	2023, 27 jours : Effet des couteaux-croisés	21
7.5	2023, 84 jours : Le plus long enregistrement	22
7.6	2024, 25 jours : Suspension rigide et jours manquants	23
7.7	Novembre 2025 : un enregistrement riche d'informations	24
7.8	Avril 2026 : effet de l'ensoleillement	28
8	Résumé des résultats expérimentaux	30
9	Simulation numérique	31
9.1	Intégration matricielle	31
9.2	Code Matlab	32
9.3	Extraction de l'angle de précession	33
9.4	Paramètres de l'ellipse	35
9.5	Effets de la force de Coriolis et de l'anisotropie	35
10	Conclusion	36

11 Annexes	38
11.1 Quelques pendules de Foucault	38
11.2 Amplitude et frottement quadratique	38
11.3 Paramètres d'une ellipse	40
11.4 Algorithme de Lomb-Scargle	41
11.5 Commande, motorisation et mesure de la position	44
11.6 Travaux de diplôme ou bachelor autour du PF	45
12 Le pendule de Foucault au Panthéon à Paris	46
12.1 Histoire du pendule de Foucault	48
Références	50

Abstract

The Foucault pendulum installed at HEIG-VD (Yverdon-les-Bains) has been the subject of regular measurements since its installation in 1995. This document presents an analysis of several experimental campaigns spanning from 1995 to 2025, with recording durations of up to 3 months and distinct suspension configurations. The collected data make it possible to quantify deviations from the ideal model by identifying slow modulations superimposed on the mean precession trend.

The analysis of the time series is based on a separation between the mean precession and the residual fluctuations, as well as on frequency analyses using the Fourier transform and the Lomb–Scargle periodogram. The latter method proves particularly well-suited to the study of long time series with sampling irregularities and characteristic times differing by several orders of magnitude (from a few seconds to several days).

The replacement of the cross-blades in 2024 with a rigid suspension resulted in more stable precession closer to the theoretical value, strongly supporting the interpretation that suspension anisotropy was a major contributor.

The records from 2011 and 2025 are particularly interesting. The first because of missing or erroneous values. The second because of the irregular behavior of the Foucault pendulum and the demonstration of its sensitivity to its environment.

This work highlights the scientific and educational value of instrumented Foucault pendulums over long periods. It suggests that beyond the classic demonstration of Earth's rotation, these devices serve as a sensitive laboratory for studying slightly non-ideal systems and long-term cumulative phenomena.

The HEIG-VD Foucault pendulum, with its 20-meter length and parametric maintenance system, falls into the category of medium-sized pendulums comparable to those at the United Nations Headquarters in New York (23 m) or the Science Museum in London (20 m). The uniqueness of this apparatus lies in the continuity of its observations over three decades and in the evolution of its successive mechanical configurations.

© 2026, Freddy Mudry

This document is made available under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY-NC-ND 4.0) License

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

- No commercial use

- No modifications

The PDF file can be downloaded from zenodo.org :

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19051139>

26.06.2026

Résumé

Le pendule de Foucault installé à la HEIG-VD (Yverdon-les-Bains) a fait l'objet de mesures régulières depuis son installation en 1995. Ce document présente l'analyse de plusieurs campagnes expérimentales s'étendant de 1996 à 2026, avec des durées d'enregistrement allant jusqu'à 3 mois et des configurations de suspension distinctes. Les données recueillies permettent d'étudier la précession du plan d'oscillation au-delà du modèle idéal en mettant en évidence des modulations lentes superposées à la tendance moyenne attendue.

L'exploitation des séries temporelles repose sur une séparation entre la précession moyenne et les fluctuations résiduelles, ainsi que sur des analyses fréquentielles par transformée de Fourier et par périodogramme de Lomb–Scargle. Cette dernière méthode s'avère particulièrement adaptée à l'étude de séries longues comportant des irrégularités d'échantillonnage et des temps caractéristiques différant de plusieurs ordres de grandeur (de quelques secondes à plusieurs jours).

Le remplacement des couteaux-croisés en 2024 en faveur d'une suspension rigide a entraîné une précession plus stable et plus proche de la valeur théorique, confirmant expérimentalement l'importance de l'anisotropie de suspension dans les écarts observés.

Les enregistrements de 2011, 2025 et 2026, sont particulièrement intéressants. Le premier par les valeurs manquantes ou erronées ; le deuxième par le comportement irrégulier du pendule et le troisième par la mise en évidence de sa sensibilité à son environnement.

Ce travail met en lumière l'intérêt scientifique et pédagogique des pendules de Foucault instrumentés sur de longues durées. Il suggère qu'au-delà de la démonstration classique de la rotation terrestre, ces dispositifs constituent un laboratoire sensible pour l'étude des systèmes faiblement non idéaux et des phénomènes cumulatifs à long terme.

Le pendule de Foucault de la HEIG-VD, avec sa longueur de 20 m et son système d'entretien paramétrique, se situe dans la catégorie des pendules de taille moyenne comparables à ceux du quartier général des Nations-Unies à New-York (23 m) ou du Science Museum à Londres (20 m). L'originalité de ce dispositif réside dans la continuité de ses observations sur trois décennies et dans l'évolution de ses configurations mécaniques successives.

© 2026, Freddy Mudry

Ce document est mis à disposition selon les termes de la
Licence Creative Commons Attribution (CC BY-NC-ND 4.0)

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

- Pas d'utilisation commerciale

- Pas de modification

Le fichier pdf est téléchargeable depuis le site zenodo.org :

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19051139>

26.06.2026

Le pendule de Foucault de la HEIG-VD : analyse et mesures

1 Introduction

Depuis sa première démonstration publique au Panthéon de Paris en 1851, le pendule de Foucault constitue l'une des expériences les plus spectaculaires et les plus directes de la rotation de la Terre. Dans son principe idéal, la vitesse de précession du plan d'oscillation ne dépend que de la latitude du lieu d'observation et de la vitesse de rotation terrestre. Toutefois, dans toute réalisation expérimentale réelle, cette dynamique simple se trouve inévitablement perturbée par l'influence de l'environnement et par l'anisotropie de la suspension qui conduit à l'ellipticité du mouvement.

Le pendule de Foucault installé à la HEIG-VD à Yverdon-les-Bains offre un terrain d'étude particulièrement riche. Depuis son installation en 1995, ce dispositif a fait l'objet de plusieurs campagnes de mesures s'étendant sur des durées allant de quelques jours à plusieurs dizaines de jours, avec des configurations mécaniques successives : suspension à couteaux-croisés neufs, suspension dégradée par l'usure, puis suspension rigide introduite en 2024. Cette continuité expérimentale sur près de trente ans permet d'aborder le pendule de Foucault non seulement comme une démonstration pédagogique, mais comme un véritable système dynamique faiblement perturbé, sensible à des effets cumulatifs à long terme.

L'objectif de ce document est double. D'une part, il s'agit de caractériser quantitativement la précession observée et sa stabilité dans le temps, en distinguant la tendance moyenne des modulations superposées. D'autre part, l'étude vise à analyser l'origine de ces modulations à différentes échelles temporelles, en particulier celles liées à la précession, à l'anisotropie de la suspension et aux conditions environnementales.

L'exploitation de séries temporelles acquises sur plusieurs jours a nécessité le recours à des méthodes d'analyse appropriées, notamment le périodogramme de Lomb–Scargle, qui permet d'extraire les composantes fréquentielles de signaux irrégulièrement échantillonnés ou présentant des lacunes. Cette méthode est particulièrement adaptée à l'étude de phénomènes caractérisés par des échelles de temps très différentes, allant des fluctuations rapides (quelques minutes) aux variations lentes observées sur plusieurs jours.

Au-delà des valeurs numériques obtenues, ce travail met en évidence le comportement du pendule réel comme un système intégrateur à mémoire longue, dans lequel de faibles imperfections mécaniques ou environnementales peuvent s'accumuler sur plusieurs périodes de précession et générer des modulations mesurables.

L'étude comparative des différentes configurations mécaniques, en particulier l'introduction récente d'une suspension rigide, permet enfin d'isoler expérimentalement le rôle de l'anisotropie et de mieux comprendre les conditions d'approche du comportement idéal du pendule de Foucault.

Le présent document constitue un rapport d'analyse et d'archive sur le pendule de Foucault de la HEIG-VD. Certaines interprétations proposées reposent sur des indices expérimentaux plausibles mais ne doivent pas être considérées comme des démonstrations définitives.

2 Description du pendule de la HEIG-VD

Peu avant la réalisation du pendule de Foucault de la HEIG-VD, Georges Derron, professeur à l'Einev, a fait une analyse détaillée du fonctionnement d'un pendule dont le mouvement est entretenu par l'élévation périodique de son point de suspension [2].

Cette étude, suivie par plusieurs travaux de diplôme, a permis la réalisation d'un pendule qui fonctionne depuis plus de 30 ans.

Réalisation 1995 Le pendule est relié par un câble à deux couteaux-croisés supportés par un contrepoids et le tout est entraîné par un moteur à courant continu sans balai. Ce système est placé sous le toit de la HEIG-VD au-dessus de sa cage d'escalier.

Vingt mètres plus bas, la sphère de laiton à laquelle est fixé un petit aimant oscille au-dessus d'une bobine. Celle-ci capte les instants de passage du pendule et fournit le signal à un système électronique qui le met en forme avant d'envoyer les impulsions de synchronisation par faisceau infra-rouge vers l'électronique de commande du moteur.

Au fil des ans, plusieurs améliorations ont été apportées mais, surtout, en 2024, la suspension à couteaux-croisés est remplacée par un fil rigidement fixé à la plateforme équipée d'une nouvelle motorisation et un nouveau système de vision avec une précision inférieure au centimètre.

2.1 Paramètres du pendule de la HEIG-VD

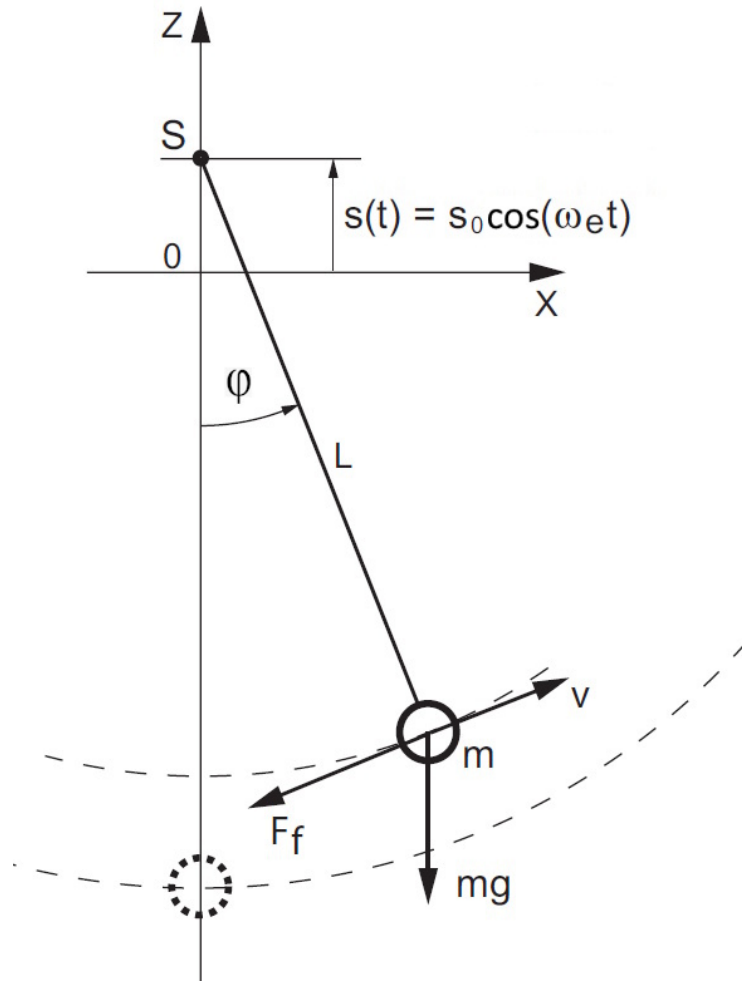
Dans ce qui suit, on sera amené à quantifier certains calculs. On le fera à partir des mesures relevées sur le pendule de la HEIG-VD, à savoir :

- sa longueur $L = 20$ m,
- sa masse $m = 19.45$ kg,
- le diamètre de la sphère $D_s = 16.6$ cm,
- le diamètre $d_{cyl} = 2$ cm et la longueur $l_{cyl} = 10$ cm de la pince de serrage,
- le diamètre du fil de suspension $d_{fil} = 1$ mm,
- le rayon de lancement $R_0 \simeq 1$ m,
- le déplacement vertical périodique de la masse $s_0 \simeq 2$ cm,
- le temps $t_{demi} = 61$ mn, durée correspondant à une réduction, en régime libre, d'un facteur 2 de l'amplitude de l'oscillation.

De ces valeurs, on déduit la pulsation propre ω_0 , la période d'oscillation T_0 et le facteur de qualité du pendule Q_0 en admettant une force de frottement linéaire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 0.7 \text{ [rad/sec]}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 9 \text{ [sec]} \quad (1)$$

$$Q_0 = \frac{\pi}{\ln(2)} \frac{t_{demi}}{T_0} = 1'850 \quad (2)$$

FIG. 1 : Pendule dans le plan Oxz

2.2 Modèle d'un pendule simple

Considérant le pendule de la figure 1 dont le point de suspension S oscille verticalement selon l'axe Oz avec une excitation $s(t)$, on montre que le mouvement pendulaire est décrit par l'équation suivante

$$mL^2 \ddot{\varphi} + mL \ddot{s} \sin \varphi = -mgL \sin \varphi - F_f L.$$

En simplifiant par mL^2 , cela donne

$$\ddot{\varphi} + \frac{F_f}{mL} + \frac{g}{L} \sin \varphi + \frac{\ddot{s}}{L} \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Pour de petits angles, on obtient l'équation du mouvement de la masse du pendule simple

$$\ddot{\varphi} + \frac{F_f}{mL} + \frac{g}{L} \varphi + \frac{\ddot{s}}{L} \varphi = 0. \quad (4)$$

2.3 Entretien du mouvement

L'entretien du mouvement se fait en soulevant le pendule en synchronisme avec son oscillation à une fréquence double

$$s(t) = s_0 \cos(2\omega_0 t). \quad (5)$$

L'accélération associée à ce mouvement vaut alors

$$\ddot{s}(t) = -4 s_0 \omega_0^2 \cos(2 \omega_0 t)$$

et elle vient naturellement s'ajouter à l'accélération terrestre g

$$\ddot{\varphi} + \frac{F_f}{mL} + \frac{1}{L} (g - 4 s_0 \omega_0^2 \cos(2 \omega_0 t)) \varphi = 0. \quad (6)$$

Cette légère variation de gravité permet de compenser les pertes causées par les frottements.

En comparant l'énergie injectée par le pivot à l'énergie dissipée par les frottements sur un cycle complet, on peut estimer l'amplitude nécessaire pour vaincre les frottements.

Dans le cas d'un frottement linéaire, on montre que l'élévation du pendule doit être supérieure à L/Q_0 , soit 1 cm. Alors, l'amplitude augmente de manière exponentielle et il faut introduire un contrôle de celle-ci en agissant sur l'amplitude s_0 .

Si le frottement est non-linéaire, d'ordre 2, l'amplitude atteint un point d'équilibre où les pertes sont compensées par l'énergie injectée au point de suspension.

2.4 Un pendule dans le monde réel

Le modèle idéal constitue une approximation utile mais insuffisante pour décrire correctement l'évolution du PF. Il faut donc y ajouter les effets causés par

- un frottement non linéaire (quadratique),
- la force de Coriolis qui entraîne la rotation du mouvement dans le plan Oxy à la vitesse Ω_F ,
- l'anisotropie du point de suspension qui transforme le mouvement rectiligne en une oscillation elliptique qui précessionne avec sa propre vitesse Ω_{anis} dans le plan Oxy ,
- la modification de l'orientation et de la valeur de l'accélération terrestre \vec{g} causée par les marées.

Les trois derniers effets sont cumulatifs. Ils peuvent donc être analysés séparément mais pas avec la même échelle temporelle car leurs temps caractéristiques sont extrêmement différents. Ces phénomènes rendent la simulation délicate car ils imposent des incréments temporels ($\Delta t \simeq T_k/100$) très différents :

- le pendule oscille avec une période $T_0 = 9$ sec, donc $\Delta t = 0.1$ sec,
- la décroissance de l'oscillation est caractérisée par le temps $T_{demi} \sim 1$ h, donc $\Delta t = 30$ sec
- le pendule précessionne avec une période $T_F = 33$ h, donc $\Delta t = 20$ mn,
- les marées ont des périodes qui se mesurent en jours et en mois, donc 15 mn $\leq \Delta t \leq 8$ h.

Des mesures conduites au fil des ans (section 7), on retiendra les valeurs indicatives suivantes

1. l'ondulation autour de la droite de précession (résidus)

$$\Delta\theta \sim \pm 5^\circ,$$

2. l'ellipticité

$$\varepsilon_{ell} = \frac{b}{a} \sim \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 2\%,$$

3. le taux d'anisotropie

$$\delta \sim 1 \cdot 10^{-4}$$

4. l'excitation paramétrique

$$\chi_{prm} = \frac{s_0}{L} \sim \frac{1 \text{ cm}}{20 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-4}$$

5. le temps

$$t_{demi} \sim 60 \text{ mn pour } R_0 = 1 \text{ m}$$

6. le coefficient de frottement quadratique

$$\gamma_2 = \frac{8}{3 R_0} \frac{T_0}{t_{demi}} \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

3 Frottement non linéaire

L'évolution du pendule libre (fig. 2a) permet d'évaluer le type de frottement auquel est soumis le pendule. Et l'ajustement expérimental favorise un modèle de frottement quadratique par rapport à un modèle purement visqueux. Ce qui conduit à une décroissance hyperbolique (fig. 2b) et non exponentielle comme attendu pour un système linéaire.

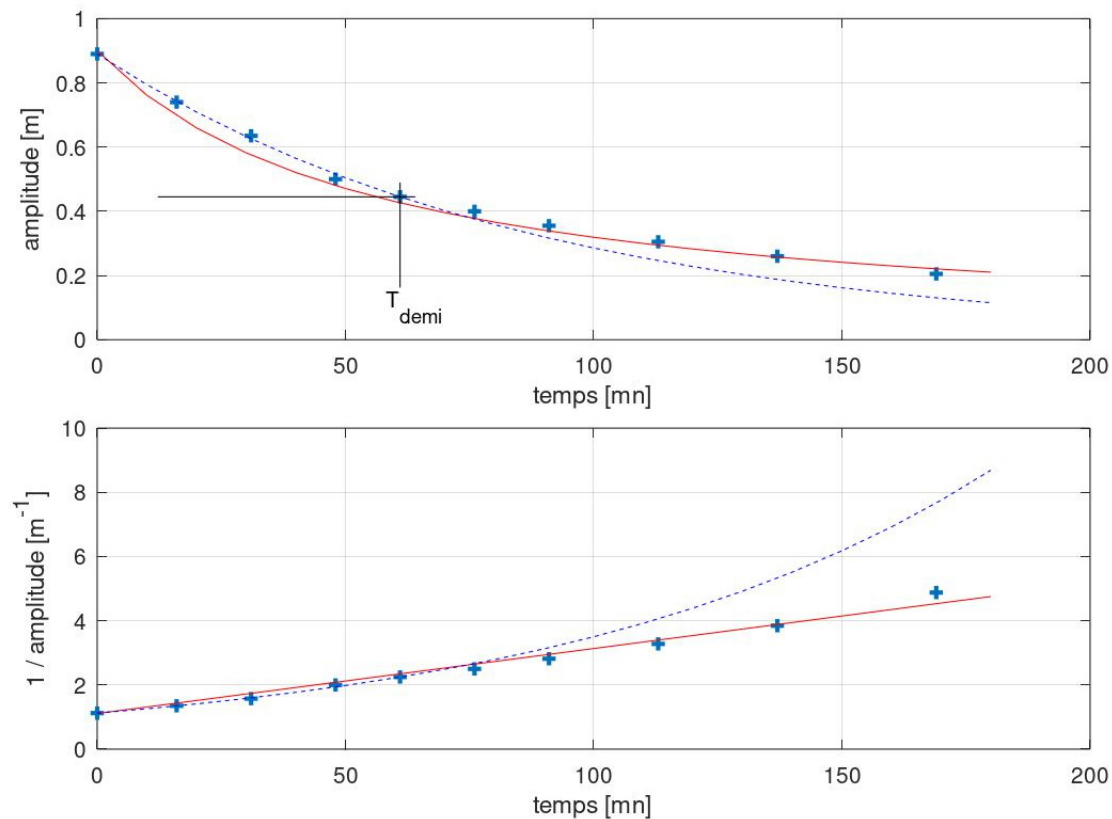


FIG. 2 : Évolution du PF libre : mesures (+ +), frottement quadratique (rouge), frottement visqueux (noir)

Ce frottement non linéaire est confirmé par la valeur du nombre de Reynolds Re qui dépend de la vitesse v de la sphère, de son diamètre D_s , de la masse spécifique de l'air ρ_{air} et de son coefficient

de viscosité μ_{air} :

$$Re = \frac{\rho_{air} D_s v_{max}}{\mu_{air}} \simeq 7'000. \quad (7)$$

Cette valeur étant sensiblement supérieure à celle délimitant les deux modèles de frottement ($Re \simeq 1'000$), on admettra pour la suite que la force de frottement exercée sur la sphère selon les axes Oxy est représentée par

$$F_{f,x,y} = -\gamma_2 m |v| v_{x,y}. \quad (8)$$

3.1 Évolution du mouvement libre

Une analyse détaillée de l'évolution de l'amplitude ([2], annexe 4) montre que

1. l'inverse de l'amplitude $R(t)$ varie linéairement avec le temps

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R(0)} + \frac{8}{3T_0} \gamma_2 t \quad (9)$$

2. le produit $R_0 t_{demi}$ est pratiquement constant

$$R_0 t_{demi} = \frac{3T_0}{8\gamma_2} \simeq 1 [m \cdot h] = 3'600 \text{ m}\cdot\text{s} \quad (10)$$

3. le coefficient de frottement γ_2 est déterminé par

$$\gamma_2 = \frac{3}{8} \frac{T_0}{R_0 t_{demi}} = 1.02 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}. \quad (11)$$

Un ajustement polynomial d'ordre 1 permet de trouver une valeur du coefficient γ_2 basée sur l'ensemble des points mesurés

$$\gamma_2 \simeq 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \quad \text{avec} \quad R_0 = 0.9 \text{ m}. \quad (12)$$

3.2 Amplitude de l'oscillation entretenue

Dans la section 11.2, on montre que, pour un frottement quadratique de la forme $F_f = m \gamma_2 v^2$, l'énergie dissipée par cycle est proportionnelle au cube de l'amplitude A de l'oscillation alors que l'énergie fournie est proportionnelle à son carré et à l'amplitude de l'excitation s_0

$$W_f = \frac{8m}{3} \gamma_2 A^3 \frac{g}{L}, \quad W_s = \pi m g s_0 \left(\frac{A}{L} \right)^2. \quad (13)$$

Comme elles sont égales à l'équilibre, on obtient

1. l'amplitude de l'oscillation

$$A = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\gamma_2} \frac{s_0}{L} = 0.9 \text{ m} \quad (14)$$

2. l'amplitude de l'élévation

$$s_0 = \frac{L}{\pi} \frac{T_0}{t_{demi}} = 1.56 \text{ cm} \quad (15)$$

3. le gain de l'oscillateur

$$G = \frac{A}{s_0} = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\gamma_2 L} = 57.7. \quad (16)$$

Le système agit donc comme un amplificateur paramétrique : une excitation verticale de 2 cm suffit à maintenir une oscillation horizontale proche du mètre.

4 Force de Coriolis et précession du plan d'oscillation

La force de Coriolis est une force inertielle agissant perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un milieu lui-même en rotation uniforme, tel que vu par un observateur partageant le même référentiel. C'est une force inertielle apparente dans le référentiel terrestre.

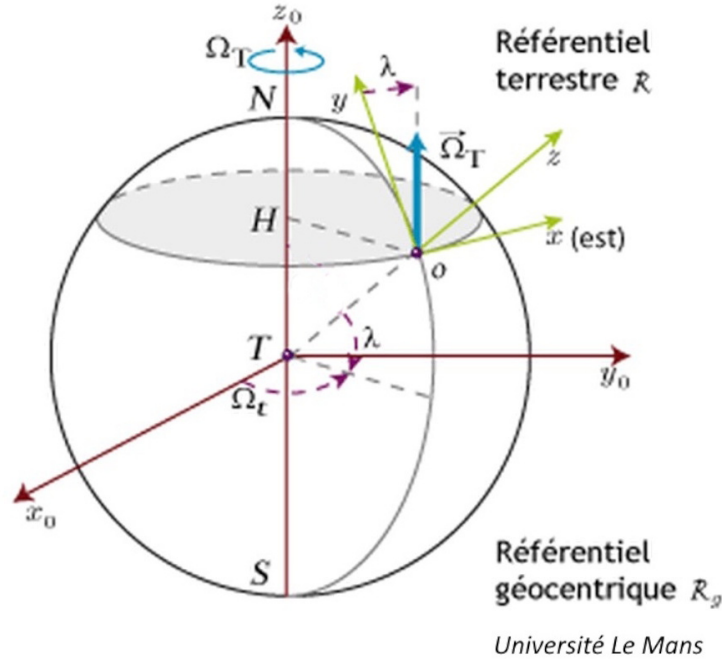


FIG. 3 : Référentiels terrestre et géocentrique

La force de Coriolis se calcule simplement via le produit vectoriel de deux vitesses : celle de la rotation de la Terre en un lieu défini par sa latitude et celle du pendule

$$\vec{F}_c = -2m \vec{\Omega}_{lat}(t) \wedge \vec{v}(t). \quad (17)$$

Dans le cas du PF oscillant dans le plan Oxy , l'accélération de Coriolis ressentie par le pendule vaut

$$\vec{a}_c = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{lat} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -\Omega_{lat} \cdot v_y \\ +\Omega_{lat} \cdot v_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

et les équations du pendule s'écrivent

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2 \Omega_{lat} \dot{y} \quad (19)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2 \Omega_{lat} \dot{x} \quad (20)$$

Pour Yverdon, situé sur la latitude $\lambda = 46.8^\circ$, la vitesse et la période de précession valent

$$\Omega_{lat} = \Omega_T \sin(\lambda) = \frac{2\pi}{23 \text{ h } 56 \text{ mn}} 0.729 = 5.32 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (21)$$

$$T_{lat} = \frac{2\pi}{\Omega_{lat}} = 32.8 \text{ h} = 1.37 \text{ jour.} \quad (22)$$

Les écarts mesurés autour de cette valeur constituent précisément l'objet de cette étude.

Le pendule de la HEIG-VD long de 20 m oscille avec une amplitude A d'environ 1 m. Ce qui conduit à une vitesse

$$v_{max} = \omega_0 \cdot A = \frac{2\pi}{T_0} A \simeq 0.7 \text{ m/s}$$

et une accélération de Coriolis maximum

$$a_{c,max} = 2 \Omega_{lat} v_{max} \simeq 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2 \sim 10^{-5} g. \quad (23)$$

On voit que celle-ci est très inférieure à g mais suffisante pour entraîner le plan d'oscillation à raison d'un tour parcouru en 33 heures.

5 Anisotropie, ellipticité et précession de l'ellipse

5.1 Anisotropie

Dans un pendule réel, la suspension n'est jamais parfaitement isotrope. Pour la suite, on admettra une faible anisotropie qui peut être modélisée, au premier ordre, par une légère modification de la pulsation naturelle du PF selon les axes Ox et Oy

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L} \cdot (1 + \delta_x) x, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{L} \cdot (1 + \delta_y) y \quad (24)$$

où les taux d'anisotropie $\delta_{x,y}$ sont très petits ; par exemple $\delta_x = 0.0002$ et $\delta_y = -\delta_x = -0.0002$. Les pulsations causées par ceux-ci valent alors

$$\omega_{x,y} = \omega_0 \sqrt{1 \pm \delta} \simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{\delta}{2} \right) \Rightarrow \Delta\omega = \omega_x - \omega_y = \delta \omega_0. \quad (25)$$

La différence de pulsation $\Delta\omega$ créée par l'anisotropie introduit un battement sur le déplacement du grand axe de l'ellipse dont la période vaut

$$T_{anis} \simeq \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\delta \omega_0} = \frac{T_0}{\delta} \quad (26)$$

et, comme attendu, T_{anis} est d'autant plus grand que l'anisotropie est faible.

La figure 4 illustre les effets de l'anisotropie (ici, choisie très forte) sur le mouvement du PF. Il faut noter que cette oscillation quasi-elliptique ne se referme pas sur elle-même : le plan de l'ellipse tourne lentement dans le référentiel inertiel et crée ainsi une précession Ω_{anis} qui vient s'ajouter à la précession terrestre Ω_{lat} .

Pour la suite, comme l'anisotropie est très faible, on admettra que l'évolution du pendule pendant une période forme une ellipse dont on peut mesurer les axes a et b (section 11.3) pour en déduire l'ellipticité définie comme suit

$$\epsilon \equiv \frac{b}{a}. \quad (27)$$

5.2 Ellipticité et précession d'Airy

En 1835, George Biddell Airy, mathématicien et astronome britannique, a montré que le mouvement elliptique d'un pendule crée une précession dont la vitesse Ω_A est proportionnelle à l'aire de l'ellipse ($A = \pi a b$) ou au rapport de ses axes b/a [7]

$$\Omega_A = \frac{3 \pi a b}{4 T_0 L^2} = \frac{3 \pi}{4 T_0} \frac{a^2}{L^2} \frac{b}{a}. \quad (28)$$

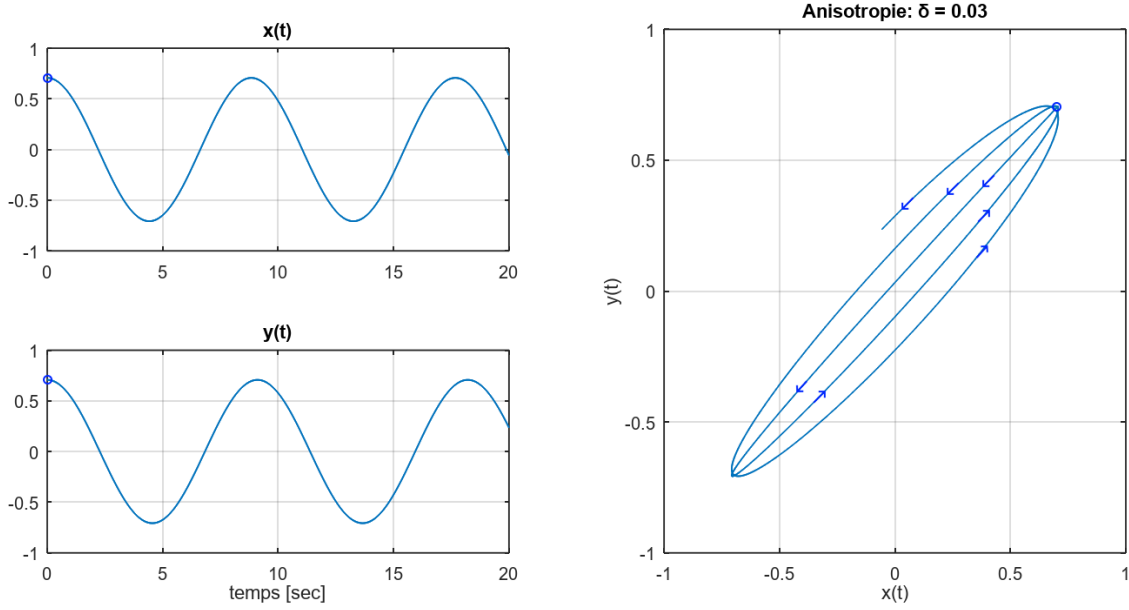


FIG. 4 : L'anisotropie transforme l'oscillation du PF en une ellipse qui tourne dans le plan Oxy

Ce résultat est particulièrement intéressant car, les paramètres du pendule étant connus, une mesure de l'ellipticité fournit une estimation de la contribution anisotrope à la précession.

Les mesures faites sur le PF de la HEIG-VD montrent que $b/a \sim 2\%$; ce qui conduit à une précession d'Airy d'environ 2 deg/h ; seulement 4 fois inférieure à la précession de Coriolis.

5.3 Ellipticité et résidus

Afin d'évaluer la vitesse de précession caus e par l'anisotropie, on admet que l'ondulation (les résidus) autour de la précession $\theta(t)$ est sinusoïdale

$$\theta_{anis}(t) \equiv \Delta\theta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{anis}}\right). \quad (29)$$

Sa vitesse de précession est alors décrite par

$$|\Omega_{anis}| = \left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right| = \left|\Delta\theta \frac{2\pi}{T_{anis}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_{anis}}\right)\right| = \Delta\theta \delta\omega_0 \quad (30)$$

et on voit qu'elle est proportionnelle au taux d'anisotropie, comme attendu.

Faisant l'hypothèse que Ω_{anis} est une précession de type Airy, il vient

$$\Delta\theta \delta\omega_0 = \Omega_{anis} \simeq \Omega_A = \frac{3}{8} \omega_0 \frac{a^2}{L^2} \frac{b}{a}.$$

De cette égalité, on tire le taux d'anisotropie lié à l'ellipticité b/a

$$\delta_{ell} = \frac{3}{8} \frac{a^2}{L^2} \frac{b/a}{\Delta\theta} \sim 2 \cdot 10^{-4}, \quad (31)$$

dont la valeur est déterminée par le rapport entre l'ellipticité et l'amplitude des résidus. On voit alors que l'ellipticité et l'ondulation $\Delta\theta$ sont deux observables distinctes, mais pas indépendantes, qui nous renseignent sur une même réalité : l'effet des perturbations auquel est soumis le pendule.

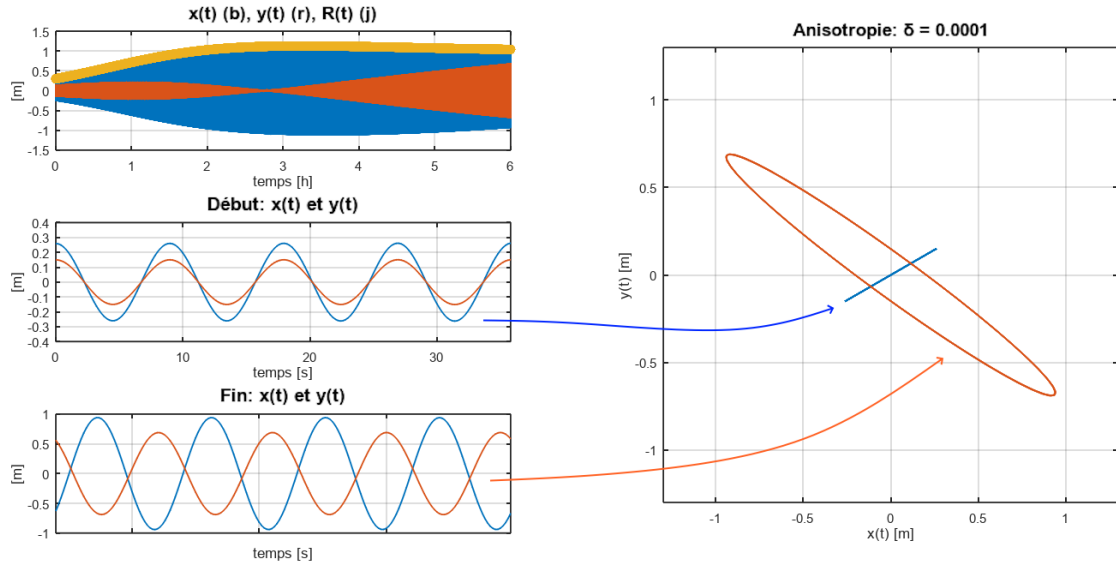


FIG. 5 : Démarrage du PF entretenu par élévation de son point de suspension

5.4 Ellipticité et excitation paramétrique

En 1988, A.B. Pippard, physicien anglais spécialiste de la supraconductivité, s'est intéressé au pendule de Foucault et à ses perturbations. Dans son article [5], il montre que

1. la précession anisotropique Ω_{anis} est liée à l'ellipticité ε_{anis} et à l'écart ψ entre le plan de l'ellipse et celui de la précession terrestre

$$\Omega_{anis} = \Delta\omega \cos(2\psi) \cdot \varepsilon_{anis} \quad (32)$$

2. l'anisotropie induit une variation temporelle de l'ellipticité

$$\dot{\varepsilon}_{anis} = -\frac{\Delta\omega}{2} \sin(2\psi) \quad (33)$$

3. l'entretien paramétrique conduit également à une variation temporelle

$$\dot{\varepsilon}_s = -2\omega_0 \frac{s_0}{L} \varepsilon_{anis}. \quad (34)$$

La variation totale de l'ellipticité vaut ainsi

$$\dot{\varepsilon}_{tot} = -\frac{\Delta\omega}{2} \sin(2\psi) - 2\omega_0 \frac{s_0}{L} \varepsilon_{anis}.$$

On voit alors que l'évolution temporelle de l'ellipticité est décrite par une équation différentielle d'ordre 1 non homogène

$$\dot{\varepsilon}_{tot} + 2\omega_0 \frac{s_0}{L} \varepsilon = -\frac{\Delta\omega}{2} \sin(2\psi) \quad (35)$$

dont la constante de temps vaut

$$\tau_{ell} = \frac{1}{2\omega_0} \frac{L}{s_0} \simeq 25 \text{ min.} \quad (36)$$

Cette valeur est confirmée par le temps d'établissement du régime permanent (fig. 5).

La solution générale de cette équation différentielle est la somme des solutions homogène et particulière

$$\varepsilon_{ell}(t) = A e^{-t/\tau_{ell}} + B \sin(2\psi - \phi). \quad (37)$$

Considérant uniquement le régime permanent et, admettant que la précession de l'ellipse $\psi(t)$ est dictée par la précession du PF

$$\psi(t) \simeq \theta(t) = \Omega_F \cdot t,$$

on obtient l'ellipticité en mode permanent

$$\varepsilon_{perm} = \frac{\alpha}{\sqrt{4 + \beta^2}} \sin\left(2\psi - \arctan\left(\frac{2}{\beta}\right)\right) \quad (38)$$

où α et β sont 2 grandeurs adimensionnelles qui mesurent, respectivement, l'anisotropie $\Delta\omega$ et l'excitation paramétrique s_0/L

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{2\Omega_F} = 1.42, \quad \beta = \frac{2\omega_0}{\Omega_F} \frac{s_0}{L} = 39.6.$$

De cette analyse, on tire l'amplitude de l'ellipticité en mode permanent

$$|\varepsilon_{perm}| = \frac{\alpha}{\sqrt{4 + \beta^2}} \simeq \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{L}{s_0} = \frac{\delta}{4} \frac{L}{s_0}. \quad (39)$$

Comme $|\varepsilon_{perm}|$ n'est autre que l'ellipticité mesurée b/a , on obtient le taux d'anisotropie consécutif à l'excitation paramétrique

$$\delta_s = 4 \frac{b}{a} \frac{s_0}{L} = 0.4 \cdot 10^{-4} \quad (40)$$

cinq fois inférieur à celui obtenu en l'absence d'excitation paramétrique (Airy) ; ce qui suggère la diminution de l'ellipticité grâce à celle-ci.

5.5 Périodes associées au PF

$\delta = 1 \cdot 10^{-4}, \quad b/a = 0.02$			
Périodes	causes	équations	périodes
T_0	pendule	$2\pi/\sqrt{g/L}$	9 s
T_{anis}	suspension	T_0/δ	25 h = 1.05 j
T_F	latitude	$\Omega_T \sin(\lambda)$	33 h = 1.37 j
T_{Airy}	ellipticité	$2\pi/\Omega_A$	134 h = 5.6 j

6 Effet des marées

Les marées gravitationnelles lunaires et solaires induisent des variations périodiques du champ de gravité terrestre ainsi que des déformations élastiques du sol (marées solides). Les variations de l'accélération de la pesanteur ainsi causées sont très faibles, de l'ordre de $10^{-7} g$ et induisent des déplacements verticaux du sol pouvant atteindre quelques centimètres [12].

Ces effets, bien connus et mesurables par gravimétrie de précision, sont plusieurs ordres de grandeur en dessous des effets liés à l'anisotropie de la suspension du PF. On en conclut que le pendule de la HEIG-VD ne possède pas la sensibilité nécessaire pour les percevoir.

7 Quelques mesures au fil des ans

7.1 1995, 4 jours : Relevés manuels

Les travaux de diplômés de MM. C. Mahon et P. Neuwerth ont permis la réalisation et mise en place du PF de la HEIG-VD. Des mesures ont alors été effectuées manuellement pendant 4 jours en fin d'année 1995 ; elles sont présentées dans les graphes de la figure 6.

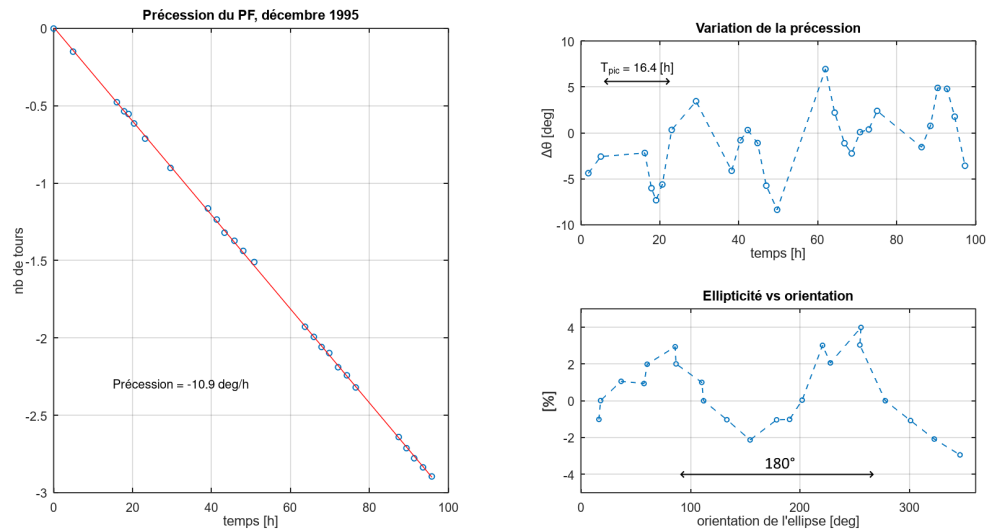


FIG. 6 : Premières mesures

L'observation du mouvement et de ces graphes suggère que

- l'oscillation du pendule se fait selon une fine ellipse qui tourne au cours du temps (la précession),
- l'orientation du grand axe mesure l'angle de précession $\theta(t)$ et l'ajustage de la droite parmi les points mesurés fournit la vitesse de précession très proche de la valeur théorique,
- le petit diamètre de l'ellipse rapporté au grand diamètre est une mesure de son ellipticité de l'ordre de quelques pourcents,
- l'anisotropie de la suspension entraîne des "avances/retards" dans la progression de l'ellipse qui se traduisent par une légère modulation (± 8 deg) de la droite de précession,
- ces variations, vraisemblablement périodiques, font apparaître une période T_{pic} de 16.4 h, proche de la moitié de la période de précession,
- l'accélération ($\epsilon > 0$) et décélération ($\epsilon < 0$) de l'axe de l'ellipse pourraient résulter de l'effet des deux axes préférentiels (couteaux-croisés) distants de 90° .

Ces premières mesures suggèrent que la précession du pendule réel est modulée par des mécanismes internes au dispositif.

7.2 1998, 19 jours : Précession, anisotropie et ellipticité

Sur la figure 7, on observe deux ondulations : une rapide (environ 16 h) d'amplitude $\pm 8^\circ$ et une lente (environ 20 jours) d'amplitude $\pm 40^\circ$. Ceci est probablement dû aux couteaux-croisés qui se sont dégradés et produisent un ralentissement marqué de la vitesse de précession (10.2 deg/h) par rapport à celle mesurée en 1995 qui était proche de la valeur théorique.

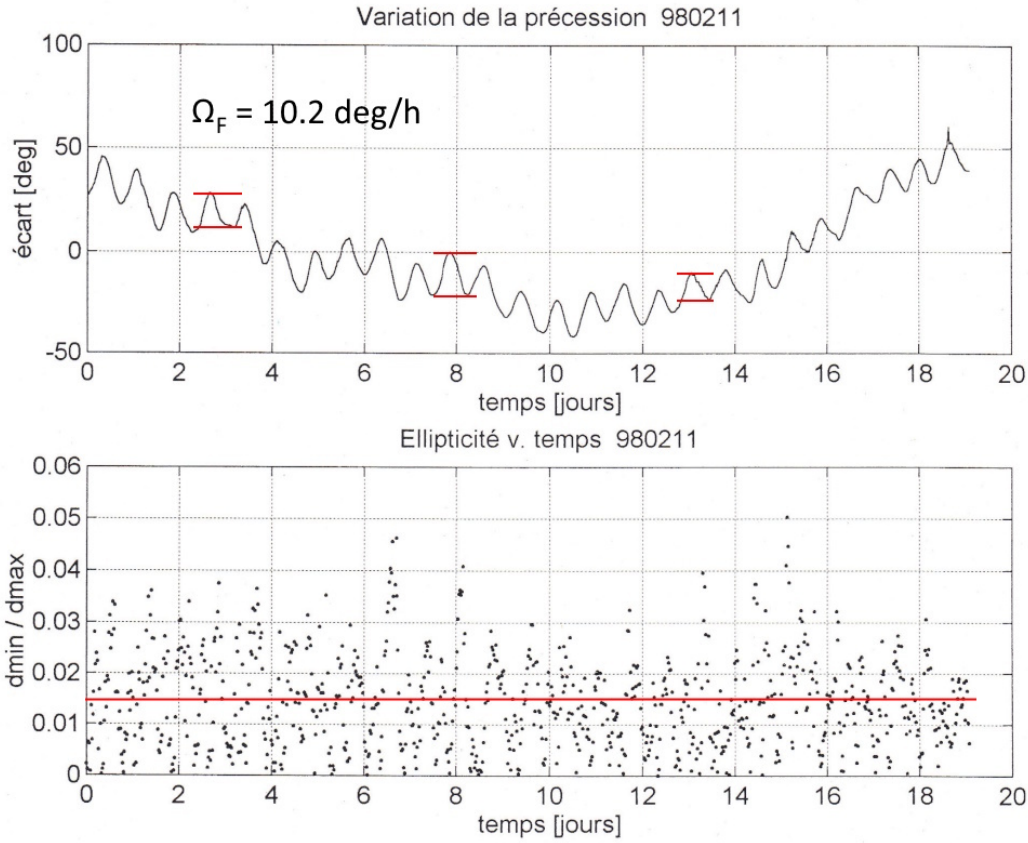


FIG. 7 : Ondulation de la précession $\Delta\theta \simeq \pm 9^\circ$ et ellipticité $b/a \simeq 1.5\%$

D'autre part, comme le montre la relation (31)

$$\delta_{ell} = \frac{3}{8} \frac{a^2}{L^2} \frac{b/a}{\Delta\theta},$$

le quotient entre l'ellipticité b/a et l'ondulation $\Delta\theta$ est une constante car toutes les autres grandeurs sont fixées par les paramètres et la suspension du pendule. Il est donc naturel d'observer sur le graphe que les variations de b/a et $\Delta\theta$ sont synchrones.

Ces deux grandeurs peuvent être estimées à partir du graphe

$$\Delta\theta \simeq 8 \text{ deg}, \quad b/a \simeq 0.015,$$

valeurs dont on tire la précession d'Airy (section 5.2)

$$\Omega_A = \frac{3\pi}{4T_0} \frac{a^2}{L^2} \frac{b}{a} = 9.8 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} = 2 \text{ deg/h} \simeq \frac{\Omega_F}{5}$$

et le taux d'anisotropie

$$\delta = \frac{3}{8} \frac{a^2}{L^2} \frac{b/a}{\Delta\theta} = 9 \cdot 10^{-5} \simeq 10^{-4}.$$

7.3 2011, 61 jours : Enregistrement comportant des erreurs

Les mesures de septembre-octobre 2011 sont illustrées en la figure 8. Le graphe de la vitesse de précession Ω_F montre que l'enregistrement est constitué de doublons et de valeurs manquantes.

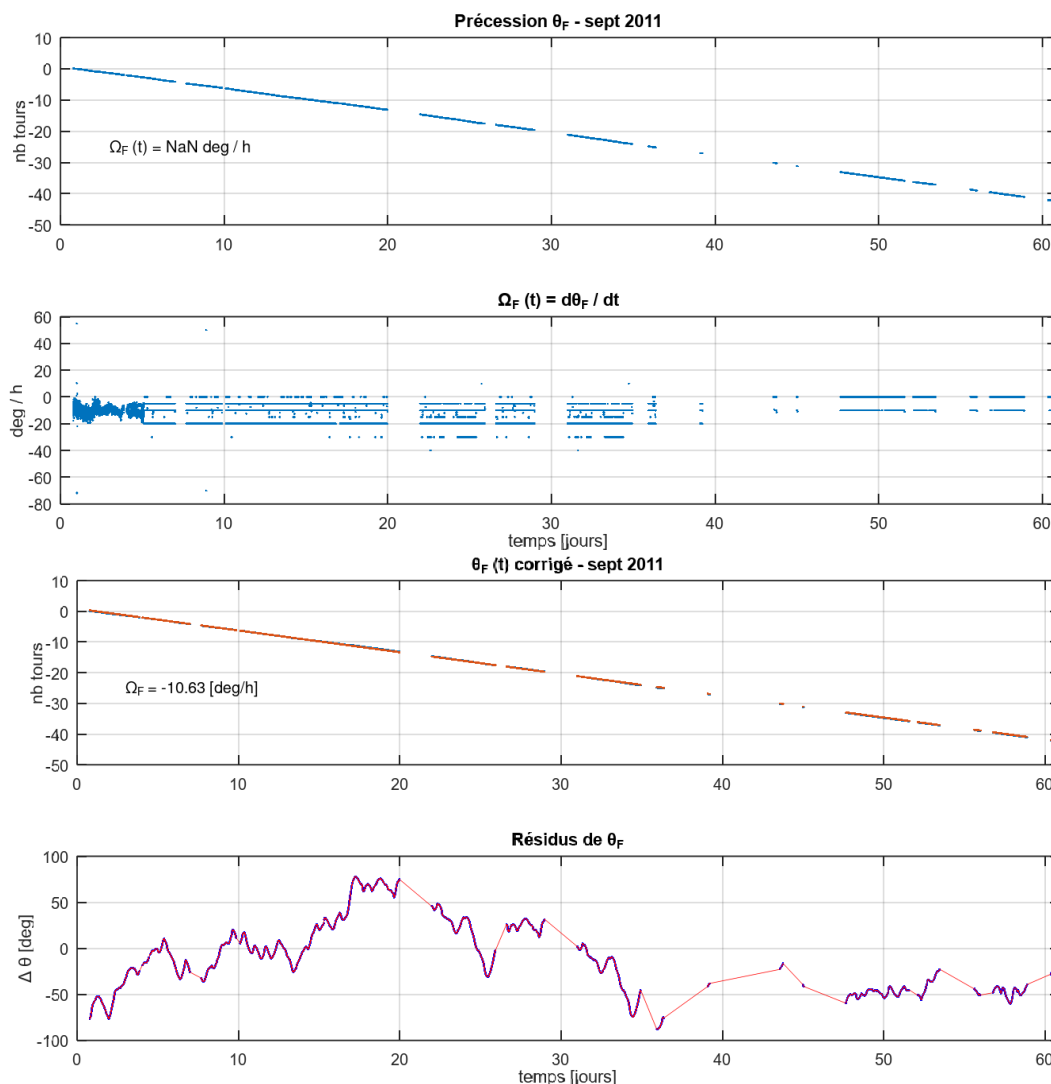


FIG. 8 : Enregistrements original et corrigé

Deux fonctions Matlab permettent de corriger ces artefacts où `temps` et `theta` sont les vecteurs temporel et angulaire des valeurs à corriger et agréger :

1. suppression des doublons et tri croissant des valeurs de `temps`
 - a) `[temps_c,~,idx] = unique(temps) ;`
 - b) `idx` est le vecteur d'indices des doublons de `temps`
2. somme, puis moyenne, des angles `theta` indexés
 - a) `theta_c = accumarray(idx, theta , [], @mean) ;`
 - b) `@mean` : calcul de la moyenne des valeurs de `theta` pour chaque groupe d'indices définis par `idx`

On peut alors rechercher les variations autour de la droite de précession et en faire l'analyse spectrale, non PAS avec la FFT, qui exige des valeurs régulièrement espacées, mais avec l'algorithme de Lomb-Scargle.

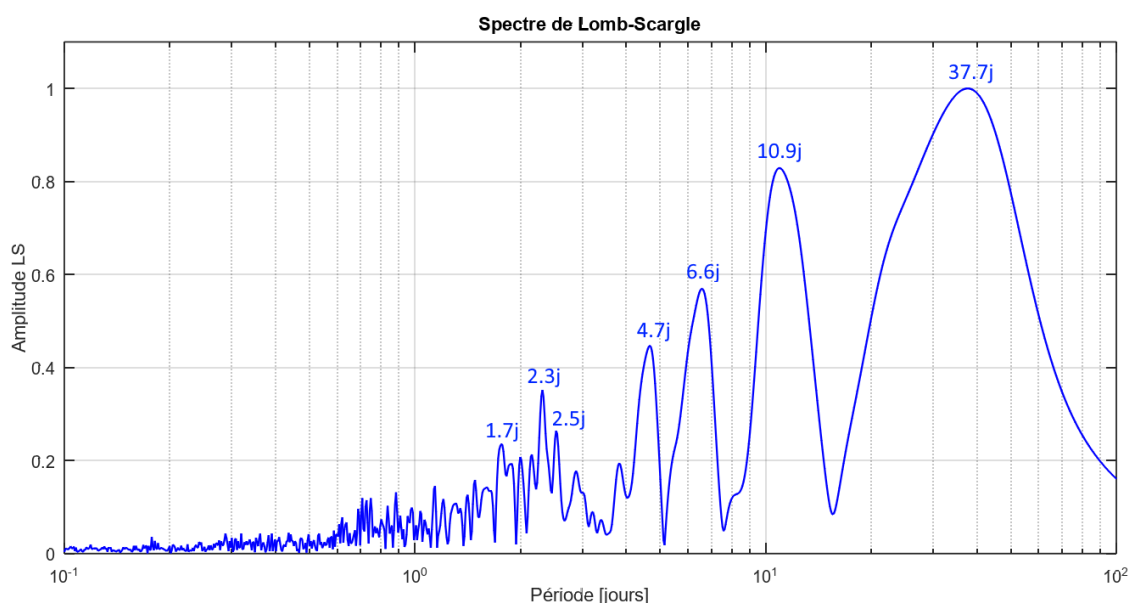


FIG. 9 : Périodogramme

Analyse via l'algorithme Lomb-Scargle

Cet algorithme (section 11.4) calcule un périodogramme adapté aux données échantillonnées de manière irrégulière. Appliqué à l'enregistrement 2011, il fait apparaître 6 pics qu'il faut tenter d'interpréter et relier à une grandeur connue ; par exemple, la période de précession qui vaut environ $T_F = 33 \text{ h} = 1.375 \text{ j}$ ou celle de Airy $T_{Airy} = 5.5 \text{ j}$.

$T_F = 1.375 \text{ [j]}$		Périodes T_k en jours					
k	–	1	2	3	4	5	6
A_k	–	0.23	0.35	0.26	0.57	0.83	1.00
T_k	[j]	1.7	2.3	4.7	6.6	11	38
ΔT_k	[j]	± 0.05	± 0.08	± 0.36	± 0.71	± 2.0	± 23
T_k/T_F	[–]	1.2 ± 0.03	1.7 ± 0.06	3.4 ± 0.26	4.8 ± 0.52	8.0 ± 1.5	27.6 ± 17
$\sim n$	–	–	–	3	5	8	28

Les périodes des pics sont mentionnées avec leur incertitude $\Delta T_k = T_k^2/t_{max}$ et, rapportées à la période de précession T_F , elles montrent que seuls les pics situés en 4.7, 6.6 et 11 jours pourraient être liés à la précession du PF.

Le pic à 38 ± 23 jours pourrait correspondre à une dérive lente résultant de l'accumulation de petites asymétries.

7.4 2023, 27 jours : Effet des couteaux-croisés

Les couteaux-croisés ont été choisis pour leur faible anisotropie mécanique. Malheureusement, ils se sont dégradés au cours du temps. Les mesures faites en septembre 2023 pendant 27 jours montrent que

1. l'anisotropie des couteaux-croisés ralentit la vitesse de précession

$$\Omega_F = -10.5 \frac{\text{deg}}{\text{h}},$$

2. l'oscillation marquée des résidus est en relation évidente avec la période de précession,
3. l'ellipticité liée à l'orientation de l'ellipse est minimum ou maximum lorsque l'ondulation rapide passe par 0.

Ce qui confirme la conclusion de la section 5.3, à savoir qu'ellipticité et ondulation de la précession sont intrinsèquement liées.

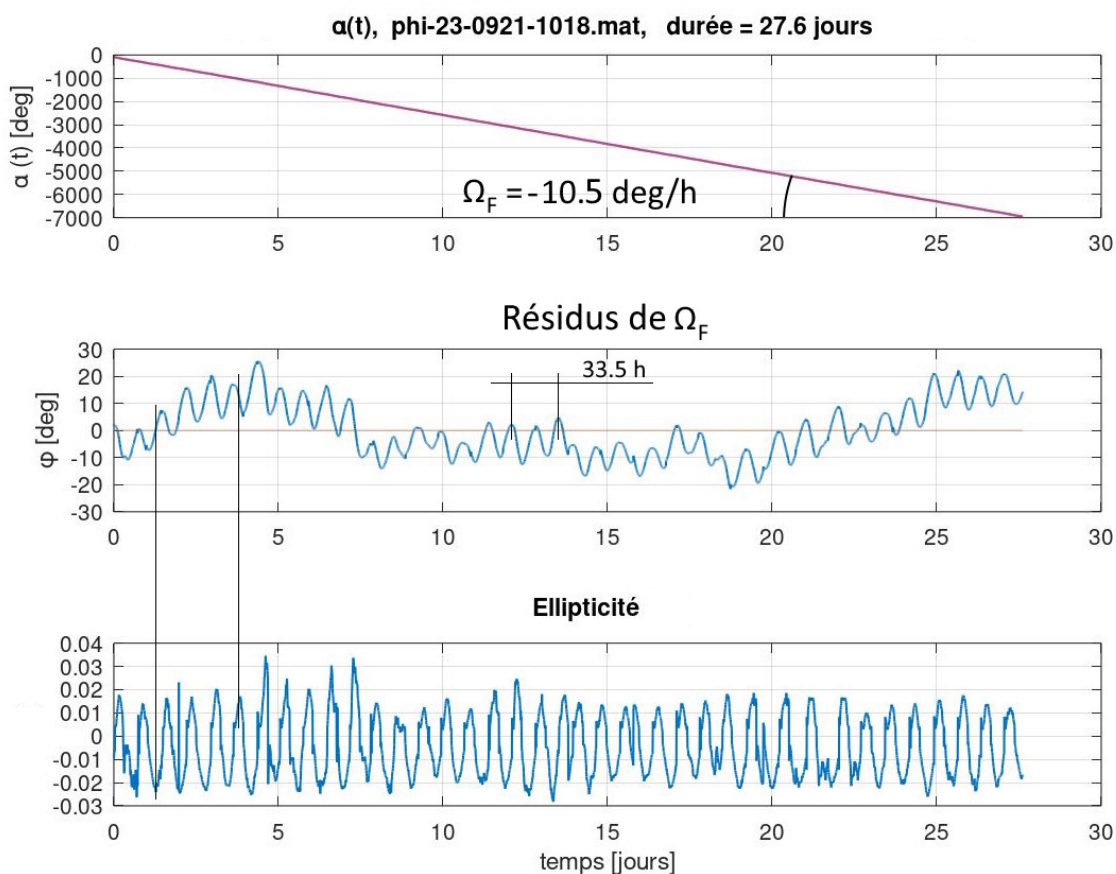


FIG. 10 : Mesures avec les couteaux-croisés légèrement dégradés

7.5 2023, 84 jours : Le plus long enregistrement

En 2022, un nouveau professeur en informatique, Yves Chevallier, arrive à la HEIG-VD et, en parallèle à son enseignement, s'intéresse au PF. En 2023, un nouveau système de vision (cf. section 11.5) a été implanté près du point de suspension du pendule. Ce capteur permet de mesurer la position de la sphère avec une précision de ± 1 cm.

Cet enregistrement, de longue durée, est de qualité. Il montre une vitesse de précession bien faible due à une isotropie dégradée. La vitesse de précession mesurée $\Omega_F = -10.36$ deg/h, soit une période $T_F = 34.75$ h (au lieu des 33 h théoriques) est confirmée par l'analyse spectrale qui donne $T_F = 2 \cdot T_k = 34.2$ h.

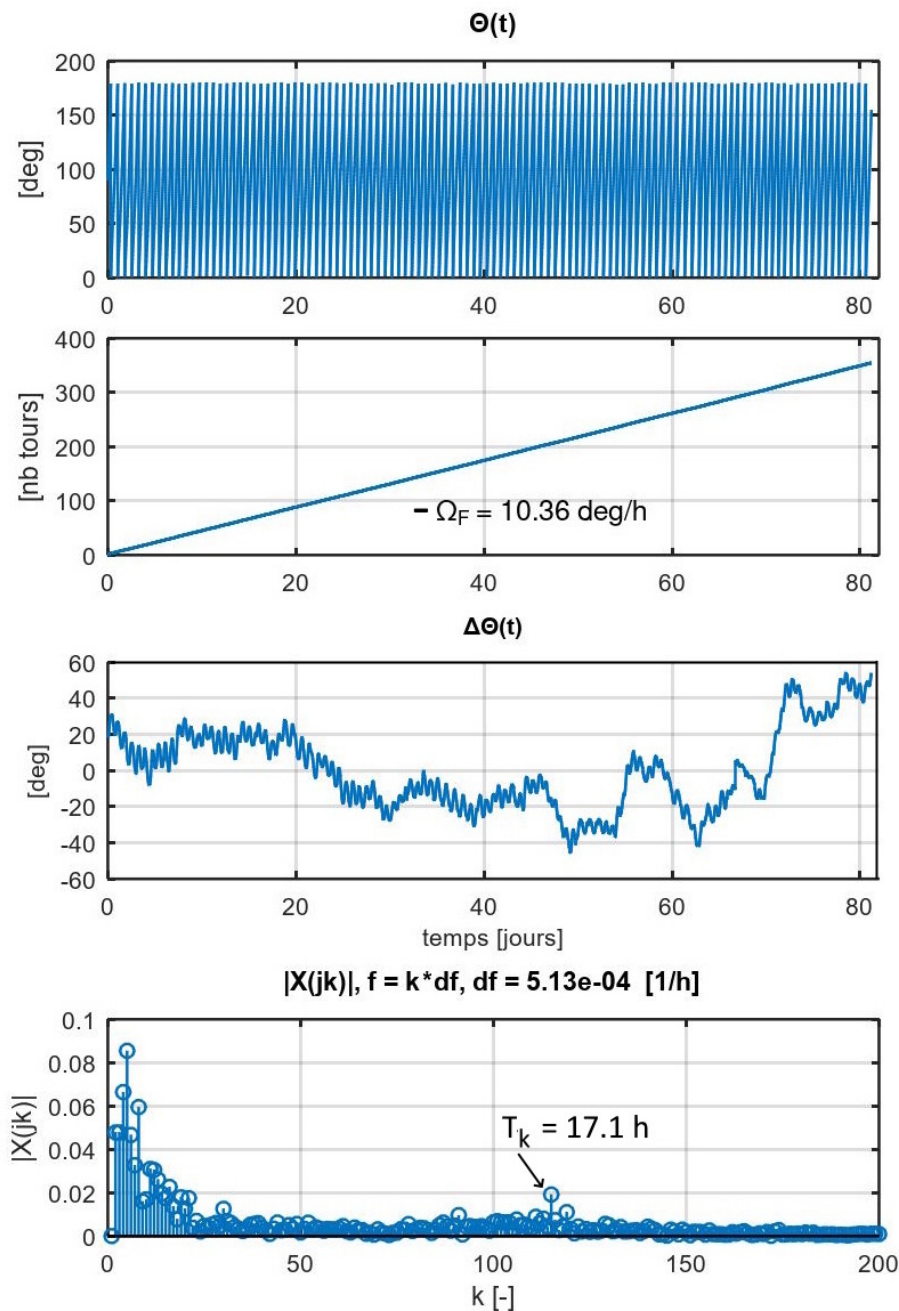


FIG. 11 : Précession $\Theta(t)$, résidus $\Delta\Theta(t)$ et spectre $|X(jk)|$ des résidus

7.6 2024, 25 jours : Suspension rigide et jours manquants

En 2024, Adrien Cardinale, ingénieur à l'Institut d'Automatisation Industrielle (IAI), remplace la motorisation (section 11.5) et les couteaux-croisés par une fixation rigide du câble à la plateforme de suspension.

Le résultat est remarquable : l'ondulation lente de la précession est toujours présente mais l'oscillation rapide a disparu. Le remplacement des couteaux-croisés par une suspension rigide s'est avéré nécessaire ; on a retrouvé un PF dont le comportement observé se rapproche du modèle idéal.

Le graphe montre également que le capteur de position fait parfois défaut. On peut alors, si l'on souhaite évaluer la vitesse de précession, remplacer ces manques par une interpolation linéaire.

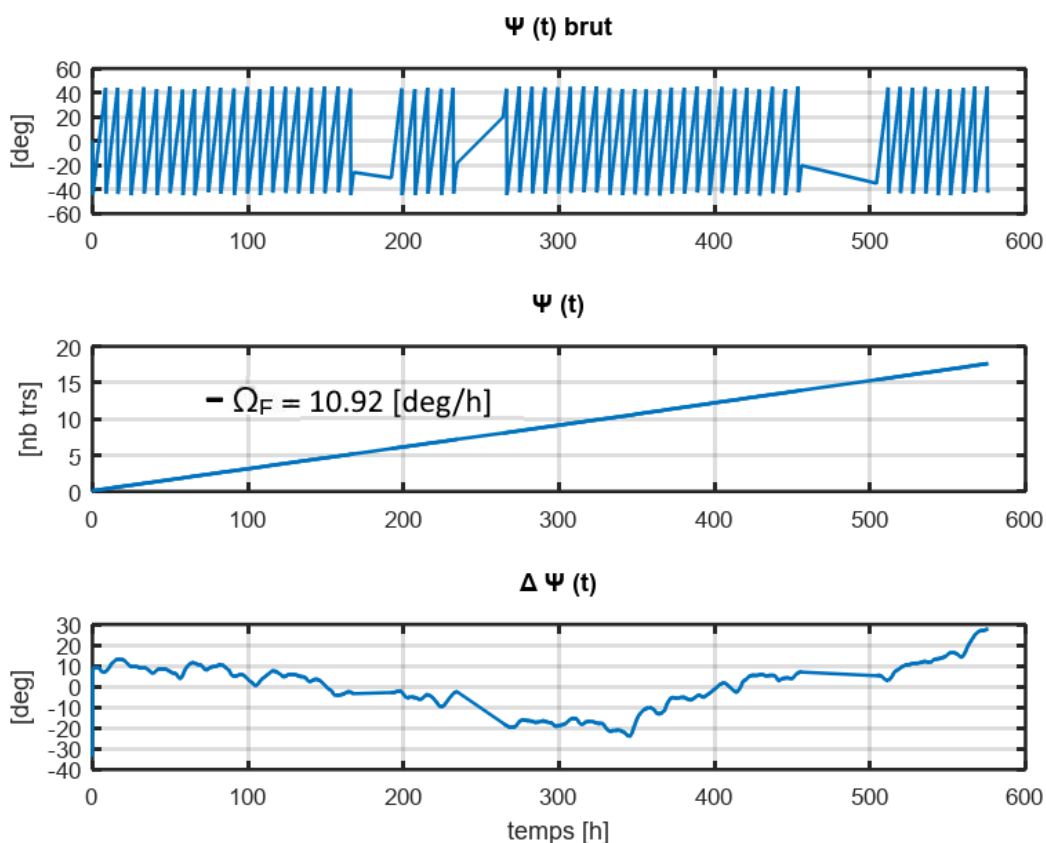


FIG. 12 : Les jours manquants sont remplacés par une interpolation linéaire

7.7 Novembre 2025 : un enregistrement riche d'informations

Les valeurs analysées ci-après ont été mesurées toutes les minutes pendant 30 jours ; ce qui donne

$$\Delta t = \frac{1}{60} \text{ h}, \quad t_{max} = 720 \text{ h}, \quad N = \frac{t_{max}}{\Delta t} = 43'200 \text{ échantillons.} \quad (41)$$

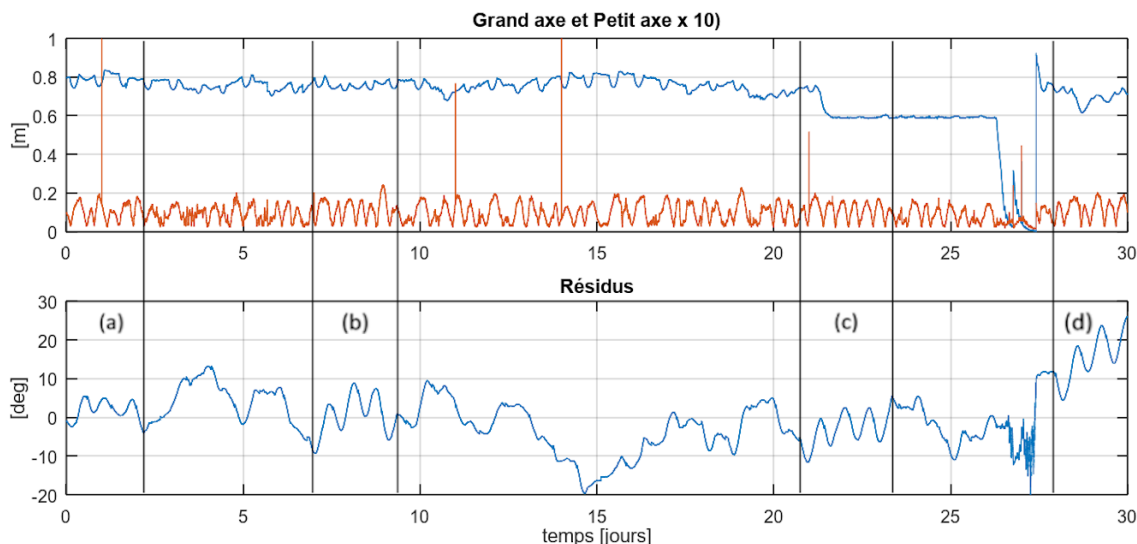


FIG. 13 : Mesures 2025 effectuées sur 30 jours

Résidus et temporalité

L'enregistrement de la figure 13 fait apparaître les points suivants :

1. une période de précession $T_F = \frac{2\pi}{\Omega_F} = 33.5 \text{ h}$ légèrement supérieure (+2%) à la valeur attendue,
2. des résidus compris entre $\pm 5^\circ$ autour d'une évolution lente,
3. une ellipticité d'environ 2.5%,
4. un défaut du système de vision entre J21 et J27,
5. une incohérence peu avant le 28ème jour,
6. dans les zones (a, b, c, d), les résidus sont pratiquement sinusoidaux.

À ce stade, les points 1 à 3 ne nécessitent pas de commentaires particuliers car ils sont cohérents avec les observations réalisées au fil des années. Par contre, les trois derniers points méritent plus d'attention.

Artefact de J21 à J27 La mesure du grand axe est clairement erronée entre J21 et J27, particulièrement en J27 où elle est quasi nulle. Il s'agit d'une erreur de l'algorithme qui calcule les axes a , b et l'orientation θ à partir des coordonnées $\{x, y\}$ de l'ellipse. Puis, tout redevient normal dès J27.5.

Incohérence vers J28 Peu avant J28, on observe un brusque saut de la précession ($\sim 20^\circ$) qui, du fait de l'inertie de la masse du pendule, ne peut pas être imputé au PF. Il s'agit plus vraisemblablement de mesures manquantes pendant presque 2 heures ($20^\circ / 360^\circ \cdot 33.5 \text{ h} = 1.86 \text{ h}$).

Zones (a, b, c, d) Dans ces 4 zones, les résidus sont clairement sinusoïdaux, ce qui suggère que l'anisotropie pourrait dominer temporairement le comportement aléatoire des résidus. On peut relever que

1. la période des sinusoïdes vaut environ 16.4 h, soit la moitié de $T_F = 33$ h,
2. la durée de chaque zone sinusoïdale se situe entre 2 et 2.5 jours.

L'origine de ces transitions entre comportement aléatoire et sinusoïdal reste à élucider.

Spectres des axes et des résidus

Après avoir remplacé les erreurs de mesures du grand axe, de J21 à J27, par une interpolation linéaire, on a calculé les spectres des axes et des résidus (fig. 14) et on en déduit les périodes spectrales présentées ci-dessous. On remarque alors que

1. les effets des 2 axes d'anisotropie se manifestent tous les multiples de $T_F/4 = T_x/2 = 8.25$ h, ici en 2.3 j, 23.6 h, 16.7 h et 8.4 h, mais pas en la période de précession $T_F = 33$ h = 1.37 j car, en 1 tour, le plan de précession croise 4 fois les 2 axes d'anisotropie.
2. le grand axe est manifestement plus sensible aux perturbations que le petit axe ou les résidus de la précession,
3. plusieurs périodes sont dans une relation harmonique avec 6 h ou 8 h,
4. considérant T_{6h} et ses harmoniques pairs, on retrouve une temporalité intéressante : 6, 12, 24 heures,
5. les périodes de durée moyenne 12.9 h, 9.7 h et 5.5 h sont peut-être liées à l'activité quotidienne alors que les périodes longues (15 j et 7.5 j) proviennent probablement d'effets extérieurs tels que l'ensoleillement.

L'ensemble de ces observations est compatible avec l'idée que, en plus de l'anisotropie de la suspension du pendule, l'activité quotidienne et l'environnement du pendule participent aux variations angulaires autour de la droite de précession.

Périodes associées au PF

$\delta = 1 \cdot 10^{-4}, \quad b/a = 0.02$			
Périodes	causes	équations	périodes
T_0	pendule	$2\pi/\sqrt{g/L}$	9 s
T_{anis}	suspension	T_0/δ	25 h = 1.05 j
T_F	latitude	$\Omega_T \sin(\lambda)$	33 h = 1.37 j
T_{Airy}	ellipticité	$2\pi/\Omega_A$	134 h = 5.6 j

Périodes spectrales Ces périodes sont présentées et détaillées dans le tableau ci-après. Et on note :

1. Les périodes observées dans la figure 14 peuvent s'interpréter comme des combinaisons harmoniques de $T_F/4$ générées par l'anisotropie.
2. Les périodes $\sim T_k$ sont les valeurs entières ou multiples proches de celles observées.

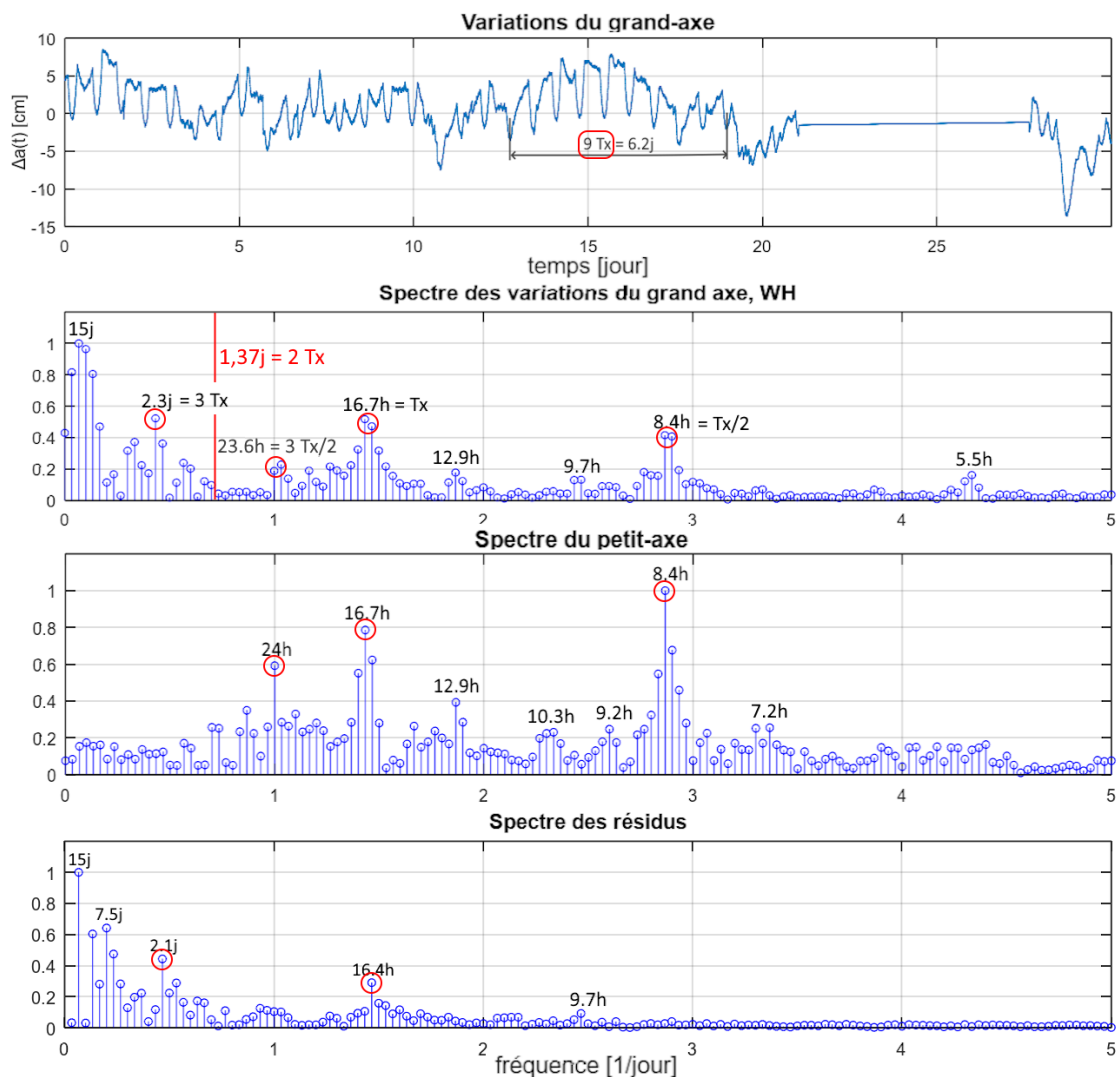


FIG. 14 : Spectres des axes et des résidus

Périodes spectrales mesurées en novembre 2025										
k	–	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T(k)$	[j]	15.0	7.5	2.3	0.98	0.70	0.54	0.41	0.35	0.23
$T(k)$	[h]			55.2	23.5	16.7	12.9	9.7	8.4	5.5
$\sim T(k)$	[h]			56	24	16	12	10	8	6
PF			49.5 h	25.2 h	16.5 h				8.3 h	
			$6 T_F/4$	$3 T_F/4$	$2 T_F/4$				$T_F/4$	
$\sim T(k)$	[8h]		6	3	2				1	
	[6h]		9	4			2			1

3. L'absence de pic à la période de précession T_F dans le spectre du grand axe ne constitue pas un résultat paradoxal. L'orientation du grand axe étant définie modulo π , une rotation complète correspond à deux cycles de cette observable. Il est ainsi naturel que la composante dominante apparaisse à $T_F/2$, tandis que T_F peut être absent ou fortement atténué.

En résumé :

1. les 2 périodes $T(5) = 16.7$ h et $T(8) = 8.4$ h peuvent s'expliquer par le passage du plan de précession sur les axes préférentiels dus à l'anisotropie.
2. la période $T(7) \simeq 10$ h, présente dans les trois spectres, pourrait être liée au cycle quotidien de chauffage des locaux qui débute à 08 :30 et se termine à 18 :00,
3. l'ensoleillement et la température intérieure peuvent modifier la position du point de suspension du pendule ; ce sont peut-être la cause des périodes $T(1, 2) = 7.5$ et 15 j mais aucune corrélation quantitative directe n'a toutefois été établie à ce stade.

“Respiration” du bâtiment

Comme dit plus haut, l'anisotropie de la suspension du PF, l'activité quotidienne de la HEIG-VD et l'environnement du pendule peuvent contribuer aux périodes mises en évidence par les spectres des évolutions des axes de l'ellipse et de l'ondulation autour de la précession.

Le périodogramme du grand axe met bien en évidence les périodes dues à l'environnement, supérieures à 2 jours et celles dues à l'anisotropie, inférieures à 1 jour.

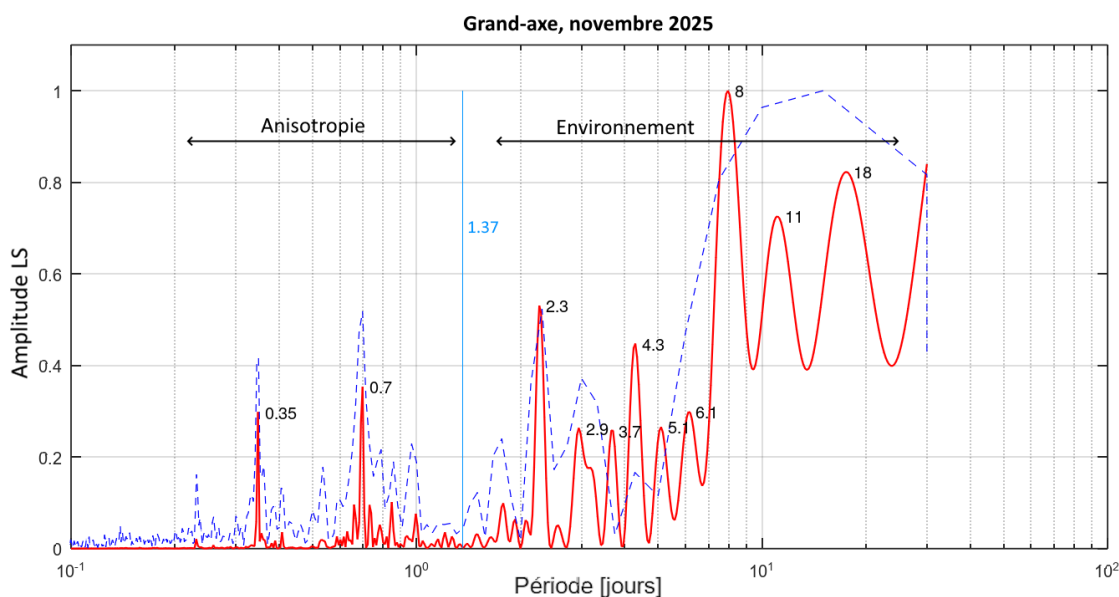


FIG. 15 : Périodogrammes LS et FFT du grand axe

7.8 Avril 2026 : effet de l'ensoleillement

Le pendule est situé dans la cage d'escalier du hall principal sous un dôme en plexiglas soumis au rayonnement direct du soleil ; ce qui, en été, conduit à des températures supérieures à 40°C pour la plaque métallique supportant le PF (fig. 16). On peut donc imaginer que le point de suspension se déplace légèrement et modifie l'ellipticité du mouvement pendulaire.



FIG. 16 : Plateforme de suspension et commande du pendule

L'objectif de l'analyse qui suit est de quantifier l'évolution du petit axe de l'ellipse d'oscillation en fonction de l'ensoleillement.

Les mesures d'avril 2026 sont de bonne qualité malgré 12% de valeurs manquantes (fig. 17) ; la vitesse de précession moyenne Ω_F était de -10.4 deg/h avec des résidus de $\pm 5^\circ$.

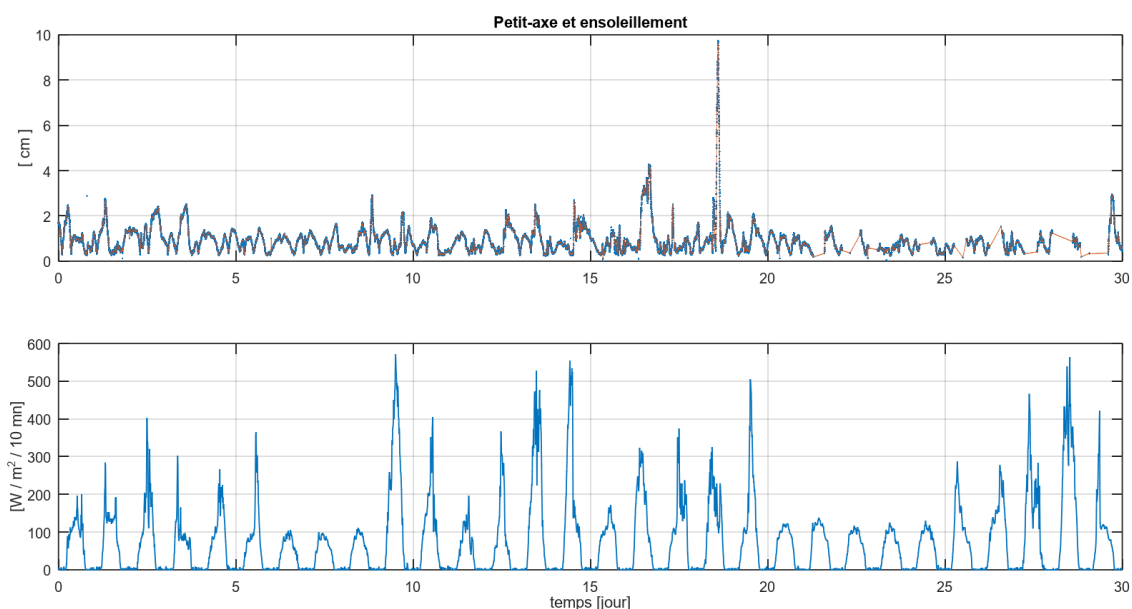


FIG. 17 : Évolutions du petit axe de l'ellipse d'oscillation et ensoleillement local

Après rééchantillonnage ($T_h = 10$ mn) avec interpolation linéaire, on a calculé les périodogrammes (fig. 18) du petit axe et de l'ensoleillement mesuré par la station SuisseMétéo située à Method, 6km à l'Ouest d'Yverdon-les-Bains. On constate alors que

1. les 5 périodes comprises entre 4.6 et 21 jours sont présentes dans les deux évolutions temporelles,
2. le rapport des amplitudes des 5 pics peut être modélisé par un filtre passe-bas d'ordre 1

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau_{sol}}, \quad H_0 = 1.7 \cdot 10^{-4}, \quad \tau_{sol} = 1.59 \text{ jours.} \quad (42)$$

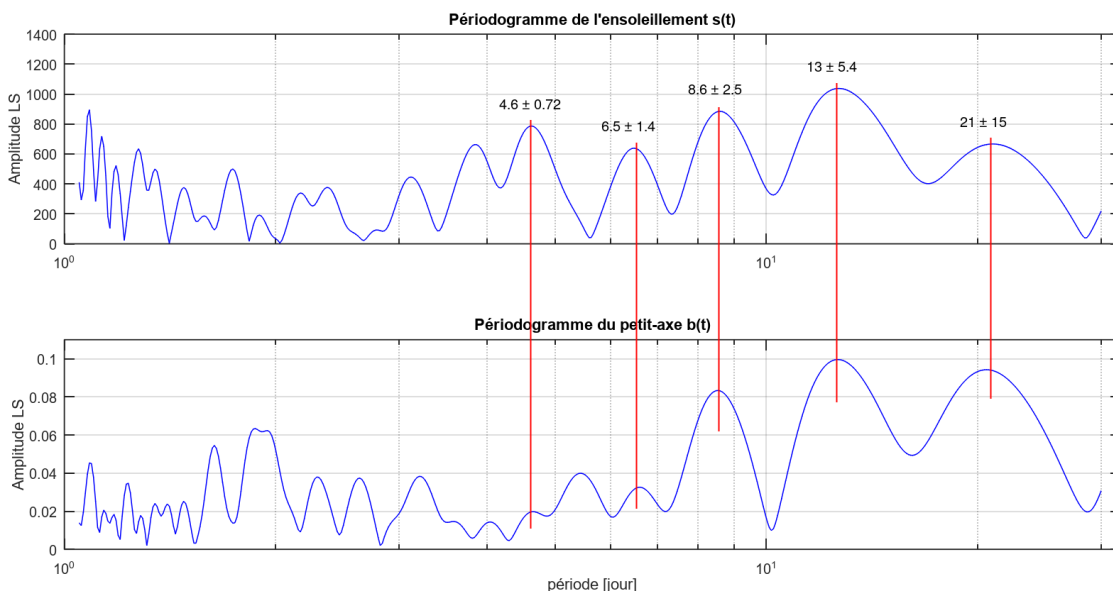


FIG. 18 : Périodogrammes de l'ensoleillement local et du petit axe de l'oscillation

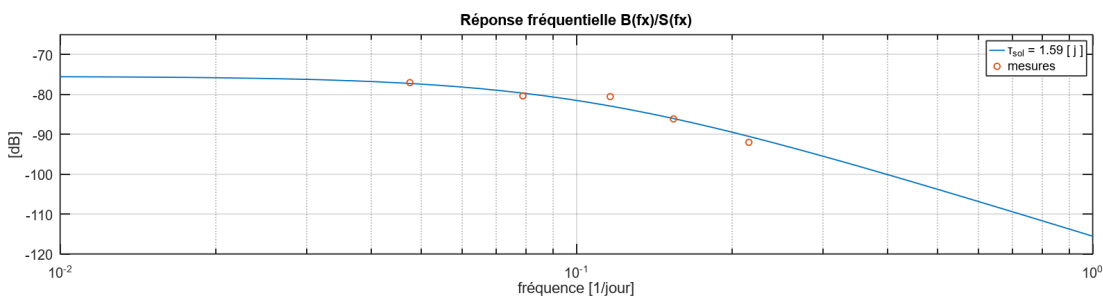


FIG. 19 : Réponse fréquentielle du petit axe

L'intercorrélation (fig. 20) fait apparaître

1. une forte corrélation entre les deux signaux,
2. un décalage de 4.6 heures lié au filtre passe-bas entre l'ensoleillement et le pendule,
3. une période marquée de 24 heures,
4. une décroissance quasi exponentielle du côté retard ($\tau > 0$) avec une constante de temps de 15 heures environ probablement due à l'inertie thermique du béton du toit,
5. une décroissance plus lente du côté avance ($\tau < 0$), presque stable jusqu'à $\tau = -10$ h qui traduit l'effet des jours à venir telle que la régularité statistique de la météo d'un jour à l'autre.

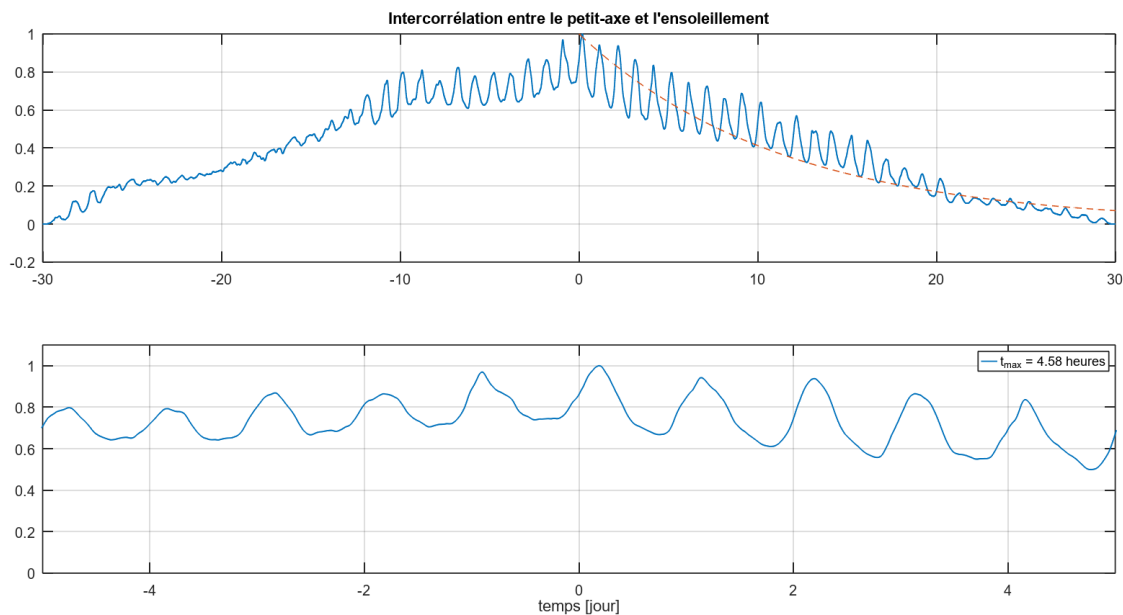


FIG. 20 : Intercorrélation du petit axe et de l'ensoleillement local ; la courbe traitillée rouge correspond à une décroissance exponentielle avec $\tau = 15$ h

8 Résumé des résultats expérimentaux

Dates	Durées s	Suspension	$-\Omega_F$ [deg/h]	$\Delta\theta$ [deg]	ϵ [%]	Remarques
1995	4	couteaux croisés	10.9	± 8	3.0	relevé manuel
1998	19		10.2	± 10	1.5	variation lente ± 50 deg
2011	61		10.6	± 60	–	données manquantes
2023	27		10.5	± 10	1.5	variation lente ± 20 deg
2023	84		10.4	± 10	–	variation lente ± 40 deg
2024	25	rigide	10.9	± 8	–	nouveau système de vision
2025	30		10.7	± 10	2.5	{ temporalité de l'anisotropie, "respiration" du bâtiment
2026	30		10.4	± 5	1.0	

On peut relever que :

1. Les deux axes de l'ellipse sont particulièrement sensibles aux perturbations ; leur contenu spectral est plus dense que celui des résidus de la précession.
2. L'ensoleillement local agit, à travers la température de la plateforme de suspension, sur l'ellipticité de l'oscillation.
3. L'ondulation mesurée autour de la précession du PF paraît compatible avec l'anisotropie de la suspension, l'activité quotidienne dans le hall de l'école et l'ensoleillement local.
4. Le périodogramme de LS est un instrument important pour l'analyse de périodes spectrales très différentes (voir section 11.4).

9 Simulation numérique

La simulation numérique dans le cadre du PF est essentielle car elle permet de

1. vérifier si les choix de construction conduisent à une réalisation possible,
2. résoudre les équations non linéaires et voir leurs effets,
3. tester les algorithmes de mesure de la précession et des paramètres de l'ellipse à partir des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la position de la sphère.

Mais, la simulation numérique du PF n'est pas simple car, comme dit plus haut, il y a trois échelles de temps très différentes. Mais, même si l'on se contente de quelques heures pour analyser le comportement détaillé du pendule, la taille des variables devient très vite prohibitive.

Pour observer et analyser la précession, la simulation doit porter sur 2 à 3 jours avec une période d'échantillonnage assez fine ($T_h = 0.1$ sec) pour que l'oscillation du pendule ($T_0 \simeq 9$ sec) soit bien représentée. Cela entraîne une masse de valeurs t, x, y dépassant le million !

9.1 Intégration matricielle

Le vecteur d'état X regroupe les variables nécessaires à la description du PF

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

La matrice A , utilisée pour décrire des modèles linéaires, est constituée de toutes les grandeurs servant à décrire l'évolution du pendule au travers de son équation différentielle. Prenant en compte l'anisotropie, Coriolis et un frottement visqueux, on a vu que le PF est décrit par ces équations

$$\ddot{x} = -\omega_x^2 x - \gamma \dot{x} + 2\Omega_{lat} \dot{y} \quad (44)$$

$$\ddot{y} = -\omega_y^2 y - \gamma \dot{y} - 2\Omega_{lat} \dot{x} \quad (45)$$

Ce qui, en écriture matricielle, se traduit par

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_x^2 & 0 & -\gamma & +2\Omega_{lat} \\ 0 & -\omega_y^2 & -2\Omega_{lat} & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Comme **le système est linéaire**, l'équation différentielle $\dot{X} = AX$ d'ordre 1 a pour solution

$$X(t) = e^{At} X(0). \quad (47)$$

Cette solution étant connue, il n'est plus nécessaire d'intégrer numériquement (avec les risques de divergence) ; il suffit de voir que la nouvelle valeur $X(t+dt)$ s'obtient en multipliant la valeur actuelle $X(t)$ par l'exponentielle matricielle $e^{A dt}$

$$X(t+dt) = e^{A(t+dt)} X(0) = e^{A dt} e^{At} X(0) = e^{A dt} X(t).$$

Cette exponentielle porte le nom de **matrice de transition**

$$M_{tr} \equiv e^{A dt} \quad (48)$$

et la multiplication successive par M permet d'obtenir la solution au temps $t_n = n dt$

$$X(t+n dt) = e^{A n dt} X(t) = M_{tr}^n X(t).$$

9.2 Code Matlab

Grâce à l'usage de la matrice de transition, le code se résume à une boucle ne contenant que de simples opérations. On gagne ainsi en rapidité par rapport aux fonctions d'intégration telles que Euler, Runge-Kutta, ode45 ou autres.

```
X = [x0,xd0, y0, yd0]';
M_trans = expm(A*dt);
for n = 1 :N
    X = M_trans * X;
    xt(n) = X(1);
    yt(n) = X(2);
    tt(n) = n*dt;
end
```

Dans le cas où l'on considère un frottement quadratique (non linéaire), celui-ci ne peut pas être intégré dans la matrice A ; il faut le traiter séparément comme le montre le code suivant, auquel on a ajouté l'adaptation de l'amplitude de l'excitation.

```
% Matrice A sans frottement car géré hors matrice
A = [ 0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -wx2, 0, 0, +2*W_lat;
      0, -wy2, -2*W_lat, 0];

% Initialisation
M_trans = expm(A * dt);
X = [x0; y0; xd0; yd0];
Kp = 0.1; Rw = 1;
for n = 1 :N
    % 1. Évolution du PF linéaire
    X = M_trans * X;
    % 2. Entretien paramétrique avec s(t) = -s0 cos(2w0t)
    sdd = + 4 * w0^2 * sr * cos(2 * w0 * tt(n));
    X(3) = X(3) + wx2 * sdd/g * X(1) * dt;
    X(4) = X(4) + wy2 * sdd/g * X(2) * dt;
    % 3. Frottement quadratique
    v_abs = sqrt(X(3)^2 + X(4)^2);
    X(3) = X(3) - gamma2 * v_abs * X(3) * dt;
    X(4) = X(4) - gamma2 * v_abs * X(4) * dt;
    % 4. Sauvegarde
    xt(n) = X(1); yt(n) = X(2);
    Rt(n) = abs(xt(n) + j*yt(n));
    tt(n) = n * dt;
    % 5. Adaptation de l'excitation
    sr = s0 + Kp * (Rw - Rt(n));
end
```

L'adaptation de l'excitation à l'aide d'un simple régulateur proportionnel permet d'éviter que l'amplitude de l'oscillation varie entre 1.0 et 1.3 m. Le temps d'établissement est alors inférieur à 1 heure sans que le comportement du PF soit modifié ultérieurement.

9.3 Extraction de l'angle de précession

L'oscillation du pendule simple, anisotrope ($\omega_{x,y} = \omega_0 \sqrt{1 - \delta/2}$), se fait dans un plan tournant du fait de l'anisotropie (Ω_A) et de la précession (Ω_F). L'orientation du plan est mesurée par l'angle $\theta(t)$ et la position de la sphère par ses coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ (figure 21). On choisit de représenter la position de la sphère par la fonction complexe

$$u(t) = x(t) + j y(t) = (A \cdot \cos(\omega_x t) + j B \cdot \cos(\omega_y t)) \cdot e^{j\theta(t)}. \quad (49)$$

```
% anisotropie => wx ~= wy => ellipse
% précession => plan tournant
R = 1; beta = pi/4; % CI entre les axes d'anisotropie
A = R*cos(beta); B = R*sin(beta);
xe = A * cos(wx*tt); % coordonnées de l'ellipse
ye = B * cos(wy*tt);
ua = xe + j*ye; % évolution liée à l'anisotropie
theta = - Wp*tt; % précession liée à la latitude du lieu
ut = ua.*exp(j*theta); % rotation de l'ellipse
xt = real(ut); yt = imag(ut);
```

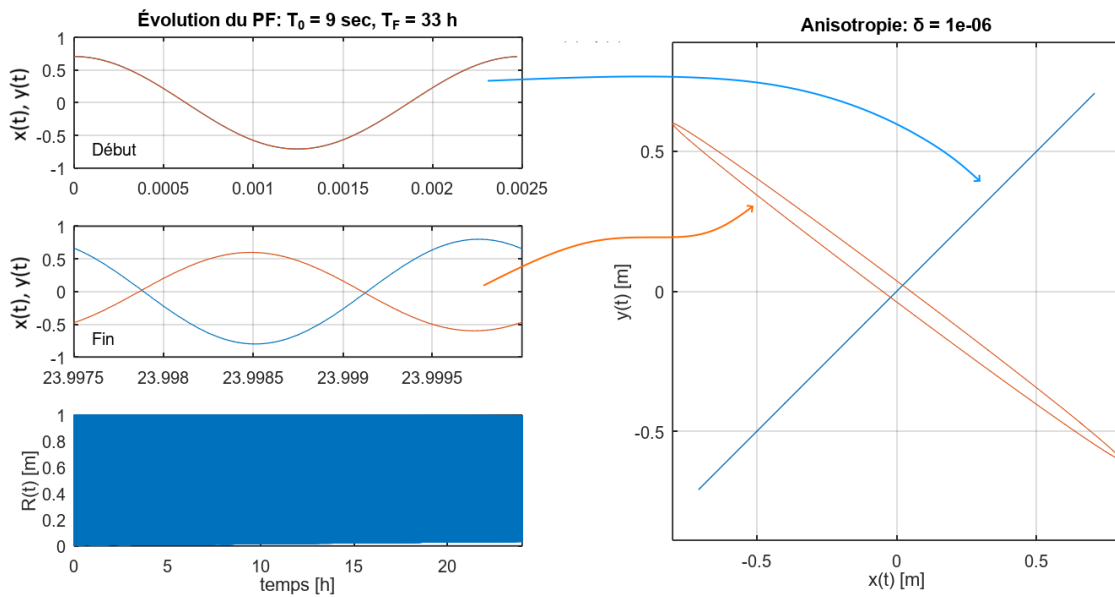


FIG. 21 : Évolution du PF pendant 24 heures

Comme les deux pulsations ω_x et ω_y sont très proches de ω_0 et que les périodes $T_0 = 9$ sec et $T_F = 33$ h sont très différentes, on voit que la fonction $u(t)$ peut être décomposée en produit d'une fonction rapide, $f(t/T_0)$, et d'une fonction lente, $g(t/T_F)$, pouvant s'écrire sous la forme

$$u(t) \simeq R(t) \cdot e^{j\theta(t)} \cdot e^{j\omega_0 t} = f(t/T_0) \cdot g(t/T_F) \quad (50)$$

avec

$$R(t) = A(t) + jB(t). \quad (51)$$

Admettant que la fonction lente $g(t) = R(t) \cdot e^{j\theta(t)}$ est une fonction constante pendant quelques périodes T_0 , la dérivée de $u(t)$ vaut

$$u'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \quad (52)$$

$$\simeq f'(t)g(t) + 0$$

$$\simeq j\omega_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot \left(R(t) e^{j\theta(t)} \right)$$

$$u'(t) \simeq j\omega_0 \cdot u(t). \quad (53)$$

Définissant

$$\zeta(t) = u(t) + \frac{1}{j\omega_0}u'(t) \simeq 2u(t) = 2 \left(R(t) e^{j\theta(t)} \right) \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad (54)$$

la partie lente s'obtient par démodulation $e^{-j\omega_0 t}$

$$\zeta(t) e^{-j\omega_0 t} = 2R(t) e^{j\theta(t)} \quad (55)$$

dont on tire (figure 22)

$$\theta(t) = \angle \left(\zeta(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \right) - \angle R(t), \quad (56)$$

$$Z(t) = \left| \zeta(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \right| = |2R(t)|. \quad (57)$$

Il est important de relever que cette approche, à cause de la dérivation, n'est utilisable que si les variables $x(t)$ et $y(t)$ sont peu bruitées.

Le code à introduire dans la boucle de calcul est alors le suivant

```

ut = xt(n) + j*yt(n) ;
ud = xd(n) + j*yd(n) ;
zeta = (ut + ud/j/w0) ;
zeta = zeta * exp(-j*w0*t(n)) ;
theta(n) = angle(zeta) ;
Zeta(n) = abs(zeta) ;

```

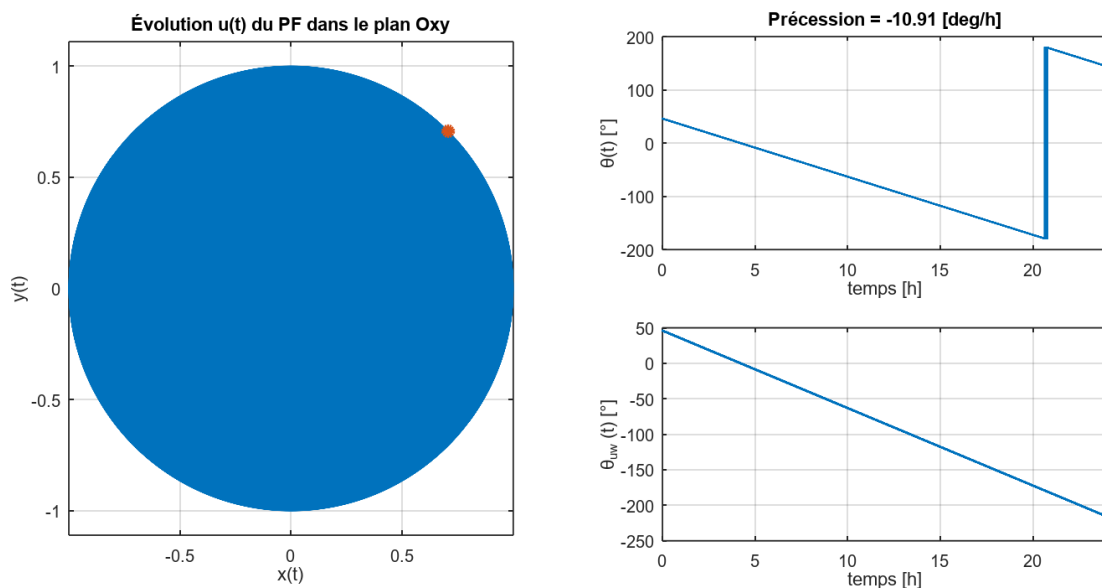


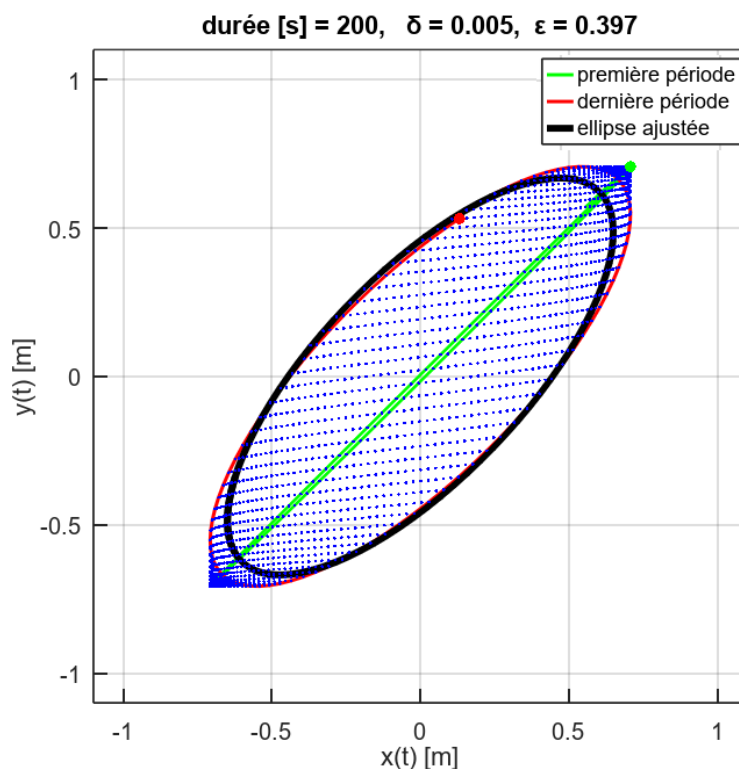
FIG. 22 : Extraction de l'angle de précession $\theta(t)$ ($\delta = 10^{-6}$)

9.4 Paramètres de l'ellipse

La figure 23 illustre l'évolution du pendule pendant 20 périodes environ avec une anisotropie élevée ($\delta = 0.005$) afin d'illustrer les résultats d'un ajustage elliptique sur une période d'oscillation.

On y voit la première période en vert et la dernière en rouge dont l'ellipticité atteint pratiquement 40% en 200 secondes alors que la précession augmente très faiblement (environ 1°). Le tracé en noir de l'ellipse ajustée montre que, à cause de la forte anisotropie, les périodes considérées ne forment pas exactement des ellipses.

Le calcul des paramètres de l'ellipse est basé sur les projections $x(t)$ et $y(t)$ d'une période T_0 dont on extrait les amplitudes A_x, A_y et les phases φ_x, φ_y en calculant le premier harmonique de la série de Fourier (section 11.3). Puis, on en déduit les axes a, b de l'ellipse et son sens de rotation.



9.5 Effets de la force de Coriolis et de l'anisotropie

Les figures 24 et 25 résument l'essentiel des informations intéressantes.

Pour l'évolution de la précession pendant 2 jours (figure 24), on observe que

1. la vitesse de précession est très légèrement supérieure à la valeur théorique,
2. la période double des ondulations des résidus et de l'ellipticité est à 1% de la valeur théorique

$$T_F = \frac{360 \text{ deg}}{11.0 \text{ deg/h}} = 32.7 \text{ h} \simeq 33 \text{ h} = T_{lat}.$$

3. les résidus, causés par l'anisotropie, oscillent entre ± 1 deg et sont sensiblement inférieurs à ceux observés dans la série de mesures.

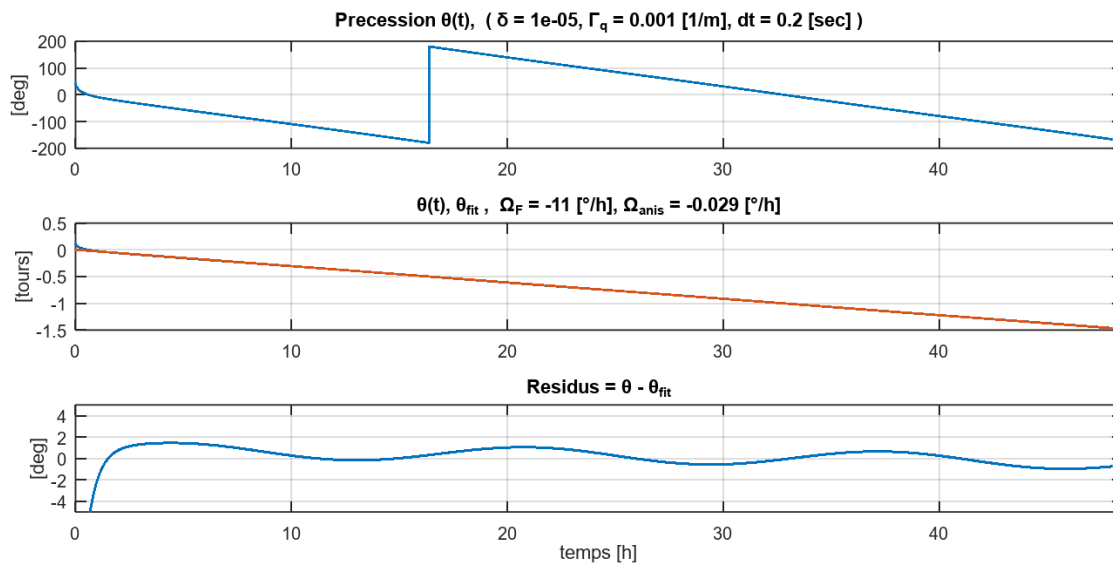


FIG. 24 : Précession du PF pendant 48 h

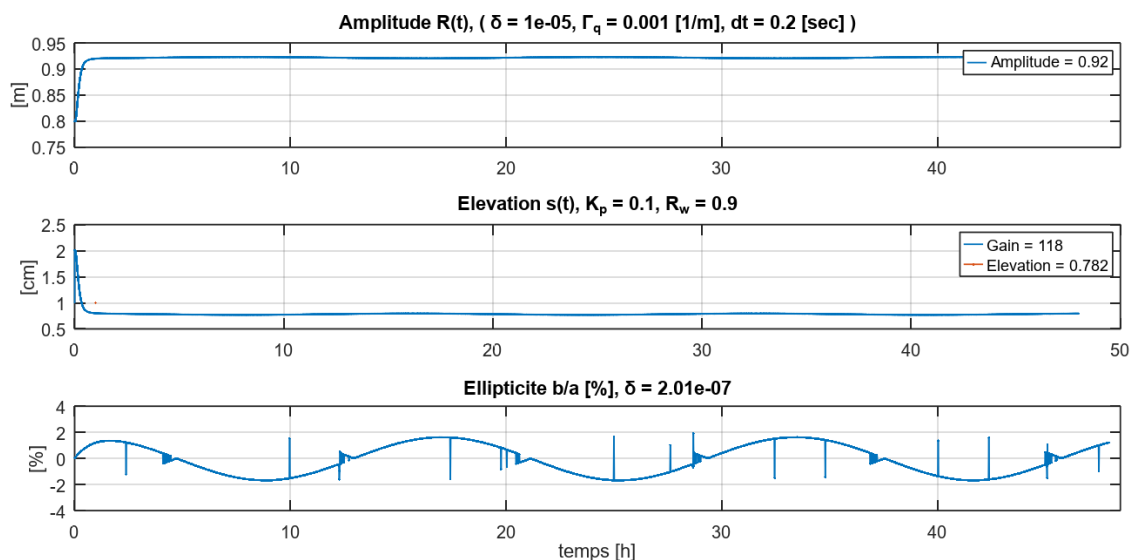


FIG. 25 : Amplitude, élévation, ellipticité pendant 48 h

Les évolutions de l'amplitude et de l'ellipticité (figure 25) montrent que :

1. grâce à l'adaptation de l'excitation, l'amplitude $R(t)$ du mouvement est pratiquement constante et se situe à 2 cm de la valeur souhaitée $R_w = 90$ cm,
2. l'ellipticité varie entre $\pm 2\%$; elle correspond à la valeur observée dans la série de mesures.

10 Conclusion

Le pendule de Foucault de la HEIG-VD constitue un dispositif expérimental remarquable par la durée de ses observations et par l'évolution de ses configurations mécaniques depuis son installation en 1995. Les différentes campagnes de mesure présentées dans ce travail, couvrant trois

décennies, permettent de comparer plusieurs états de la suspension et de mettre en évidence l'intérêt d'une suspension rigide ainsi que celui de l'entretien paramétrique du mouvement.

Au cours de ces trente années, la vitesse moyenne de précession est demeurée proche de la valeur théorique fixée par la latitude du lieu. Les enregistrements montrent également que, malgré les imperfections expérimentales et les erreurs de mesure, il reste possible d'analyser finement le comportement du pendule et de mettre en évidence le rôle joué par l'anisotropie de la suspension.

L'étude spectrale des résidus de la précession révèle plusieurs périodicités dont certaines peuvent être reliées à l'anisotropie du système, tandis que d'autres semblent corrélées à des effets environnementaux, tels que l'activité du bâtiment ou les variations thermiques extérieures. Ces interprétations doivent toutefois être considérées comme des hypothèses plausibles plutôt que comme des résultats définitifs.

Au-delà de la démonstration classique de la rotation terrestre, ces observations montrent que le pendule de Foucault réel se comporte comme un système dynamique faiblement perturbé et sensible à son environnement. Les longues séries temporelles disponibles à la HEIG-VD offrent ainsi une opportunité rare d'observer l'influence cumulative de perturbations très faibles sur un oscillateur presque idéal.

L'expérience de Foucault, conçue à l'origine comme une démonstration spectaculaire de la rotation de la Terre, se révèle ainsi, dans sa version instrumentée et observée sur de longues durées, comme un discret laboratoire de physique expérimentale.

11 Annexes

11.1 Quelques pendules de Foucault

Lieux	Pays	L [m]	Années	Suspensions
Panthéon, Paris	FR	67	1995	Charron
Deutches Museum, Munich	DE	60	2022	–
University of Louisville	US	28	1978	Électromag.
Collégiale Sainte-Waudru, Mons	BE	25	2005	–
ONU, New-York	US	23	1955	Électromag.
Science Museum, Londres	GB	20	1988	Paramétrique
HEIG-VD, Yverdon-les-Bains	CH	20	1995	Paramétrique
Universität Osnabrück	DE	19	1995	Charron
California Academy, San-Francisco	US	10	2008	Couteaux

11.2 Amplitude et frottement quadratique

Dans ce qui suit, on souhaite évaluer la relation entre l'amplitude A de l'oscillation du pendule et celle de l'élévation s_0 de la masse m lorsque le PF est soumis à un frottement quadratique

$$F_f(t) = -m\gamma |v(t)|v(t). \quad (58)$$

Pour ce faire, on doit évaluer et comparer les énergies dissipée et fournie.

Énergie dissipée Le travail de la force de frottement pendant une période vaut

$$W_f = \int_0^{T_0} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -m\gamma \int_0^{T_0} v(t)|v(t)| dt. \quad (59)$$

Considérant

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \Rightarrow v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

il vient

$$\begin{aligned} W_f &= -m\gamma \int_0^{T_0} |v(t)|v(t) dt = -m\gamma \int_0^{T_0} |v(t)|^3 dt \\ &= -m\gamma (A\omega_0)^3 \frac{1}{\omega_0} \int_0^{2\pi} |\sin(\omega_0 t)|^3 d(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Sachant que cette intégrale vaut $8/3$, on obtient l'énergie dissipée pendant une période

$$\begin{aligned} W_f &= -\frac{8m}{3} \gamma A^3 \omega_0^2 \\ W_f &= -\frac{8m}{3} \gamma A^3 \frac{g}{L}. \end{aligned} \quad (60)$$

Tension dans le câble L'énergie fournie par l'élévation de la masse du pendule est égale au travail de la tension T dans le câble qui est égale à la somme de la force centrifuge et de la projection de mg sur le câble

$$T = m \frac{v^2}{L} + mg \cos(\varphi) \quad \text{avec } v = \dot{\varphi}L. \quad (61)$$

En égalant les énergies cinétique et potentielle $E_c = E_p$, on a

$$\begin{aligned} E_c = \frac{m v^2}{2} = E_p = mgL (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_{max})) & \quad (62) \\ \simeq mgL \left(\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{\varphi_{max}^2}{2}\right) \right), \quad \varphi \ll 1 \\ m \frac{v^2}{L} \simeq 2mg \left(-\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi_{max}^2}{2} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} T & \simeq mg \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} - \varphi^2 + \varphi_{max}^2 \right) \\ & \simeq mg \left(1 - 3\frac{\varphi^2}{2} + \varphi_{max}^2 \right). \end{aligned}$$

Comme on soulève la masse selon

$$s(t) = s_0 \cos(2\omega_0 t), \quad (63)$$

il faut ajouter son effet sur l'accélération g

$$\begin{aligned} g \rightarrow g + \ddot{s}(t) & = g - 4\omega_0^2 s_0 \cos(2\omega_0 t) \\ & = g \left(1 - 4\frac{s_0}{L} \cos(2\omega_0 t) \right) \end{aligned}$$

et la tension T vaut alors

$$T(t) = mg \left(1 - 4\frac{s_0}{L} \cos(2\omega_0 t) \right) \left(1 - 3\frac{\varphi^2(t)}{2} + \varphi_{max}^2 \right). \quad (64)$$

Énergie fournie Le travail effectué par cette force vaut

$$\begin{aligned} W_s & = \int T(t) \frac{ds}{dt} dt \\ & = \int T(t) 2\omega_0 s_0 \cos(2\omega_0 t) dt \\ W_s & = \pi mg s_0 \varphi_{max}^2 \simeq \pi mg s_0 \left(\frac{A}{L} \right)^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Amplitude de l'oscillation Comme à l'équilibre, les deux énergies sont égales

$$W_f = \frac{8m}{3} \gamma A^3 \frac{g}{L} \quad (66)$$

$$W_s = \pi mg s_0 \left(\frac{A}{L} \right)^2, \quad (67)$$

on en déduit l'amplitude en régime entretenu

$$A = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\gamma} \frac{s_0}{L} \quad (68)$$

et le gain de l'oscillateur paramétrique

$$G_{osc} \equiv \frac{A}{s_0} = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{\gamma L}. \quad (69)$$

11.3 Paramètres d'une ellipse

La recherche des paramètres d'une ellipse est basé sur les projections $x(t)$ et $y(t)$ d'une période T_0 de la fonction considérée (fig. 26). On en extrait alors les amplitudes et les phases $A_x, A_y, \varphi_x, \varphi_y$ en calculant le premier harmonique de la série de Fourier [3].

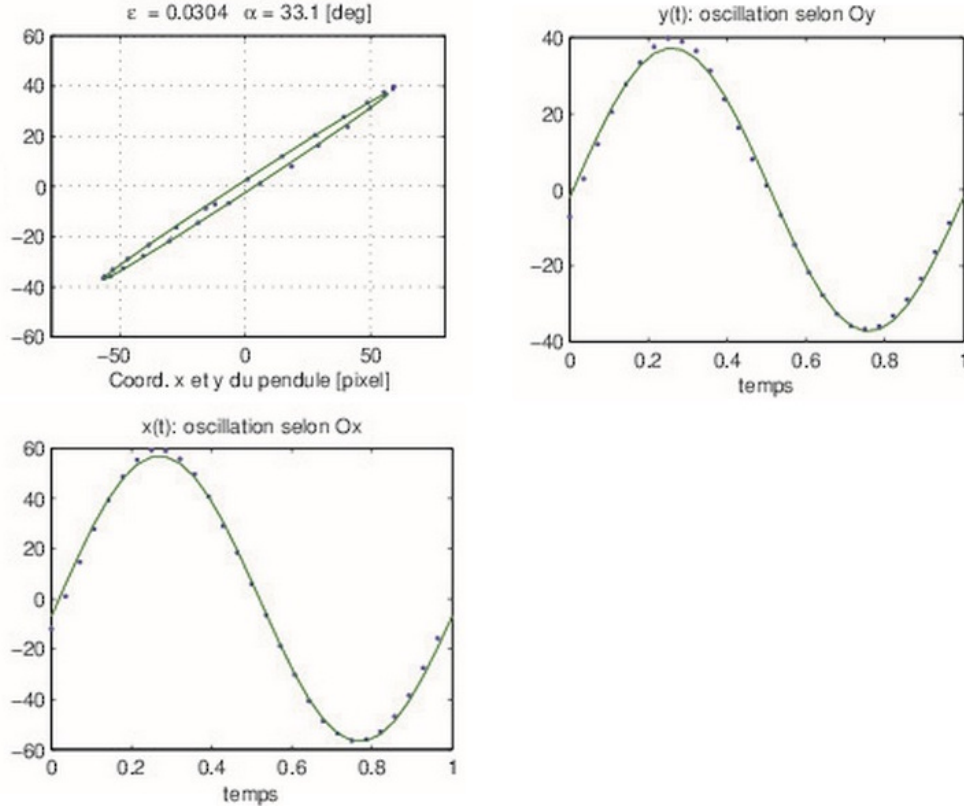


FIG. 26 : Paramétrage d'une période d'oscillation du PF

Considérant que $x(t)$ et $y(t)$ sont mesurés aux instants $t = nT_e$ avec $T_e = T_0/N$, les premiers termes des deux séries de Fourier valent

$$c_x(1) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad (70)$$

$$\simeq \frac{T_e}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f_0 n T_e} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n/N} \quad (71)$$

$$c_y(1) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad (72)$$

$$\simeq \frac{T_e}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi f_0 n T_e} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi n/N} \quad (73)$$

On en tire alors les amplitudes et les phases de l'oscillation du terme d'ordre 1

$$A_x = 2 |c_x|, \quad \varphi_x = \arg(c_x) \quad (74)$$

$$A_y = 2 |c_y|, \quad \varphi_y = \arg(c_y) \quad (75)$$

ainsi que les évolutions temporelles

$$x(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (76)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (77)$$

On notera que la trajectoire du pendule $y(x)$ est une droite si $\varphi_x = \varphi_y$. Dans le cas contraire ($\varphi_x \neq \varphi_y$), la trajectoire est une ellipse dont l'ellipticité dépend de la différence de phase. Pour les calculs qui suivent, on définit donc

$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x \quad (78)$$

Cette ellipse, représentée par les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, peut être décrite dans sa forme quadratique classique

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{x}{A_x}\frac{y}{A_y}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi) \quad (79)$$

ou

$$A_y^2 x^2 + A_x^2 y^2 - 2A_x A_y \cos(\Delta\varphi) x y = A_x^2 A_y^2 \sin^2(\Delta\varphi) \quad (80)$$

dont on tire la forme matricielle

$$(x, y) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_x^2 A_y^2 \sin^2(\Delta\varphi) \quad (81)$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} A_y^2 & -A_x A_y \cos(\Delta\varphi) \\ -A_x A_y \cos(\Delta\varphi) & A_x^2 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Sachant que les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de cette matrice sont les carrés des axes principaux a et b de l'ellipse, on obtient

$$a^2 = \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(A_x^2 + A_y^2 + \sqrt{A_x^4 + A_y^4 + 2 A_x^2 A_y^2 \cos(2\Delta\varphi)} \right) \quad (83)$$

$$b^2 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(A_x^2 + A_y^2 - \sqrt{A_x^4 + A_y^4 + 2 A_x^2 A_y^2 \cos(2\Delta\varphi)} \right). \quad (84)$$

ainsi que l'orientation α de l'ellipse par rapport à l'axe Ox et son ellipticité

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{2 A_x A_y \cos(\Delta\varphi)}{A_x^2 - A_y^2} \right), \quad \epsilon = \frac{b}{a}. \quad (85)$$

Et le sens de rotation est déterminé par le produit vectoriel entre les vecteurs position et vitesse

$$\text{sens} = \operatorname{signe}(x(t) \cdot \dot{y}(t) - \dot{x}(t) \cdot y(t)). \quad (86)$$

11.4 Algorithme de Lomb-Scargle

L'algorithme du périodogramme de Lomb-Scargle a été développé dans les années 1970 et 1980, avec des contributions clés de Peter Lomb en 1976 et de Joseph Scargle en 1982, pour détecter la périodicité dans des séries temporelles échantillonnées de manière irrégulière [11, 13]. Il est particulièrement utilisé en astrophysique et en biologie.

Principe de base

Pour chaque pulsation ω préchoisie, on ajuste un modèle sinusoïdal au sens des moindres carrés en optimisant un décalage temporel τ pour orthogonaliser les fonction sin et cos. Cela équivaut à une transformée de Fourier discrète généralisée, sans besoin d'échantillonnage régulier.

La puissance spectrale $P(\omega)$ se calcule via :

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sum y_i \cos(\omega(t_i - \tau)))^2}{\sum \cos^2(\omega(t_i - \tau))} + \frac{(\sum y_i \sin(\omega(t_i - \tau)))^2}{\sum \sin^2(\omega(t_i - \tau))} \right] \quad (87)$$

où τ est un décalage optimisant l'ajustement. Ce décalage rend les fonctions cosinus et sinus orthogonales aux temps t_i , améliorant la précision de l'ajustement par moindres carrés. Sans cela, le périodogramme est biaisé pour des échantillonnages irréguliers.

Code de l'algorithme Lomb-Scargle

```

function P = LombScargle(t, y, f)
    N = length(t);
    P = zeros(size(f));
    % --- Pour chaque fréquence f(k)
    for k = 1 :length(f)
        omega = 2*pi*f(k);
        % --- Calcul du décalage optimal tau
        y = sum(sin(2*omega*t));
        x = sum(cos(2*omega*t));
        tau = 0.5 * atan2(y, x);
        % --- Arguments ajustés avec tau
        wt = omega * (t - tau);
        % Sommes pour cos et sin
        C = sum(y .* cos(wt) );
        S = sum(y .* sin(wt) );
        CC = sum(cos(wt).^2 );
        SS = sum(sin(wt).^2 );
        % --- Puissance de chaque fréquence f(k)
        P(k) = 0.5 * ((C^2 / CC) + (S^2 / SS));
    end
end

```

Incertitudes sur les périodes calculées

L'analyse par périodogramme de Lomb-Scargle, bien que robuste face aux données irrégulières, est soumise à des contraintes de détection liées à la durée finie de l'enregistrement.

On sait qu'une analyse spectrale est déterminée par l'incrément temporel Δt et la durée d'analyse t_{max} . Dans le cas d'un échantillonnage régulier, on a $t_{max} = N \cdot \Delta t$ et il vient

$$\Delta f = \frac{1}{t_{max}}, \quad f_{max} = \frac{1}{\Delta t}, \quad (88)$$

$$\Delta f \cdot \Delta t = \frac{1}{t_{max}} \cdot \frac{t_{max}}{N} = \frac{1}{N}. \quad (89)$$

Les résolutions temporelle et fréquentielle ne sont donc pas indépendantes ; elle dépendent directement du nombre d'échantillons enregistrés. Comme le théorème de Shannon limite le domaine des fréquences analysées à la moitié de f_{max} , les domaines fréquentiel et temporel sont limités par

$$\frac{1}{t_{max}} \leq f \leq \frac{1}{2 \Delta t}, \quad (90)$$

$$2 \Delta t \leq T \leq t_{max}. \quad (91)$$

Comme $T = 1/f$, on montre que l'incertitude relative augmente proportionnellement à T

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \frac{T}{t_{max}} \quad (92)$$

et que l'incertitude de la valeur estimée est proportionnelle au carré de sa valeur

$$\Delta T = \frac{T^2}{t_{max}}. \quad (93)$$

On voit ainsi qu'elle devient rapidement trop importante. C'est pourquoi il est recommandé de ne pas analyser des périodes supérieures au tiers de la durée d'analyse (33% d'incertitude), d'où

$$2 \Delta t < T < \frac{t_{max}}{3}. \quad (94)$$

Algorithmes LS vs FFT

Contrairement à la FFT, l'algorithme de Lomb-Scargle est particulièrement utile pour analyser des phénomènes dont les temps caractéristiques sont très différents ; de quelques secondes à plusieurs jours pour le PF.

Ce qui distingue ces deux algorithmes c'est la répartition des fréquences analysées et la contrainte sur la régularité des échantillons.

- 1) Dans la FFT, la répartition des fréquences est répartie linéairement entre Δf et $f_{max}/2$

$$\Delta f = \frac{1}{t_{max}} \leq f_k \leq \frac{f_{max}}{2} = \frac{1}{2 \Delta t} = \frac{N}{2} \Delta f \quad (95)$$

où N est le nombre de valeurs enregistrées. Ainsi, les périodes longues sont mal résolues puisqu'elles valent $T_k = t_{max}/k$ avec $k = 2, 3, 4, \dots, N$. Par exemple, pour un enregistrement de 30 jours, on ne peut résoudre que les périodes 15j, 7.5j, 3.75j, etc.

Par contre, un avantage important de la la FFT est le fait qu'elle possède sa fonction inverse permettant la reconstruction du signal.

- 2) Dans l'algorithme de LS, les périodes sont librement choisies, des plus petites aux plus grandes. On choisit généralement une répartition logarithmique sur plusieurs décades. En choisissant, par exemple, 800 points par décade, la raison de la suite de périodes vaut $10^{1/800} = 1.0029$ qui conduit à une définition bien supérieure à celle de la FFT comme le montre la figure 27.

Cette fine résolution en hautes et basses fréquences permet de faire ressortir les phénomènes courts liés aux anisotropies du PF aussi bien que les phénomènes lents causés par l'ensoleillement.

La fonctionnalité la plus utile de LS est de permettre l'analyse spectrale d'enregistrements incomplets, sans devoir manipuler les données, aux fréquences souhaitées dans un large domaine de fréquences.

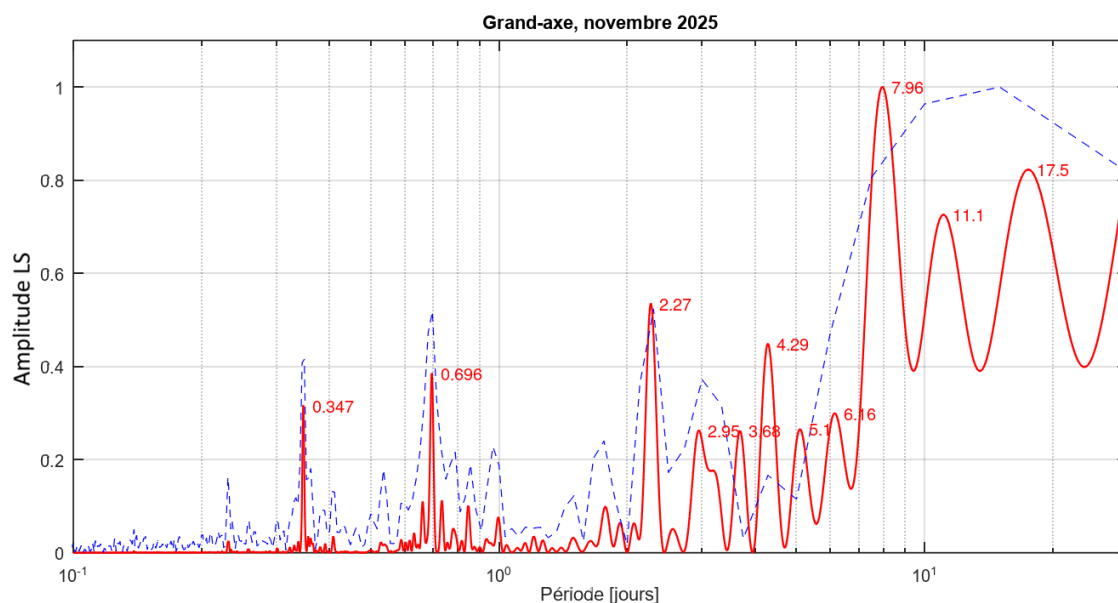


FIG. 27 : a) Périodogramme LS évalué sur 2000 périodes choisies entre 0.1 et 30 jours
b) Périodogramme FFT avec $t_{max} = 30$ jours et $\Delta t = 1$ mn (43'200 points)

11.5 Commande, motorisation et mesure de la position

En 2023, pendant son Travail de bachelor, Adrien Cardinale, a conçu et mis en place l'ensemble de la commande du PF avec le nouveau système de vision de la sphère du pendule.

Puis, il remplace les couteaux-croisés par une suspension rigide. Celle-ci est constituée d'un fil d'acier de 4 mm de diamètre et 2 m de long solidement ancré dans la plateforme de suspension et fixé au fil du pendule de 1mm de diamètre à l'aide d'une pince ; le tout formant un ensemble de 20 m de long.



FIG. 28 : Caméra (à gauche) et moteur (au centre)

Commande et contrôle en temps réel

L'ensemble est géré par un PC Windows via :

- un *Raspberry Pi Compute Module 4* comme passerelle réseau,
- un serveur web afin d'afficher en temps réel les mesures effectuées sur le pendule.

Motorisation du PF

L'ensemble de la motorisation comprend des éléments de la société *Etel SA* :

1. un régulateur *Etel AccurET 48* qui commande deux moteurs en fonction de la consigne de position qui lui est fournie,
2. un moteur linéaire *Etel ILF+09-030* installé sur le système mécanique d'élévation du PF.

Capteur de position de la sphère

Ce système est constitué de

1. un éclairage infrarouge pour s'extraire des perturbations extérieures (*IR LED Osram*, 850 nm),
2. un catadioptré placé sur le haut de la sphère permettant de connaître précisément sa position,
3. un filtre optique monté sur l'objectif de la caméra (*Schott*, *RG-715 nm*, 22mm),
4. un système industriel de vision *IN-Sight 7200* intégrant une caméra *Cognex* avec son objectif 16mm *Fujinon HF16XA-5M* et le traitement d'images.

La caméra observe un carré de 4m de côté avec une précision inférieure au cm. Le calibrage du système a permis de corriger la distorsion induite par l'objectif.

11.6 Travaux de diplôme ou bachelor autour du PF

1995	Construction d'un mécanisme d'entraînement d'un pendule de Foucault (Claude Mahon)
1995	Commande et acquisition des données d'un pendule de Foucault (Pascal Neuwerth)
1997	Visualisation et mesures du pendule de Foucault (Giuseppe Catanese)
1998	Entretien et contrôle du mouvement d'un pendule de Foucault à l'aide d'un microcontrôleur (Diego Gonzalez)
2000	Commande d'un pendule de Foucault à l'aide d'un microcontrôleur (Vincent Mack)
2011	Conception d'un système de mesure et d'analyse de la vitesse de précession (Patrick Schletti)
2014	Système d'entretien des oscillations d'un pendule de Foucault (Yoann Jossevel)
2023	Pendule de Foucault à la HEIG-VD dans sa version 4.0 (Adrien Cardinale)
2024	Mécanisme d'entretien d'un pendule de Foucault par lames flexibles (Evan Rochat)

12 Le pendule de Foucault au Panthéon à Paris

« Vous êtes invités à venir voir tourner la Terre »

Léon Foucault, 1851



FIG. 29 : Au Panthéon, la belle histoire du pendule de Foucault (LP/Delphine Goldsztejn)



(Winkle-Picker)

12.1 Histoire du pendule de Foucault

https://francearchives.gouv.fr/fr/pages_histoire/40108

C'est en janvier 1851, que Léon Foucault né en 1819, monte, dans la cave voûtée de son domicile rue d'Assas, son expérience princeps. Elle va montrer qu'un simple pendule, en oscillant, révèle des effets très ténus de la rotation de la Terre. Pour cela, il installe un fil métallique de deux mètres de long supportant un lourd poids de fonte. Le 8 du mois, il découvre, vers deux heures du matin, la réalité d'un mouvement minuscule, mais qui est l'indice, pour qui sait l'interpréter, d'un mouvement grandiose.

" Le phénomène se développe avec calme, il est fatal, irrésistible (...) On sent, en le voyant naître et grandir, qu'il n'est pas au pouvoir de l'expérimentateur d'en hâter ni d'en retarder la manifestation. Tout homme mis en présence du fait demeure quelques instants pensifs et silencieux, et généralement il se retire, emportant par-devers lui un sentiment plus pressant et plus vif de notre incessante mobilité dans l'espace ", écrit-il.

Jusqu'ici, personne parmi les scientifiques et ceux qui les avaient compris, ne doutait que nous vivions une situation de double mouvement. Le premier, immense, nous emporte chaque année pour un tour complet autour de l'étoile Soleil. Le second est ce mouvement qui rythme la suite de nos jours et de nos nuits. Mais jusqu'ici, les preuves de ce mouvement ne pouvaient être construites que par l'observation des étoiles. Elles étaient donc " externes ". Foucault, d'un seul coup, par son intelligence observatrice, grâce à ce talent si rare, celui de vrai découvreur, produit une preuve " interne " de ce mouvement de la Terre sur elle-même. [...]

Il est extrêmement rare qu'une découverte scientifique connaisse un succès public analogue à ce qui s'est produit dans le premier trimestre de cette année 1851. Grâce à l'appui de François Arago, moins d'un mois plus tard, Foucault peut installer aux yeux de tous son expérience. Le 3 février 1851, certains reçoivent une invitation ainsi libellée : " Vous êtes invités à venir voir tourner la Terre dans la salle méridienne de l'Observatoire de Paris. "

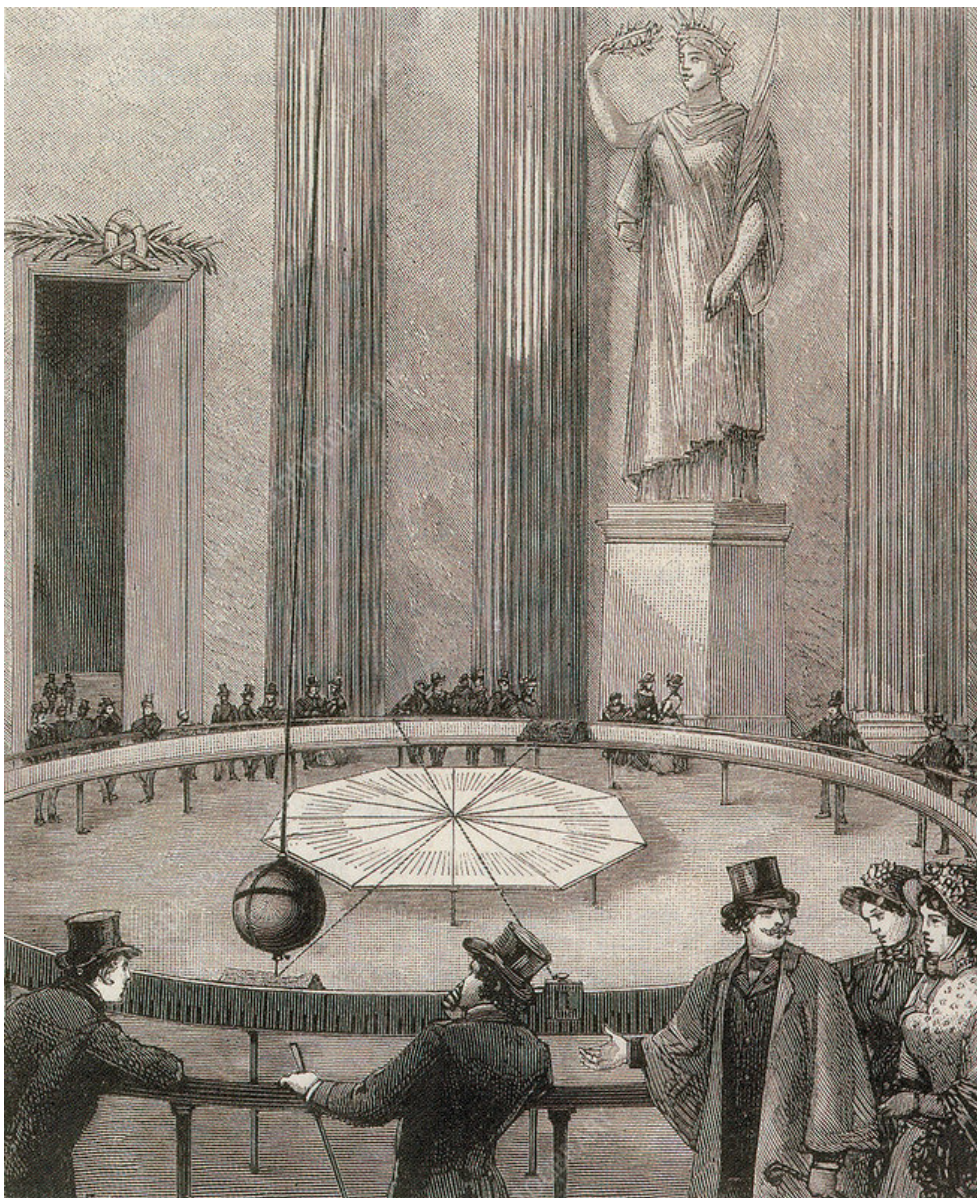
Le pendule mesure cette fois onze mètres de haut. Ses oscillations sont plus longues et sa déviation est, bien sûr, plus sensible, plus manifeste aux yeux du public. Un peu plus tard, grâce, cette fois, à l'autorité de Louis Bonaparte, et à son goût pour les sciences, une nouvelle mouture du pendule va être offerte aux yeux des Parisiens.

" Sous les voûtes élevées de certains édifices le phénomène devait prendre une ampleur magnifique. Nous avons trouvé dans le Panthéon un emplacement merveilleusement approprié à l'installation d'un pendule gigantesque ; nous avons trouvé pareillement dans l'administration les dispositions les plus favorables à l'exécution du projet que suggérait la vue de cette immense coupole " écrit Foucault.

C'est le 31 mars 1851, que les Parisiens vont venir, en masse semble-t-il, essayer de comprendre comment la Terre tourne sur elle-même. Dans cette nouvelle disposition, la longueur du fil d'acier est de soixante-sept mètres, le globe très dense, d'un diamètre de dix-huit centimètres, son poids : vingt-huit kilogrammes. Le 31 mars, le pendule a été mis en branle avec un luxe de précautions.

" Après une oscillation double de 16 secondes de durée, on l'a vu revenir à 2 millimètres et demi environ à gauche du point de départ. Le même effet continuant à se produire à chaque oscillation, la déviation a été grandissant toujours plus, proportionnellement au temps." écrit Foucault,

Le coup d'État du Prince-président, en décembre 1851, va rendre le Panthéon au culte catholique et arrêter là la belle expérience de physique avant qu'on en eût tiré toutes les conclusions qui paraissaient en ressortir.



Léon Foucault fait la démonstration de la rotation de la Terre au Panthéon le 31 mars 1851
(Science Photo Library)

Pour l'Exposition universelle de Paris, en 1855, Foucault installe, cette fois, dans le Palais de l'industrie un pendule assisté électromagnétiquement. C'est ce pendule, remonté dans la chapelle de l'ancienne abbaye de Saint-Martin-des-Champs, qui continue à faire les délices des visiteurs du Musée des arts et métiers.

En 1902, la Société astronomique de France, présidée par Henri Poincaré, se propose de " voir renouveler sous le dôme du Panthéon la belle et instructive expérience de Foucault, interrompue par le coup d'État de décembre 1851." Le 22 octobre de cette année, y est installée une nouvelle mouture du pendule de Léon Foucault. Plus de deux mille personnes sont présentes pour venir assister à la célèbre expérience de physique.

Enfin, c'est en 1995, que le pendule de 1851 est rétabli dans ce théâtre de grandeur qu'est le Panthéon.

Stéphane Deligeorges, journaliste, chroniqueur scientifique à France Culture

Références

- [1] Éric Lambert. *Étude pour un pendule de Foucault*, einev, février 1995
- [2] Georges Derron. *Notes sur l'entretien des oscillations d'un pendule de Foucault*, einev, juin 1995
- [3] Jean-Louis Chassot, communication privée, einev, janvier 1997
- [4] N.N Salva, H.R. Salva. *Interplay between Airy and Coriolis precessions in a real Foucault pendulum*. 17.02.2025
- [5] A. B. Pippard, *The parametrically maintained Foucault pendulum and its perturbations*. Proc.R. Soc. Lond. (1988)
- [6] M. G. Olsson. *The precessing spherical pendulum*. American Journal of Physics, 46, 1978.
- [7] G.B. Airy. *On the motion of a pendulum suspended from two different points*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1851.
- [8] R. H. Crane, *A Foucault Pendulum "Wall Clock"*, American Journal of Physics, 63, 33–39 (1995).
- [9] N. R. Lomb, *Least-squares frequency analysis of unequally spaced data*, Astrophysics and Space Science, 39, 447–462 (1976).
- [10] J. D. Scargle, *Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data*, The Astrophysical Journal, 263, 835–853 (1982).
- [11] J. T. VanderPlas, *Understanding the Lomb–Scargle periodogram*, The Astrophysical Journal Supplement Series, 236, 16 (2018).
- [12] D. W. Maguire, *Earth tides*, <https://www.ebsco.com/research-starters/earth-and-atmospheric-sciences/earth-tides#earth-tides>, (2025).
- [13] Google, Weisang Spectral Analysis Option, *Fourier Spectrum for Unevenly Sampled Data*.

