

# 8 Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques

## 8.1 Introduction

La plupart des signaux que l'on doit traiter et analyser tels que la parole, les signaux biologiques, sismiques, radars, audio ou vidéo sont analogiques par nature. C'est-à-dire qu'ils sont fonction d'une variable continue, le temps, et qu'eux-mêmes varient de manière continue. Ces signaux peuvent être traités analogiquement à l'aide de filtres par exemple. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors analogiques (figure 8.1).

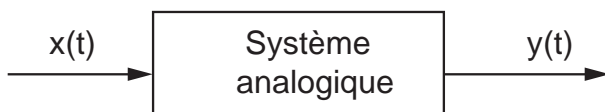


FIG. 8.1: Traitement analogique d'un signal  $x(t)$

Souvent, pour des raisons de simplicité, de précision, de stockage de l'information, de flexibilité, etc, un traitement numérique équivalent est possible et préférable. On utilise alors des convertisseurs analogiques-numériques (CAN) et numériques-analogiques (CNA) pour relier au processeur numérique les signaux analogiques d'entrée et de sortie. Le schéma correspondant est donné à la figure 8.2.

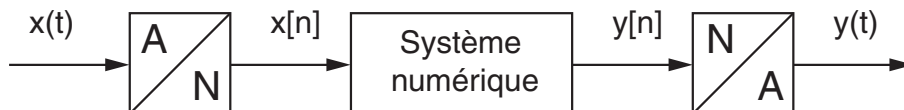


FIG. 8.2: Traitement numérique d'un signal analogique  $x(t)$

Conceptuellement, on peut considérer la conversion A-N comme un processus faisant intervenir trois actions successives : l'échantillonnage à période fixe  $T_e$ , la quantification du signal et son codage. Pratiquement, ces opérations sont effectuées dans un même élément, le convertisseur A-N, qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié.

De même pour la conversion N–A, les opérations implicitement réalisées sont la quantification et le maintien de la valeur numérique pendant une période d'échantillonnage. À ceci s'ajoute généralement un filtrage passe-bas des "escaliers" générés par le convertisseur N–A.

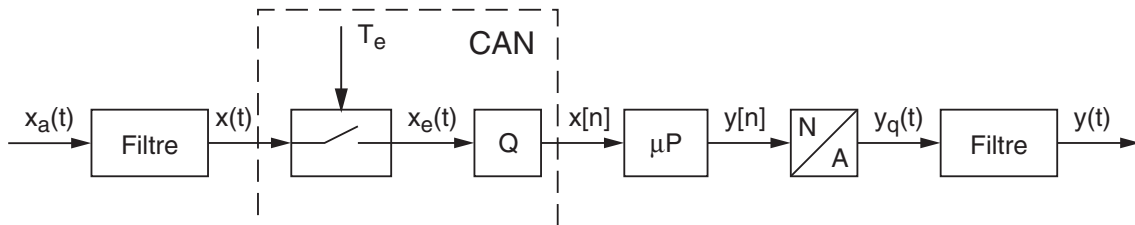


FIG. 8.3: Détail d'une chaîne analogique-numérique-analogique

La figure 8.3 présente les éléments qui interviennent lors du traitement numérique d'un signal analogique. On y trouve un filtre antirecouvrement (on verra plus loin sa raison d'être), un échantillonneur commandé par une horloge de période  $T_e$ , un quantificateur  $Q$ , un processeur numérique  $\mu P$ , un convertisseur N–A et un filtre de lissage.

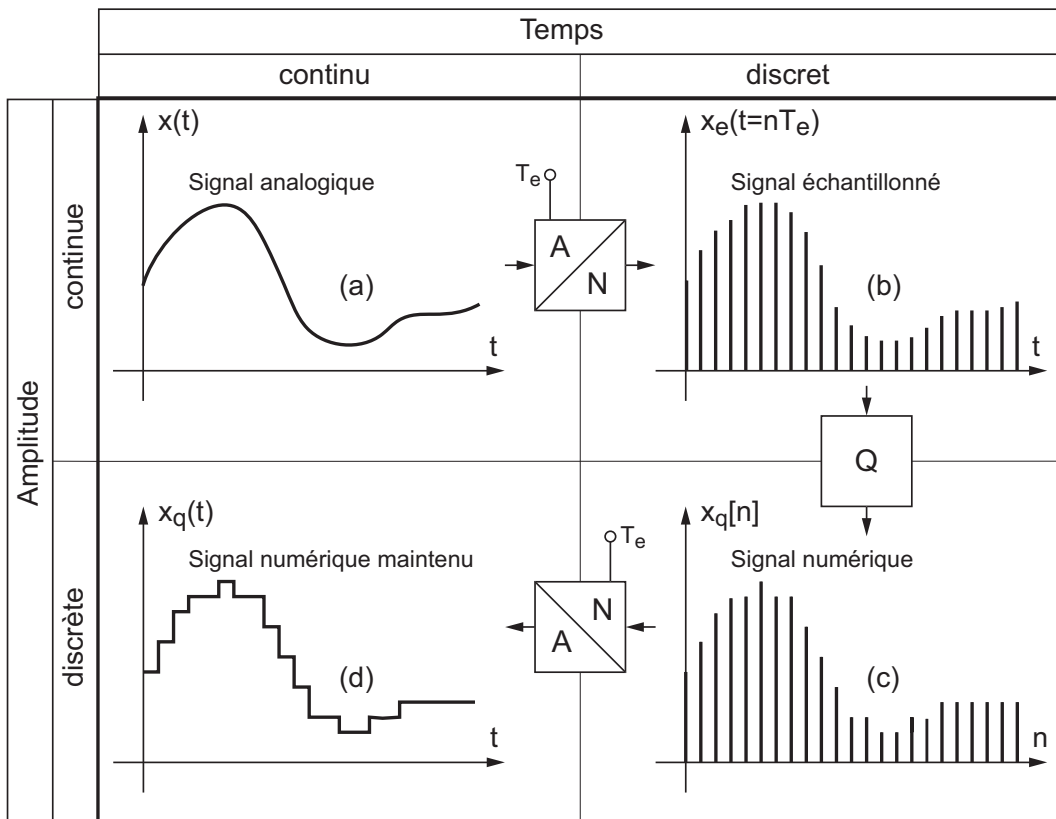


FIG. 8.4: Divers types de signaux

## 8.2 Analyse temporelle

### 8.2.1 Types de signaux

De manière générale, les signaux peuvent être classés dans les catégories suivantes :

1. **Signaux continus en temps et en amplitude** :  $x(t)$ . On les appelle également signaux analogiques (figure 8.4a) ; ils proviennent généralement de processus physiques.
2. **Signaux discrets en temps, continus en amplitude** :  $x_e(t = nT_e)$ . Ce sont les signaux échantillonnés (figure 8.4b). Ils ne sont définis qu'à des instants déterminés multiples de la période d'échantillonnage  $T_e$ , mais leur amplitude peut varier de manière continue.
3. **Signaux discrets en temps et en amplitude** :  $x_q[n]$ . De tels signaux sont quantifiés en amplitude ; ils ne peuvent prendre que des valeurs déterminées, généralement, multiples d'un pas de quantification. Ce sont les valeurs numériques fournies par les convertisseurs analogiques-numériques (CAN). Ils ne sont définis qu'aux instants d'échantillonnage et correspondent aux signaux numériques (figure 8.4c).
4. **Signaux continus en temps, discrets en amplitude** :  $x_q(t)$ . Ce sont des signaux quantifiés similaires à ceux décrits en 3, dont la valeur est maintenue par un bloqueur d'ordre zéro entre 2 périodes d'échantillonnage (figure 8.4d). Ces signaux correspondent à ceux fournis par les convertisseurs numériques-analogiques (CNA).

### 8.2.2 Quantification d'un signal : exemple

**Donnée** On considère un convertisseur A–N 8 bits travaillant entre 0 et 5.12 V avec un codage par arrondi et une période d'échantillonnage  $T_e = 0.5 [msec]$ . Le signal d'entrée est une exponentielle amortie :

$$x(t) = U_0 \exp(-t/\tau) \varepsilon(t) \quad U_0 = 1 [V] \quad \tau = 1 [ms]$$

#### Question

1. Tracez la caractéristique du convertisseur et les graphes  $x(t)$  et  $x_q[n]$ .
2. Quelles valeurs obtiendra-t-on pour  $x_e[n]$ ,  $x_q[n]$  et  $q[n]$ .

**Réponse** Le codage sur 8 bits par arrondi transforme le domaine de conversion de la tension d'entrée  $0 \cdots 5.12 [V]$  en  $2^8 = 256$  valeurs numériques discrètes avec un pas de quantification de 20 [mV] (figure 8.5a). L'échantillonnage et la quantification du signal sont représentés dans la figure 8.5b. Le tableau suivant donne les différentes valeurs demandées avec les erreurs relatives causées par la quantification :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_e[n]$	1.000	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183
$x_q[n]$	1.00	0.60	0.36	0.22	0.14	0.08	0.04	0.04	0.02
$q[n]$	50	30	18	11	7	4	2	2	1
$\epsilon_q[n]$ %	0.00	-1.08	-2.15	-1.39	+3.47	-2.56	-19.7	+32.5	+9.29

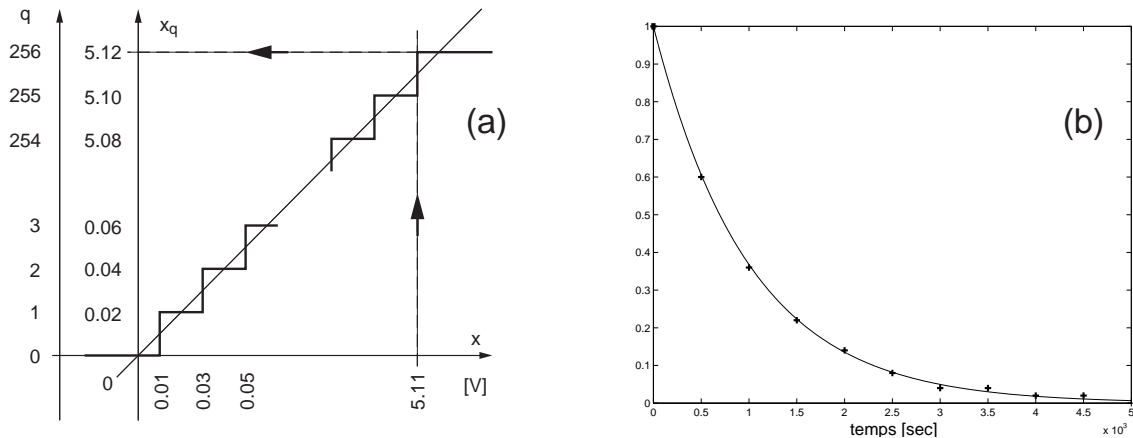


FIG. 8.5: Quantification et échantillonnage

### 8.2.3 Échantillonnage des signaux analogiques

Le signal d'entrée  $x(t)$ , dont l'amplitude varie au cours du temps, est appliqué à un échantillonneur pour être transformé en une suite de valeurs régulièrement espacées. Cette suite de valeurs est représentative du signal d'entrée dans la mesure où la période d'échantillonnage est compatible avec la rapidité du signal.

Envisagé dans le domaine temporel (figure 8.6), on peut considérer que le processus d'échantillonnage revient mathématiquement à multiplier le signal analogique  $x(t)$  par une suite d'impulsions de Dirac  $\delta_{T_e}(t)$  de période  $T_e$ , appelé "peigne de Dirac". Le signal échantillonné  $x_e(t)$  peut alors être représenté par l'expression :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad (8.1)$$

La fonction ainsi obtenue est une suite d'impulsions de Dirac dont la surface est modulée par le signal  $x(t)$ . Bien entendu, il s'agit là d'un modèle mathématique facilitant l'analyse de l'échantillonnage et qui, d'un point de vue pratique, donne heureusement des résultats pas trop différents de ce que l'on obtient avec un échantillonneur réel.

Si on veut respecter la forme du signal, il est important d'avoir des impulsions suffisamment proches les unes des autres. Dans le cas contraire, il n'est plus possible de voir les variations les plus rapides du signal à traiter. Ceci conduit à une ambiguïté, car rien n'exclut que les points échantillonnés du signal A puissent appartenir à un autre signal B contenant des fréquences plus élevées (figure 8.7).

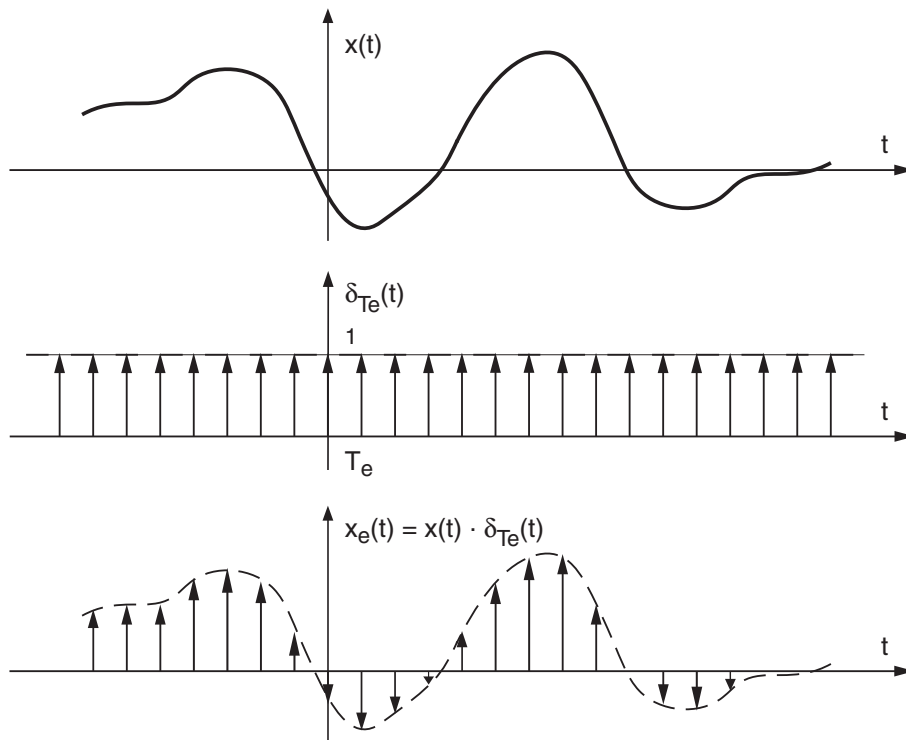


FIG. 8.6: Échantillonnage d'un signal

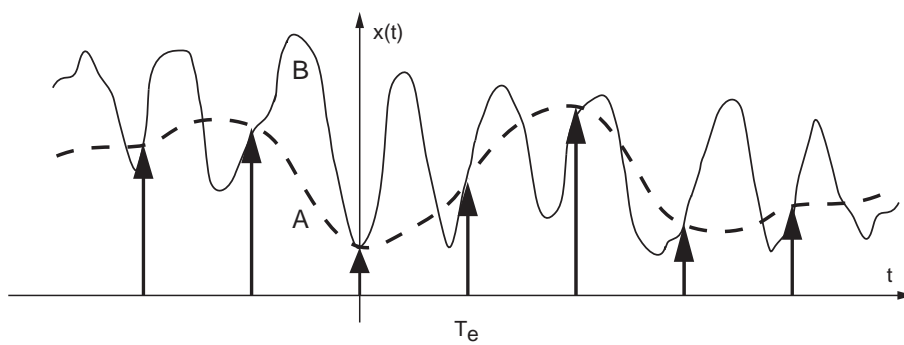


FIG. 8.7: Ambiguïté due à l'échantillonnage

### 8.3 Analyse fréquentielle

Comme le choix de la période d'échantillonnage  $T_e$  dépend de la rapidité du signal, donc de son spectre, il est nécessaire d'analyser le comportement de l'échantillonneur également dans le domaine fréquentiel.

Nous venons de voir que l'échantillonnage d'un signal analogique est modélisé dans l'espace temps par la multiplication du signal  $x(t)$  par un peigne temporel de Dirac  $\delta_{T_e}(t)$ . Or, on sait qu'à une multiplication temporelle correspond, dans l'espace des fréquences, une convolution fréquentielle entre le spectre  $X(jf)$  du signal  $x(t)$  et celui du peigne de Dirac  $D(jf)$  :

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \quad \Leftrightarrow \quad X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) \quad (8.2)$$

#### 8.3.1 Spectre d'un peigne de Dirac

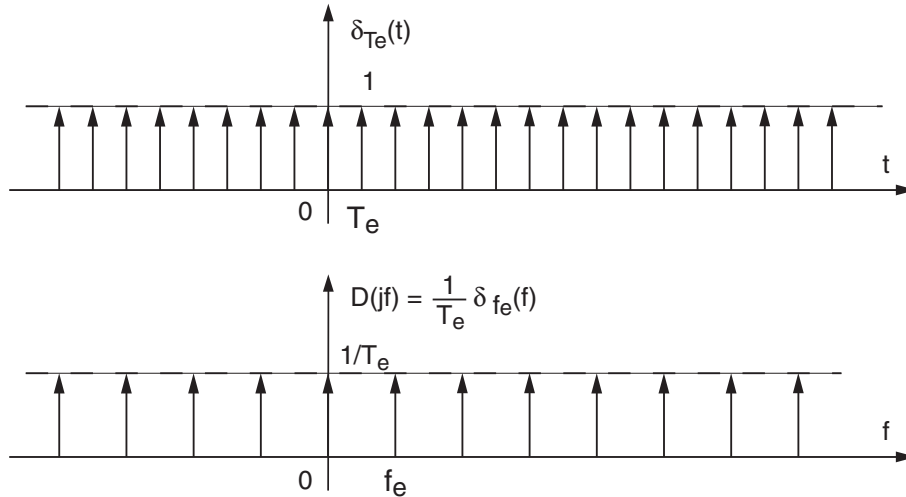


FIG. 8.8: Peigne d'impulsions de Dirac et son spectre

**Propriété** Le spectre d'un peigne temporel de Dirac  $\delta_{T_e}(t)$  de période  $T_e$  est un peigne fréquentiel de Dirac  $\delta_{f_e}(f)$  de période  $f_e = 1/T_e$  et d'amplitude  $1/T_e$ .

**Démonstration** Comme la suite d'impulsions  $\delta_{T_e}(t)$  est un signal périodique, on peut la décrire par sa décomposition en série de Fourier :

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D(jk) \exp(+j2\pi k f_e t) \quad \text{avec} \quad f_e = \frac{1}{T_e}$$

où  $D(jk)$  représente les coefficients de Fourier de  $\delta_{T_e}(t)$  qui valent :

$$D(jk) \equiv \frac{1}{T_e} \int_{-T_e/2}^{+T_e/2} \delta(t) \exp(-j2\pi k f_e t) dt = \frac{1}{T_e} \int_{0-}^{0+} \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{T_e}$$

Ce qui, en terme de transformation de Fourier, s'écrit également

$$D(jf) = \frac{1}{T_e} \delta_{f_e}(f) \quad (8.3)$$

et donne un peigne fréquentiel de Dirac. Une représentation graphique en est donnée à la figure 8.8.

### 8.3.2 Spectre d'un signal échantillonné

On a vu ci-dessus que le spectre d'un signal échantillonné se calcule en effectuant la convolution entre les spectres  $X(jf)$  et  $D(jf)$  et que ce dernier est un peigne de Dirac de période spectrale  $f_e$ . Comme la convolution entre une impulsion de Dirac et une fonction continue reproduit la valeur de la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion de Dirac, on voit que le spectre de base  $X(jf)$  est répété en tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ . On a donc :

$$X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e)) \quad (8.4)$$

Ce résultat très important montre que le spectre d'un signal échantillonné est la somme d'une répétition périodique du spectre du signal analogique  $X(jf)$  (figure 8.9) et que la période de ce spectre est égale à la fréquence d'échantillonnage  $f_e$ .

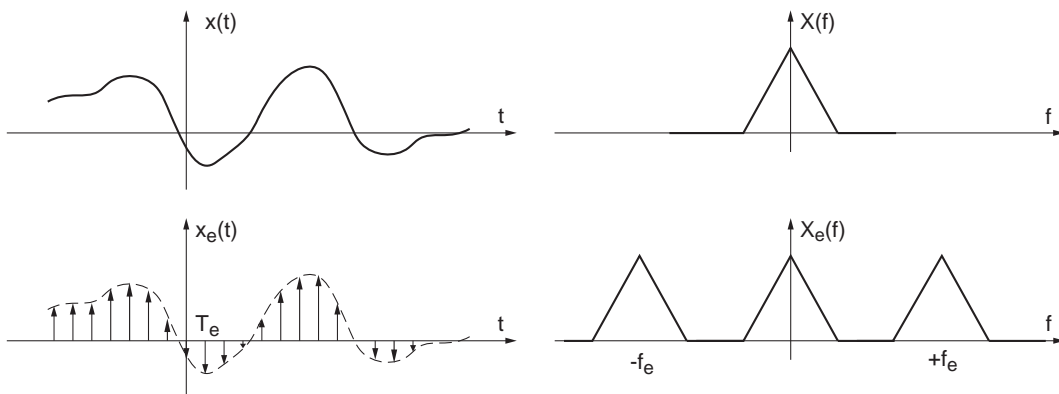
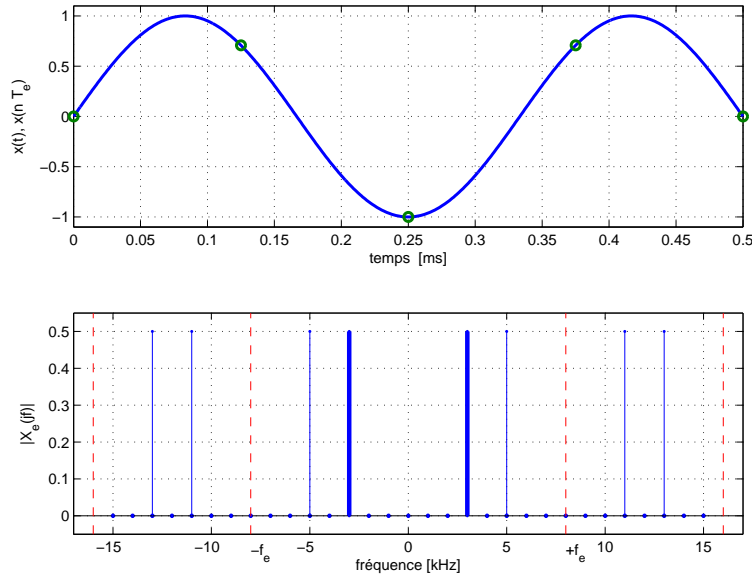


FIG. 8.9: L'échantillonnage d'un signal analogique provoque la répétition de son spectre

**Échantillonnage d'une sinusoïde** Considérant un signal sinusoïdal  $x(t)$  de fréquence  $f_0 = 3 [kHz]$  échantillonné à la fréquence  $f_e = 8 [kHz]$ , on obtient les points échantillonnés  $x(nT_e)$  représentés à la figure 8.10a. Malgré le faible nombre de points obtenus (quatre points pour une période et demie), le signal  $x(t)$  est univoquement défini du point de vue de Fourier.

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies spectrales se trouvant aux fréquences  $\pm m f_e \pm f_0 = \pm 3, \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 19, \dots$ . On en déduit que, dans la bande de base qui s'étend de 0 à  $f_e/2 = 4 [kHz]$ , il n'y a qu'une seule raie spectrale située en  $f_0 = 3 [kHz]$ . C'est la raie correspondant au signal original (figure 8.10b).

FIG. 8.10: Échantillonnage d'une sinusoïde ( $f_e > 2 f_0$ )

## 8.4 Recouvrement spectral

À cause de la répétition du spectre de base autour des multiples de  $f_e$ , on imagine aisément que les spectres vont se superposer si la fréquence d'échantillonnage devient trop petite. La figure 8.11 illustre cette situation dans les domaines temporel et spectral. En réduisant la fréquence d'échantillonnage, on diminue la distance entre les spectres qui, pour finir, se recouvrent. Cette superposition correspond à la somme des spectres qui conduit à une déformation irrécupérable du spectre initial : il n'est plus possible de reconstituer le signal  $x(t)$  à partir du spectre ainsi obtenu.

Il est donc important de ne pas oublier que l'échantillonnage d'un signal n'est pas une opération aussi anodine qu'elle paraît. Si la période d'échantillonnage est trop petite, cela peut modifier gravement le signal temporel perçu après échantillonnage. Comme le montre la figure 8.12, une sinusoïde de fréquence élevée peut être perçue comme un signal de fréquence beaucoup plus faible.

Le recouvrement spectral illustré par les figures 8.11 et 8.13 peut également être interprété comme un repliement du spectre autour de  $f_e/2$ . Cette fréquence particulièrement importante  $f_N = f_e/2$  porte le nom de *fréquence de Nyquist* et elle délimite le domaine d'analyse compris entre  $\pm f_e/2$ . Ainsi que le montre la figure 8.13, les valeurs obtenues par superposition des spectres peuvent appartenir aussi bien à une sinusoïde de 2 kHz qu'à celle de 6, 10 ou 14 kHz. Ce qui fait que si l'on n'y prend pas garde, la fréquence réelle 6 kHz est perçue comme un signal basse-fréquence de 2 kHz. Tout se passe comme si les signaux de fréquences 6, 10 ou 14 kHz étaient perçus comme un seul signal de fréquence 2 kHz.

En analysant la figure 8.13, on voit que les raies spectrales apparentes dues à l'échantillonnage se situent en

$$f_{app} = \pm m f_e \pm f_k, \quad m \neq 0 \quad (8.5)$$

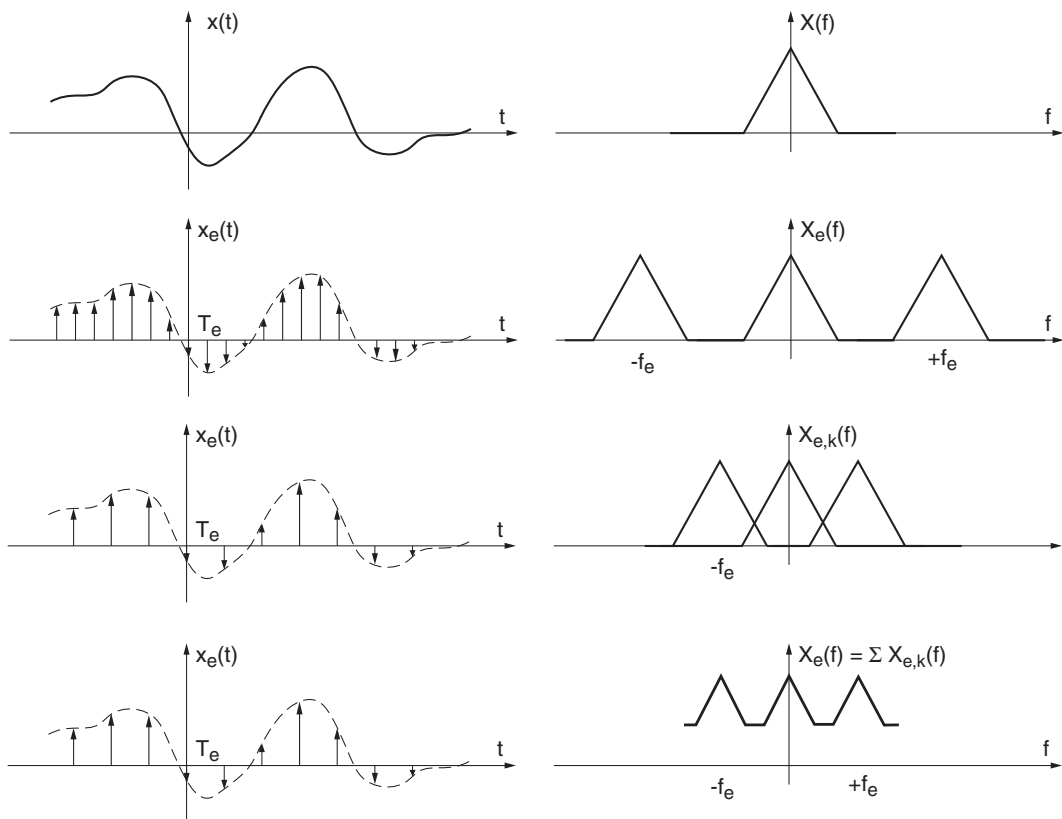


FIG. 8.11: Échantillonnage et recouvrement spectral

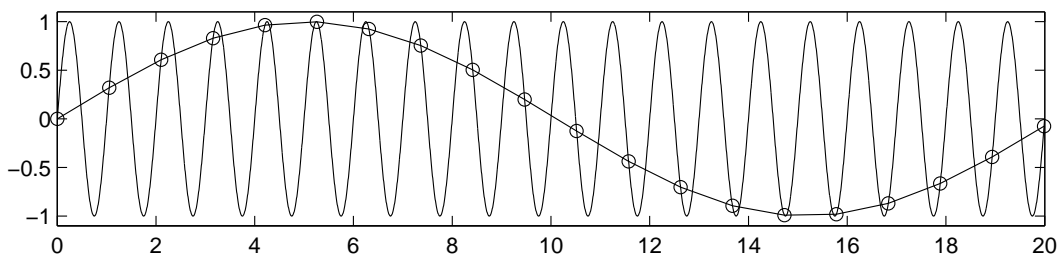


FIG. 8.12: Sinusoïde fortement sous-échantillonnée

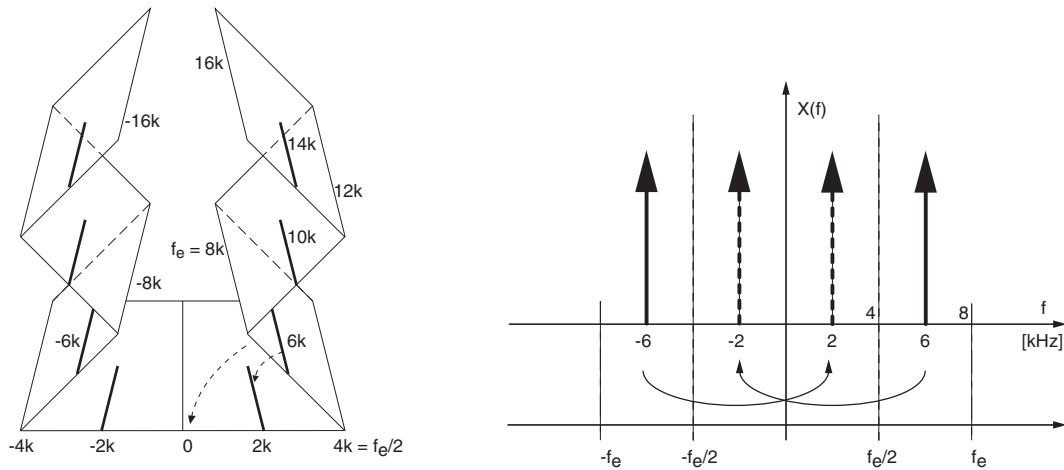


FIG. 8.13: Illustration du recouvrement spectral

et que, si la fréquence d'échantillonnage n'est pas assez élevée, elles peuvent se retrouver dans la bande de base  $-f_e/2 < f < +f_e/2$ .

Un exemple de repliement spectral bien connu est le phénomène observé au cinéma lorsqu'un chariot équipé de roues à rayons se déplace. La scène filmée est échantillonnée par la caméra à raison de 24 images par secondes. Lorsque le chariot démarre et accélère, la fréquence du signal représenté par la rotation des rayons augmente et à un moment dépasse la fréquence de Nyquist (12 images par seconde). Dès cet instant, la vitesse de rotation semble diminuer, s'annuler et même devenir négative. L'information contenue dans l'image est faussée par le recouvrement spectral et ne correspond plus à la réalité. Il s'agit de l'effet stroboscopique bien connu.

### 8.4.1 Quelques exemples

#### Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

**Donnée** On considère un signal sinusoïdal  $x(t)$  de fréquence  $f_0 = 5 \text{ [kHz]}$  que l'on échantillonne avec une fréquence  $f_e = 8 \text{ [kHz]}$ .

#### Questions

1. Dessinez la fonction  $x(t)$  et les points échantillonnés  $x(t = nT_e)$ .
2. Calculez la fréquence apparente  $f_{app}$  du signal  $x[n] = x(t = nT_e)$ .
3. Dessinez la sinusoïde basse-fréquence passant par les points échantillonnés.
4. Calculez et dessinez le spectre du signal échantillonné.

**Réponses** Les courbes demandées sont calculées et dessinées avec Matlab à l'aide des commandes ci-dessous :

```

% paramètres des signaux
fo = 5e3; fe = 8e3;
To = 1/fo; Te = 1/fe;
% calcul de x(t)
tmax = 5e-3; kmax = 500;
dt = tmax/kmax;
tt = 0 :dt :tmax;
xt = sin (2*pi* tt/To);

```

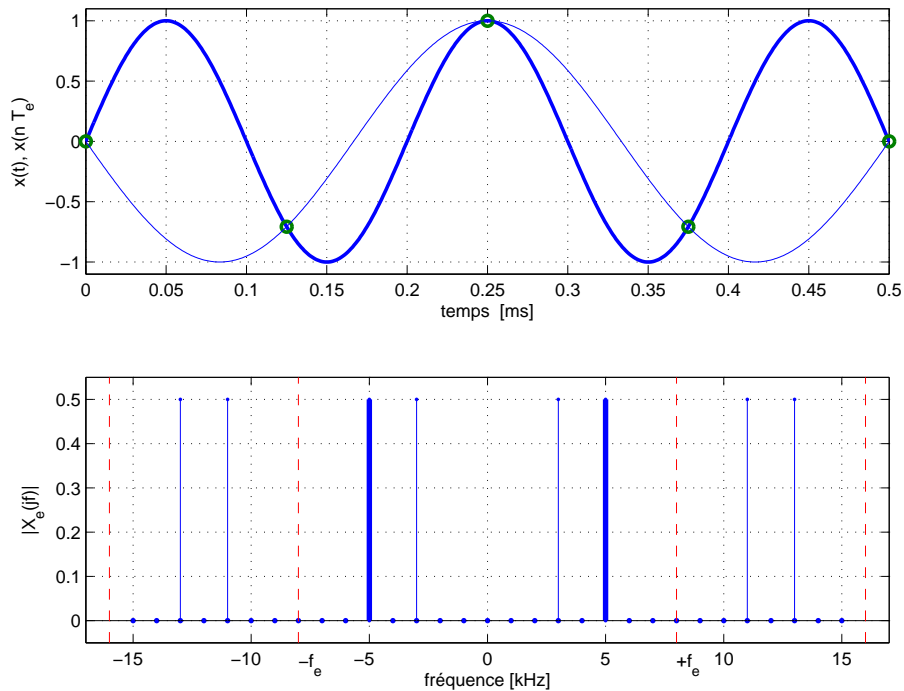


FIG. 8.14: Sous-échantillonnage d'une sinusoïde

La fréquence apparente vaut  $f_{app} = |f_0 - f_e| = 3 [kHz]$ . Comme elle se situe en dessous de la fréquence de Nyquist  $f_N = f_e/2 = 4 [kHz]$ , elle sera associée à la présence d'une oscillation de période 0.33 [ms] qui n'existe pas en réalité (figure 8.14).

```

% signal apparent
fapp = fo - fe;
xta = sin (2*pi * tt * fapp);
% échantillonnage de x(t)
tn = 0 :Te :tmax;
xn = sin (2*pi * tn/To);
% traçage dans le domaine temporel
subplot(2,1,1);
h1 = plot (tt, xt); grid;
set(h1,'LineWidth',2); hold on;
plot(tn, xn, 'o', tt, xta, '-');
xlabel ('temps [sec]');

```

Le spectre original et sa répétition font apparaître des raies se trouvant aux fréquences suivantes :

$k = 1, m = 0, 1, 2, 3$	0	1	2	3	...
$+m f_e \pm f_0$	$\pm 5$	+3, +13	+11, +21	+19, +29	...
$-m f_e \pm f_0$	$\pm 5$	-3, -13	-11, -21	-19, -29	...

On en déduit l'information erronée que, dans la bande de base allant de 0 à  $f_e/2 = 4 [kHz]$ , il n'y a qu'une raie spectrale : celle correspondant au signal apparent de fréquence  $f_{app} = 3 [kHz]$  (figure 8.14).

### Échantillonnage d'un signal carré

Considérons un signal carré de période  $T_0 = 1 [ms]$  dont on sait que son spectre est constitué de raies situées en tous les multiples impairs de la fondamentale  $f_0 = 1 [kHz]$ . Ce signal est échantillonné à la fréquence  $f_e = 12.8 [kHz]$ .

Comme le rapport entre  $f_e = 12.8 [kHz]$  et  $f_0 = 1 [kHz]$  n'est pas entier ; le recouvrement spectral fait apparaître de manière évidente des raies parasites en des fréquences inattendues (figure 8.15). Ces raies apparentes se situent en

$$f_{app} = \pm m \cdot f_e \pm k \cdot f_0$$

En ne considérant que les premiers spectres latéraux ( $m = \pm 1$ ), on peut calculer les fréquences apparentes suivantes

$$f_{app} = \pm 12.8 \pm (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$$

De manière plus détaillée, cela donne :

$m = \pm 1, k = 1, \dots$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	
$+12.8 + (\dots)$	+13.8	+15.8	+17.8	+19.8	+21.8	+23.8	+25.8	+27.8	+29.8	...
$+12.8 - (\dots)$	+11.8	+9.8	+7.8	<b>+5.8</b>	<b>+3.8</b>	<b>+1.8</b>	<b>-0.2</b>	<b>-2.2</b>	<b>-4.2</b>	...
$-12.8 + (\dots)$	-11.8	-9.8	-7.8	<b>-5.8</b>	<b>-3.8</b>	<b>-1.8</b>	<b>+0.2</b>	<b>+2.2</b>	<b>+4.2</b>	...
$-12.8 - (\dots)$	-13.8	-15.8	-17.8	-19.8	-21.8	-23.8	-25.8	-27.8	-29.8	...

Les valeurs mises en gras correspondent aux fréquences apparentes que l'on retrouve dans la bande de base comprise entre 0 et  $f_N = f_e/2 = 6.4 [kHz]$ .

### Échantillonnage d'une suite d'impulsions rectangulaires

Afin de mieux comprendre comment un spectre est modifié par le recouvrement spectral, on considère une SIR de période  $T_0 = 1 [ms]$  et de largeur  $\Delta t = 0.2 [ms]$ . Cette SIR est échantillonnée à la fréquence  $f_e = 16 [kHz]$

On sait que le spectre de la SIR est constitué de raies situées en des multiples de la fondamentale  $f_0 = 1 [kHz]$  s'annulant pour tous les multiples de  $1/\Delta t = 5 [kHz]$ . À cause de l'échantillonnage, ce spectre devient périodique  $f_e$ . Une illustration en est donnée dans la figure 8.16 où l'on a représenté

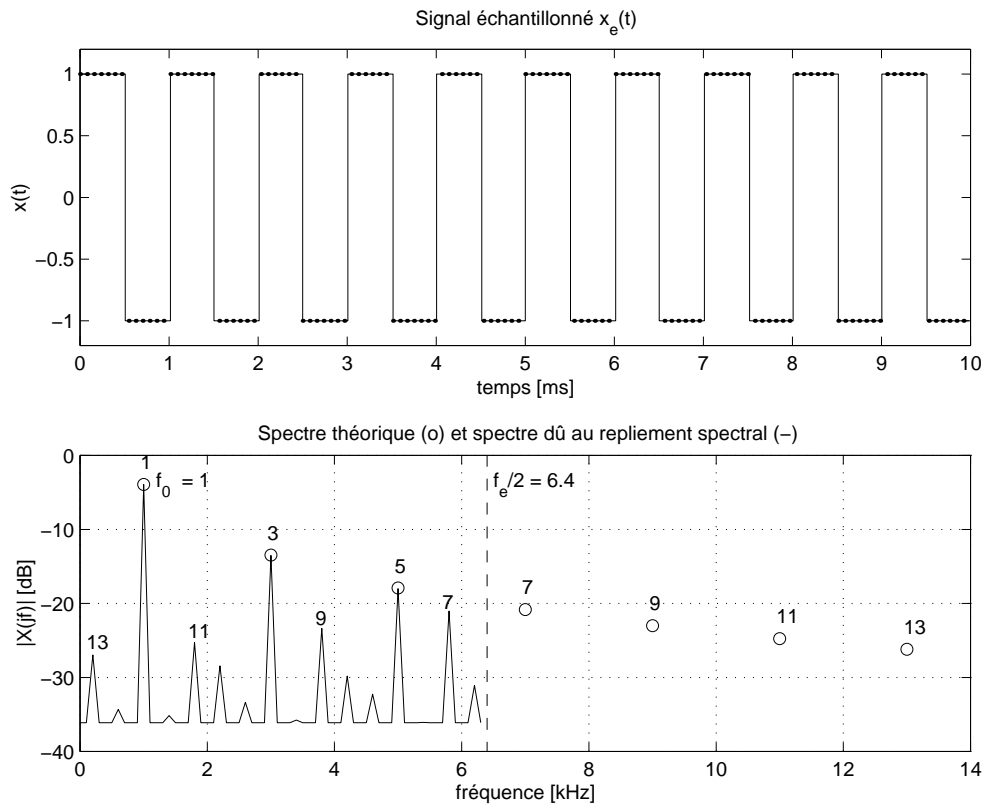


FIG. 8.15: Échantillonnage d'un signal carré

1. le signal temporel  $x(t)$  et les valeurs échantillonnées  $x_e(n)$  ;
2. le spectre de base  $X(jf)$  et son enveloppe (sinus cardinal) ;
3. le spectre de base  $X(jf)$  et ses copies en  $f = \pm f_e$  ;
4. le spectre  $X_e(jf)$  du signal échantillonné qui provient de la somme des spectres précédents.

Comme le spectre du signal échantillonné est la somme de tous les spectres décalés en  $\pm m f_e$ , on voit que le spectre résultant est composé du spectre original auquel viennent s'ajouter les raies spectrales des spectres latéraux.

Dans cet exemple où nous avons choisi un rapport entier entre  $f_e$  et  $f_0$  égal à 16, les raies spectrales se superposent alors exactement. Si bien que l'on observe des raies situées à l'endroit où on les attend. *Le risque est alors grand de ne pas voir que les amplitudes des raies spectrales sont faussées par le recouvrement spectral.*

En particulier, si l'on considère la raie spectrale d'ordre 4, on voit que le résultat dû à l'échantillonnage sera la somme des composantes d'ordre  $+20, -12, (f_e \pm 4), +36, -28, (2f_e \pm 4) \dots$  dues aux décalages spectraux  $\pm f_e, \pm 2f_e, \dots$ . On voit donc que, de manière générale, le repliement spectral fait apparaître en la fréquence  $f_k = k f_0$  des composantes spectrales provenant de  $k f_0 \pm m f_e$ .

À titre informatif, voici le code Matlab créé pour analyser l'échantillonnage de la SIR.

```
% création d'une période
```

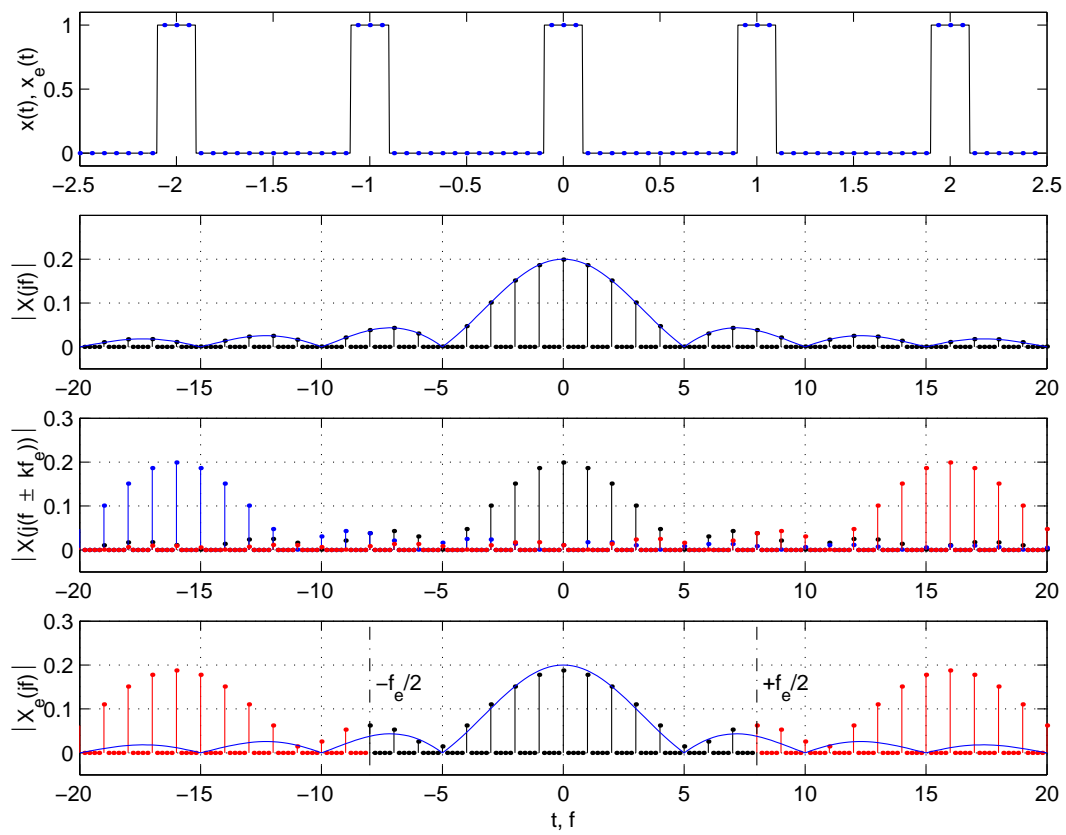


FIG. 8.16: Échantillonnage d'une SIR

```

T0 = 1; delta = 1/5; k0 = 256;
dt = T0/k0;
t0 = -T0/2 :dt :T0/2-dt;
xt0 = (t0>(-delta/2)) & (t0<(delta/2));

% création de Nper périodes
Nper = 5;
tt = -Nper*T0/2 :dt :Nper*T0/2-dt;
xt = [];
for k1 = 1 :Nper, xt = [xt,xt0]; end;

% échantillonnage tous les ndt points
ndt = 16; Te = ndt*dt;
tn = tt(1 :ndt :length(tt));
xn = xt(1 :ndt :length(xt));

% spectre de xt (analogique)
duree = max(tt)-min(tt)+dt;
fmax = 1/dt; df = 1/duree;
ff = -fmax/2 :df :fmax/2-df;
Xjf = fftshift(fft(xt))/length(xt);
Xf = abs(Xjf);

% spectre théorique de xt (enveloppe)
Xjfth = delta/T0*sinc(ff*delta/T0);

% spectre de xn
fe = 1/Te; Nfft = length(xn);
dfe = fe/Nfft;
ffe = -fe/2 :dfe :fe/2-dfe;
Xejf = fftshift(fft(xn))/Nfft;

% graphes
subplot(4,1,1);
plot(tt,xt,tn,xn,'. ');
subplot(4,1,2);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjfth));
subplot(4,1,3);
stem(ff,Xf,'k. '); hold on;
stem(ff-fe,Xf,'b. ');
stem(ff+fe,Xf,'r. ');
subplot(4,1,4);
stem(ffe,abs(Xejf),'. '); hold on;
plot(ff,abs(Xjfth));

```

## Échantillonnage d'une exponentielle décroissante

**Donnée** Une exponentielle décroissante d'amplitude  $A = 10V$ , de constante de temps  $\tau = 0.2 msec$  est échantillonnée avec  $T_e = \tau/2 = 0.1 msec$ .

**Question** Calculez le contenu spectral du signal échantillonné pour  $f = 0$  et  $f = f_c$  en se limitant à l'effet des 2 premiers spectres latéraux seulement.

**Réponse** Sachant que le signal

$$x(t) = A \exp(-t/\tau) \varepsilon(t)$$

possède le spectre suivant

$$X(jf) = A \frac{\tau}{1 + j2\pi f\tau}$$

le spectre du signal échantillonné  $x_e(t)$  vaut :

$$\begin{aligned} X_e(jf) &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(f - k f_e)) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A\tau}{1 + j2\pi (f - k f_e)\tau} \end{aligned}$$

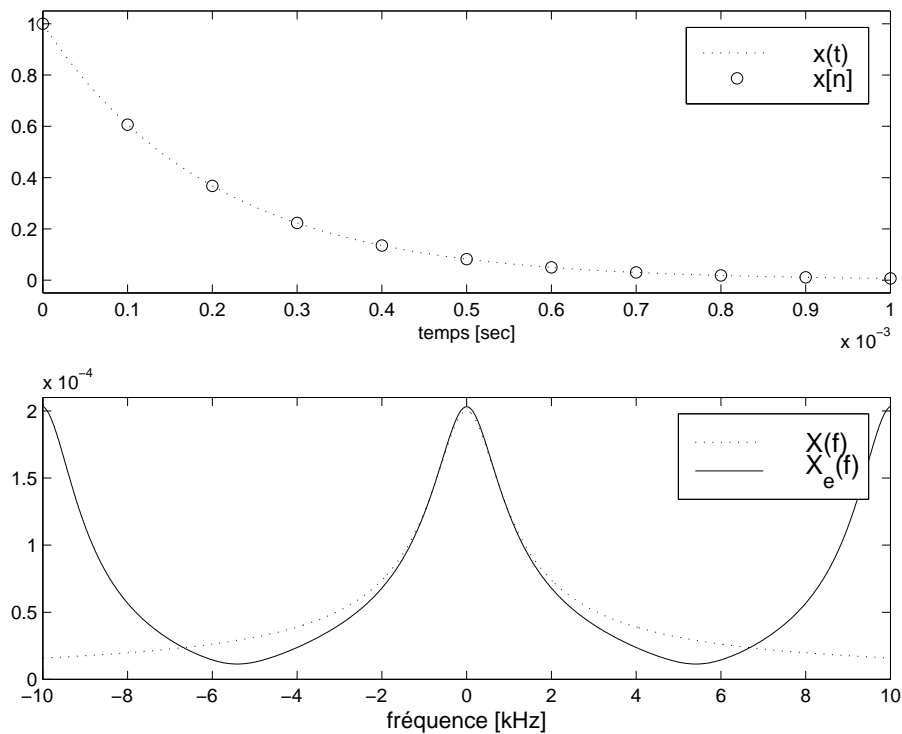


FIG. 8.17: Échantillonnage d'une exponentielle amortie et son spectre

La méthode la plus simple pour calculer  $X_e(jf)$  consiste à utiliser Matlab. Dans le calcul qui suit, on notera que pour des raisons d'échelle, la période d'échantillonnage n'est pas prise en compte dans le calcul des spectres.

```
% parametres
A = 10.0; tau = 0.2e-3;
fc = 1/(2*pi*tau);
Te = tau/2; fe = 1/Te;

% spectre original en f = 0 et f = fc :
f = [0, fc];
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
Xfm = abs (Xf0)
>> Xfm = 0.2000e-3 0.1414e-3

% repetition spectrale
% spectre original
Xf0 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * f*tau)
% spectres dus à ±fe
Xfp1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + fe)*tau);
Xfm1 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - fe)*tau);
% spectres dus à ±2fe
Xfp2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f + 2*fe)*tau);
Xfm2 = A*tau ./ (1 + j*2*pi * (f - 2*fe)*tau);

% spectre résultant
Xfe = Xf0 + Xfm1 + Xfp1 + Xfm2 + Xfp2
Xfem = abs (Xfe)
>> Xfem = 0.2031e-3 0.1415e-3

% erreurs relatives
erreurs = (Xfem - abs(Xf0)) ./ abs(Xf0)
>> erreurs = 0.0157 0.0008
```

Cet échantillonnage de l'exponentielle amortie avec  $T_e = \tau/2$  conduit donc aux erreurs relatives suivantes :

- 1.57% pour l'amplitude de la composante continue
- 0.08% pour l'amplitude à la fréquence de coupure ( $f_c = 796 [Hz]$ ).

Une illustration de la somme de ces spectres est donnée à la figure 8.17.

## 8.5 Théorème de l'échantillonnage

Les exemples ci-dessus ont montré à l'évidence que les résultats fournis par l'analyse d'un signal échantillonné peuvent être gravement modifiés si l'on n'y prend pas garde. En 1948, Shannon a montré que, pour éviter ces problèmes, il suffit de satisfaire

l'inégalité suivante :

$$f_e > 2 f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e < \frac{T_{min}}{2} \quad (8.6)$$

Ce théorème s'énonce également de la manière suivante :

**Un signal  $x(t)$  peut être représenté de manière univoque par une suite de valeurs échantillonnées si la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  est au moins 2 fois plus élevée que la plus grande des fréquences contenues dans le signal.**

En pratique, on limite, avant échantillonnage, le spectre du signal avec un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure dépend de la bande passante utile. Afin de laisser un peu d'espace pour la bande de transition du filtre antirecouvrement, on choisira :

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max} \quad \Leftrightarrow \quad T_e \simeq \frac{T_{min}}{3 \cdots 5} \quad (8.7)$$

Plus de détails seront donnés dans la section 8.7.

### 8.5.1 Filtre antirecouvrement

En général, les fréquences présentes dans un signal s'étendent sur un domaine plus étendu que ce qui est utile pour le message à transmettre. Suivant la qualité attendue pour celui-ci, on limite plus ou moins le domaine fréquentiel sur lequel portera le traitement du signal.

Connaissant ce domaine d'intérêt, délimité par la fréquence  $f_{max}$ , on pourra éviter le recouvrement spectral en **filtrant analogiquement le signal  $x(t)$  avant son échantillonnage**. Comme il n'est pas possible, avec un filtre réel, de supprimer totalement les fréquences supérieures à  $f_{max}$ , on est amené à accepter l'effet d'un léger recouvrement spectral.

La figure 8.18 illustre le recouvrement spectral que l'on obtient avec des filtres de Butterworth dont la réponse fréquentielle et le recouvrement spectral sont décrits par

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}} \quad H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{2m}}} \quad (8.8)$$

### 8.5.2 Exemple

**Donnée** Considérons un signal  $x(t)$ , à spectre constant dans une large bande de fréquence que l'on filtre passe-bas avec un filtre de Butterworth d'ordre  $m = 6$  et de fréquence de coupure  $f_c = 1 [kHz]$ .

Dans ce qui suit, on souhaite estimer la valeur de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  nécessaire pour que l'effet du recouvrement spectral à la fréquence de coupure  $f_c$  soit inférieur à 1%.

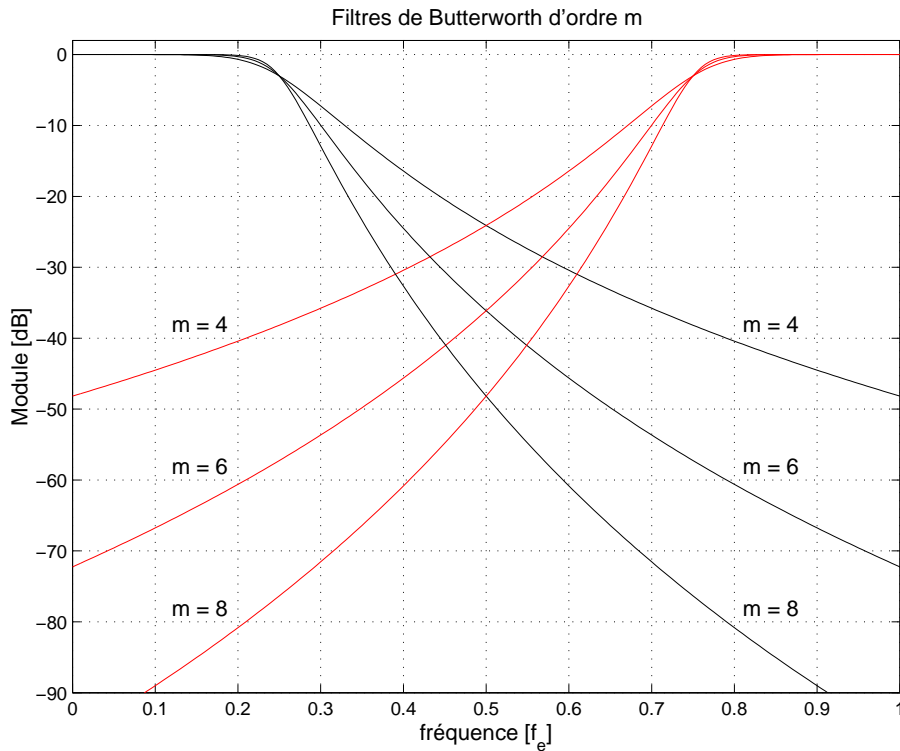


FIG. 8.18: Recouvrement spectral pour un filtre de Butterworth ( $f_e = 4 f_c$ )

**Solution** Puisque en  $f = f_c$ , l'amplitude de la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth vaut  $1/\sqrt{2} = 0.707$ , l'amplitude due au recouvrement spectral en cet endroit devra être inférieure à 1% de 0.707 ; c'est-à-dire,  $0.00707 = 1/141$  (figure 8.19).

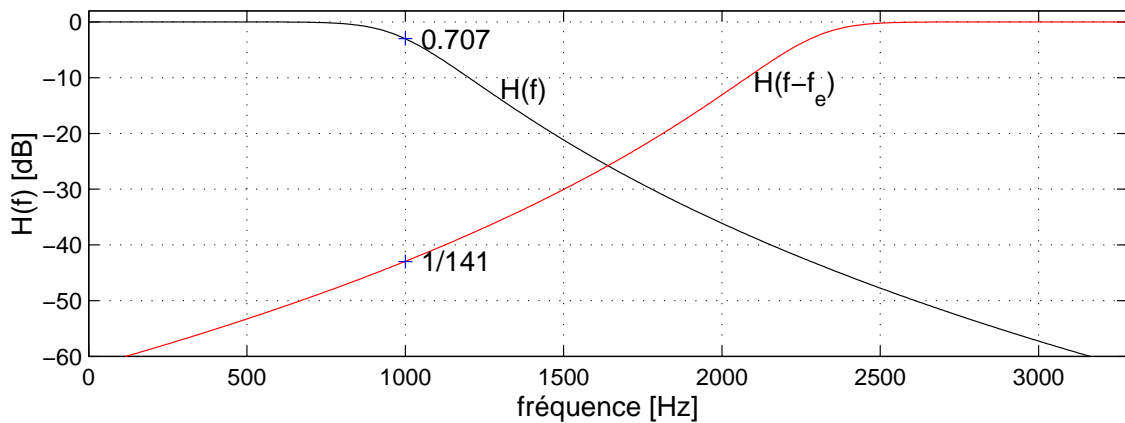


FIG. 8.19: Effet du filtre antirecouvrement d'ordre 6 avec  $f_e = 3.28 f_c$

Ne considérant que le premier spectre latéral, l'effet du recouvrement est décrit par la réponse fréquentielle centrée en  $+f_e$  :

$$H_{f_e}(f) = H(f - f_e) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f-f_e}{f_c}\right)^{12}}} = \frac{1}{141} \quad \text{lorsque } f = f_c$$

On a donc :

$$1 + \left( \frac{f_c - f_e}{f_c} \right)^{12} = 1 + \left( \frac{f_e - f_c}{f_c} \right)^{12} = 141^2 = 2 \cdot 10^4$$

De cette équation, on tire :

$$\begin{aligned} f_e &= \left( 1 + (2 \cdot 10^4)^{1/12} \right) f_c \\ &= 3.28 f_c = 3.28 [kHz] \end{aligned}$$

**Remarque** Il est important de relever que ce résultat provient d'une estimation basée sur les modules des spectres alors que, pour être exact, il aurait fallu travailler avec les spectres complexes (voir l'exemple du paragraphe 8.4.1).

## 8.6 Quantification d'un signal échantillonné

### 8.6.1 Quantification uniforme

Le convertisseur A–N effectue la numérisation d'un signal analogique après échantillonnage et délivre des séquences numériques codées avec un pas de quantification  $Q$  dépendant du nombre de bits du convertisseur. Dans le cas d'une loi de quantification uniforme où les valeurs codées sont obtenues par arrondi dans le domaine de conversion  $\Delta_{CAN}$  du convertisseur, on a :

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} \quad (8.9)$$

Considérant pour la suite que le CAN travaille avec  $n$  bits entre  $+U_{max}$  et  $-U_{max}$  (figure 8.20), on a  $\Delta_{CAN} = 2U_{max}$  et le pas de quantification vaut alors

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{2U_{max}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}} \quad (8.10)$$

Le pas de quantification  $Q$  rapporté au domaine de conversion  $\Delta_{CAN}$  définit la résolution du convertisseur

$$R_{CAN} \equiv \frac{Q}{\Delta_{CAN}} = \frac{1}{2^n} = 1 \text{ LSB} \quad (8.11)$$

On dit, de manière équivalente, que la résolution est égale au poids du bit le plus faible du convertisseur.

Lorsque les valeurs codées sont obtenues par arrondi, l'erreur due au codage se répartit uniformément autour de la droite de conversion idéale et la caractéristique de codage est celle représentée à la figure 8.20. L'erreur maximum due à la quantification est alors :

$$E_Q = \frac{Q}{2} = \frac{U_{max}}{2^n}$$

Par exemple, si l'on considère un CAN 10 bits travaillant entre  $\pm 10$  [V], on aura

$$\Delta_{CAN} = 20 [V] \quad Q = \frac{2 \cdot 10 [V]}{2^{10}} \simeq 20 [mV] \quad E_Q \simeq 10 [mV] \quad R_{CAN} = \frac{1}{1024}$$

**Remarque** Il est important de bien distinguer entre résolution et précision d'un convertisseur. Généralement, ces deux grandeurs sont du même ordre. On peut cependant très bien imaginer l'exemple d'un convertisseur 4 bits qui aura une résolution de  $1/16 = 6.25\%$  alors que les 16 valeurs fournies par le convertisseur peuvent être précises à  $0.1\%$ .

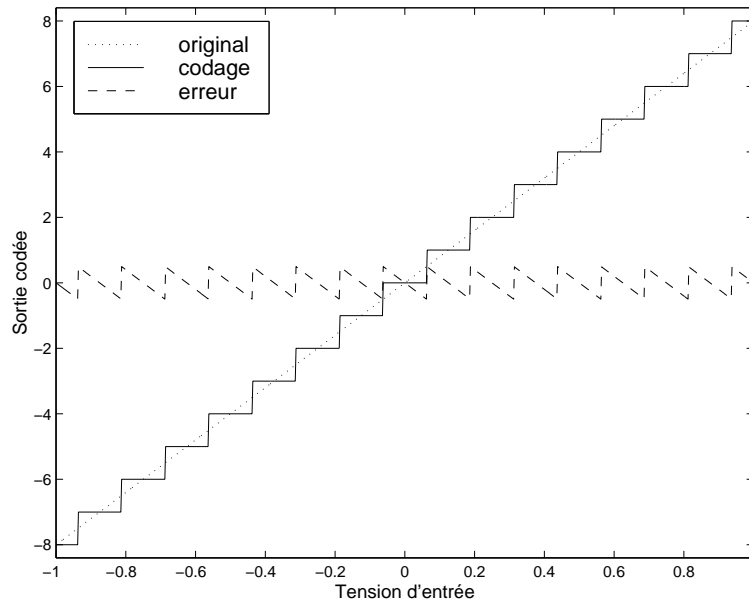


FIG. 8.20: Loi de quantification uniforme et signal d'erreur

### 8.6.2 Bruit de quantification

Nous venons de voir que l'opération de quantification remplace chaque valeur du signal  $x(t = nT_e)$  par une approximation. L'effet de cette approximation revient, mathématiquement, à superposer au signal d'origine  $x(t)$  un signal d'erreur  $e(t)$  que l'on appelle le bruit de quantification. L'amplitude maximum de ce signal d'erreur est  $E_Q = Q/2$  (figure 8.21). Sa puissance est une mesure de la dégradation que subit le signal.

Si le pas de quantification est beaucoup plus petit que l'amplitude du signal  $x(t)$ , on peut raisonnablement admettre que le signal d'erreur est constitué de segments de droite compris entre  $\pm Q/2$  et de durée variable  $\Delta t$  (figure 8.21). L'équation décrivant ce signal d'erreur élémentaire s'écrit alors :

$$e(t) = \frac{Q}{\Delta t} t \text{ pour } -\frac{\Delta t}{2} \leq t \leq +\frac{\Delta t}{2}$$

et sa puissance moyenne vaut :

$$\begin{aligned} P_Q &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^2(t) dt \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left( \frac{Q}{\Delta t} t \right)^2 dt \end{aligned}$$

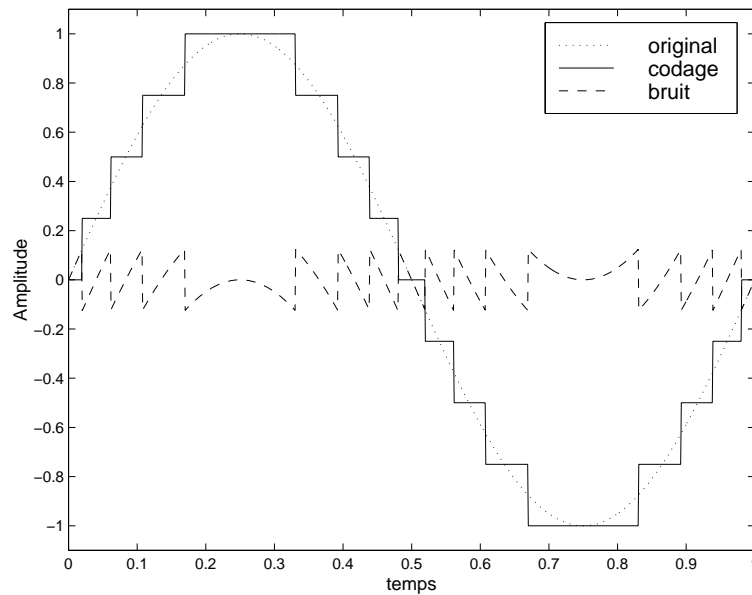


FIG. 8.21: Numérisation d'un signal analogique et bruit de quantification

$$= \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{Q}{\Delta t} \right)^2 \frac{1}{3} 2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^3$$

Ce qui donne finalement le résultat bien connu pour une distribution statistique uniforme :

$$P_Q = \frac{E_Q^2}{3} = \frac{Q^2}{12} \quad (8.12)$$

La valeur ainsi obtenue est une estimation de la puissance du bruit de quantification suffisante pour la plupart des cas réels. Si l'on exprime cette puissance par rapport au nombre de bits du convertisseur, on obtient :

$$P_Q = \frac{1}{12} \left( \frac{2U_{max}}{2^n} \right)^2 = \left( \frac{U_{max}}{2^n \sqrt{3}} \right)^2$$

La puissance du bruit de quantification  $P_Q$  permet de calculer la valeur efficace du bruit de quantification qui vaut :

$$Q_{eff} = \sqrt{P_Q} = \frac{Q}{\sqrt{12}} \quad (8.13)$$

Le spectre du signal d'erreur est plus difficile à évaluer. Mais dans la plupart des cas, les conditions sont remplies pour que la densité spectrale du bruit de quantification puisse être considérée constante.

### 8.6.3 Rapport signal sur bruit

Lorsque qu'un signal est perturbé par du bruit, il est nécessaire de chiffrer l'importance de cette perturbation par rapport au signal. On introduit alors la notion de

## 8.6 Quantification d'un signal échantillonné

rapport signal sur bruit (SNR = Signal to Noise Ratio) défini comme le quotient entre la valeur efficace du signal  $X_{eff}$  et celle du bruit  $N_{eff}$  :

$$SNR \equiv \frac{X_{eff}}{N_{eff}} \quad (8.14)$$

Dans notre cas, le bruit est dû à la quantification du signal. On a donc  $N_{eff} = Q_{eff}$  avec  $Q_{eff} = Q/\sqrt{12}$ . Le rapport signal sur bruit d'un convertisseur vaut alors :

$$SNR = \frac{X_{eff}}{Q/\sqrt{12}} = 2^{n-1} \sqrt{12} \frac{X_{eff}}{U_{max}} \quad (8.15)$$

Exprimé en dB, ce rapport signal sur bruit vaut :

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(12) + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} \end{aligned}$$

d'où :

$$SNR_{dB} = 6n + 4.8 \text{ dB} + 20 \log \frac{X_{eff}}{U_{max}} < 6n + 4.8 \text{ dB} \quad (8.16)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit d'un convertisseur A-N dépend de son domaine de conversion et de la valeur efficace du signal. Comme l'amplitude de celui-ci ne doit pas dépasser le domaine du convertisseur si l'on veut éviter des saturations, on voit que le SNR sera toujours inférieur à  $6n + 4.8 \text{ dB}$ .

### 8.6.4 SNR de quelques signaux

#### Signal sinusoïdal "pleine échelle"

Dans le *cas particulier* où le signal analogique est une *sinusoïde d'amplitude égale à la tension maximum*  $U_{max}$  du convertisseur A-N, on a :

$$X_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{n-1} Q$$

Le rapport signal sur bruit maximum que l'on peut avoir après quantification vaut alors :

$$SNR_{max} = \frac{X_{eff}}{Q_{eff}} = \frac{2^{n-1}Q/\sqrt{2}}{Q/\sqrt{12}} = \sqrt{6} 2^{n-1}$$

Exprimé en dB, ce rapport devient :

$$\begin{aligned} SNR_{max, dB} &\equiv 20 \log(SNR) \\ &= (n-1) 20 \log(2) + 10 \log(6) \\ &\simeq 6(n-1) + 7.8 \text{ dB} \end{aligned}$$

d'où

$$SNR_{max, dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} \quad \text{si } A = U_{max} \quad (8.17)$$

Il est important de se rappeler que ce résultat n'est valable que pour une sinusoïde dont l'amplitude couvre toute la plage du convertisseur A-N et qu'il représente le SNR maximum possible pour un convertisseur donné.

Ainsi, pour un convertisseur 8 bits, le rapport signal sur bruit maximum vaut environ 50 dB. Ceci est suffisant pour la plupart des applications industrielles, mais pas du tout en haute-fidélité où l'on désire un rapport d'au moins 96 dB. Dans ce cas, 16 bits sont nécessaires avec un convertisseur d'excellente linéarité.

Dans le cas plus général où l'amplitude  $A$  du signal sinusoïdal est inférieure à  $U_{max}$ , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n + 1.8 \text{ dB} - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (8.18)$$

### Signal triangulaire "pleine échelle"

Dans le cas particulier où le signal analogique est un triangle d'amplitude égale à la tension maximum  $U_{max}$  du convertisseur A-N, on montre aisément (voir exercices) que le rapport signal sur bruit obtenu après quantification vaut au maximum :

$$SNR_{max, dB} = 6n \quad \text{si } A = U_{max} \quad (8.19)$$

Dans le cas plus général où l'amplitude  $A$  du signal triangulaire est inférieure à  $U_{max}$ , on aura :

$$SNR_{dB} \simeq 6n - 20 \log \frac{U_{max}}{A} \quad A \leq U_{max} \quad (8.20)$$

### Signal à distribution gaussienne

Dans le cas où l'on peut admettre que la distribution statistique d'un signal quelconque est gaussienne, on montre que le risque de dépassement du domaine de conversion est inférieur à

$$\begin{aligned} 5\% & \quad \text{si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{2} \\ 0.3\% & \quad \text{si } X_{eff} \leq \frac{U_{max}}{3} \end{aligned}$$

En considérant ce dernier cas (satisfaisant d'un point de vue pratique), on a :

$$SNR_{max, dB} = 6n + 4.8 \text{ dB} - 20 \log 3 = 6n - 4.7 \text{ dB} \quad \text{si } X_{eff} = \frac{U_{max}}{3}$$

Dans ce cas, plus général que celui du signal sinusoïdal, on voit que le rapport signal sur bruit ne dépassera pas 43 dB pour un convertisseur 8 bits. Une illustration de la quantification de trois signaux types est donnée dans la figure 8.22.

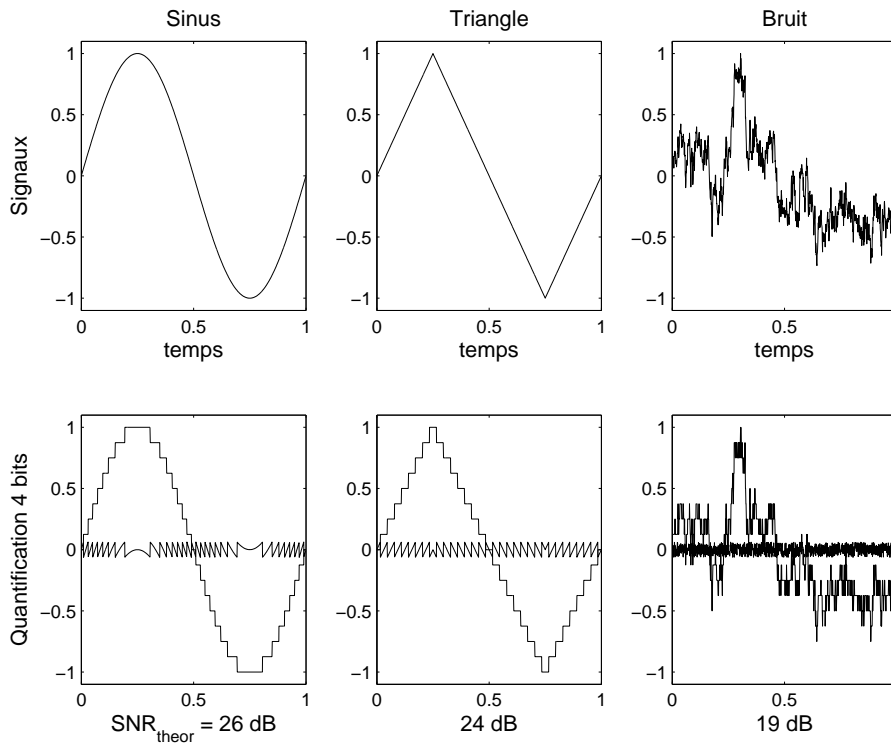


FIG. 8.22: Quantification avec 4 bits de trois signaux types

### 8.6.5 Non linéarité du convertisseur

Jusqu'à présent, on a considéré des convertisseurs A-N parfaits, exempts de toute erreur de linéarité ; cela signifie que la relation sortie-entrée est décrite par une droite et que les pas de quantification se répartissent régulièrement le long de cette droite. Or dans la réalité, la relation sortie-entrée n'est jamais exactement linéaire. Une illustration en est donnée à la figure 8.23.

En général, la valeur absolue de la différence entre la courbe réelle et la droite idéale ne dépasse pas un demi LSB. Dans ce cas, l'erreur de non linéarité est au maximum équivalente à la perte d'un bit de poids faible. On admet alors, de manière conservative, que le nombre de bits effectif est diminué de 1

$$n_{eff} = n - 1$$

Ce qui conduit aux résultats globaux suivants

$$R_{NL} = \frac{1}{2^{n_{eff}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad Q_{NL} = \frac{U_{max}}{2^{n_{eff}-1}} = \frac{U_{max}}{2^{n-2}} \quad (8.21)$$

On voit ainsi que le rapport signal sur bruit calculé jusqu'ici est réduit d'un facteur 2 ou de 6 dB. Le rapport signal sur bruit est alors corrigé de la manière suivante :

$$SNR_{NL, dB} \simeq SNR_{dB} - 6 dB \quad (8.22)$$

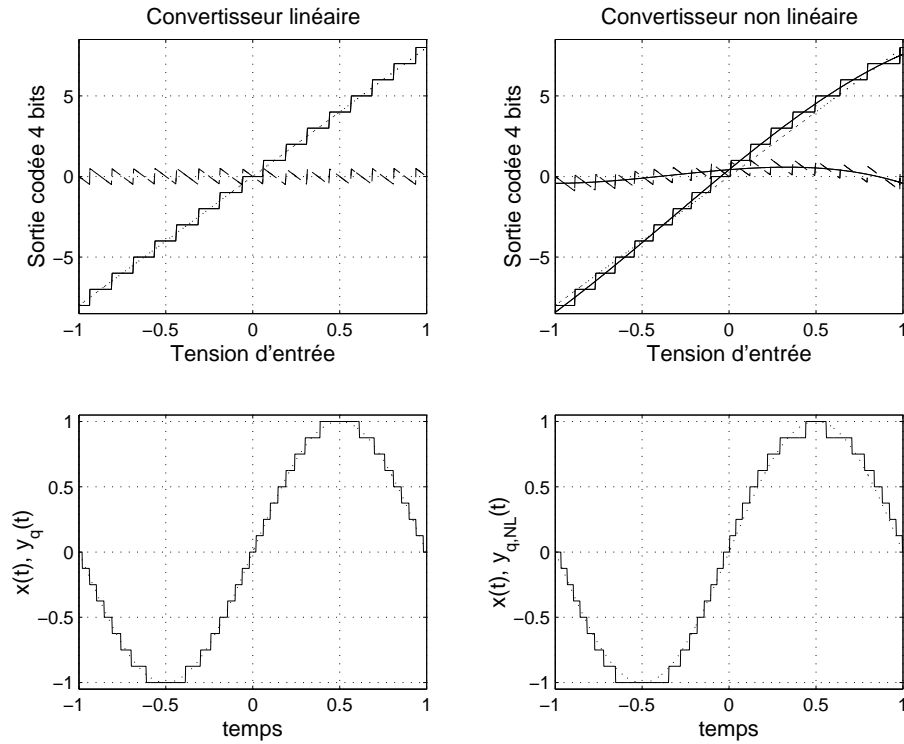


FIG. 8.23: Effet d'une non-linéarité

Signaux	$SNR_{max}$ [dB]	$SNR_{max}$ avec NL [dB]
sinus	$6n + 1.8$	$6n - 4$
triangle	$6n$	$6n - 6$
bruit gaussien	$6n - 4.7$	$6n - 11$

TAB. 8.1: Limite des convertisseurs A-N

### 8.6.6 Conclusion

Les situations que l'on vient d'analyser peuvent se résumer dans le tableau 8.1. De celui-ci, on notera que de manière générale, une conversion A–N réelle peut difficilement fournir un rapport signal sur bruit supérieur à  $6(n - 1) \text{ dB}$  même si la plage du convertisseur est utilisée dans sa totalité. On retiendra donc la relation suivante

$$SNR < 6n - 6 \text{ [dB]} \quad (8.23)$$

comme représentative de ce que l'on peut obtenir au mieux dans des situations réelles.

#### Quelques de valeurs de SNR

Comme nous venons de le voir, le traitement numérique des signaux introduit des erreurs dont on peut estimer la valeur. Celles-ci ne seront acceptables que si elles ne dépassent pas des limites psycho-physiologiques généralement connues.

En téléphonie par exemple, il est important et suffisant que les locuteurs puissent se reconnaître au son de leurs voix. Comme les fréquences fondamentales présentes dans les voix humaines dépassent rarement 1 kHz, on admet qu'une bande passante de 4 kHz est suffisante pour laisser passer les harmoniques nécessaires. Cette bande passante permet de fixer la fréquence d'échantillonnage utilisée en téléphonie numérique à 8 kHz. De plus, de manière à ce que la voix numérisée ne soit pas trop "granulaire", une dynamique de 50 dB est demandée : des convertisseurs 8 bits sont généralement acceptés.

Applications	Dynamique	Nombre de bits
Téléphonie	50 dB	8
Mesures industrielles	70 dB	12
Audio numérique	96 dB	16
Multimètre numérique	> 100 dB	18

TAB. 8.2: Quelques valeurs SNR typiques

En audio de haute qualité, les limites que l'on souhaite atteindre sont fixées par les capacités de l'oreille humaine ; la dynamique et la bande passante demandées sont donc bien plus élevées qu'en téléphonie. Ainsi, pour reproduire la qualité sonore d'une salle de concert, on exige une bande passante de 20 kHz et une dynamique de plus de 80 dB car cela correspond au rapport entre le volume sonore d'un grand orchestre et le bruit de fond d'une salle silencieuse.

## 8.7 Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

Nous venons de voir que, lors d'une conversion A–N, deux effets négatifs apparaissent :

1. le recouvrement spectral causé par l'impossibilité d'avoir un filtre idéal ;
2. la limitation du rapport signal sur bruit due à la résolution du convertisseur.

Généralement le nombre de bits et la bande passante nécessaires sont fixés par l'application ; il reste donc à trouver la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  et l'ordre  $n$  du filtre antirecouvrement. Le critère le plus fréquemment admis pour trouver ces deux valeurs est le suivant :

**L'effet du recouvrement doit être inférieur à la résolution liée à la quantification et à la non linéarité du convertisseur CAN.**

Admettant que l'on utilise un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre  $m$  et de fréquence de coupure  $f_c$ , on aura, à l'extrémité de la bande passante ( $f = f_c$ ), une atténuation du recouvrement spectral valant (voir section 8.5.1)

$$H(f - f_e)|_{f=f_c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}}}$$

On a vu que la résolution d'un convertisseur A-N à  $n$  bits possédant une non-linéarité de  $\pm\frac{1}{2}$  LSB vaut pratiquement

$$R \simeq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Admettant qu'à la fréquence de coupure le recouvrement spectral doit être inférieur à la résolution du convertisseur, il vient

$$\sqrt{1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m}} > 2^{n-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^{2m} &> (2^{n-1})^2 \\ \left(\frac{f_c - f_e}{f_c}\right)^m &> 2^{n-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$f_e > f_c \cdot \left(1 + (2^{n-1})^{1/m}\right) \quad (8.24)$$

Le tableau 8.3 donne le rapport  $f_e/f_c$  pour différents filtres de Butterworth et convertisseurs A-N entachés d'une non linéarité de  $\pm\frac{1}{2}$  LSB. On notera que si l'on souhaite utiliser un filtre d'ordre 2 seulement avec un convertisseur 8 bits, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage 13 fois supérieure à la fréquence de coupure. Alors que,

Ordre $m$ du filtre	Nombre de bits $n$ du CAN				
	8	10	12	14	16
2	13	24	47	92	182
4	4.4	5.8	7.7	10.6	14.5
5	3.7	4.5	5.6	7.1	9.0
6	3.3	3.9	4.6	5.5	6.7
7	3.0	3.5	4.0	4.7	5.5
8	2.9	3.2	3.6	4.1	4.7

TAB. 8.3: Rapport  $f_e/f_c$  en fonction de l'ordre du filtre (Butterworth) et du convertisseur analogique numérique ( $n$  bits  $\pm \frac{1}{2}$  LSB)

si l'on adopte un filtre d'ordre 8, une fréquence d'échantillonnage 3 à 5 fois supérieure à la fréquence de coupure suffit suivant le nombre de bits du CAN.

C'est pourquoi, admettant que l'échantillonneur est précédé d'un filtre antirecouvrement d'ordre 8, on propose généralement une fréquence d'échantillonnage telle que

$$f_e \simeq (3 \cdots 5) f_c \quad (8.25)$$

## 8.8 Reconstruction du signal

### 8.8.1 Convertisseur N–A

Le convertisseur N–A convertit un signal numérique en un signal analogique. Son but est de fournir un signal continu entre chaque échantillon. Cette opération consiste à réaliser une interpolation continue entre les valeurs numériques fournies par le processeur à chaque période d'échantillonnage. On peut imaginer différents interpolateurs allant du simple au compliqué :

- l'interpolateur d'ordre 0 qui maintient constante la valeur numérique fournie ;
  - l'interpolateur d'ordre 1 qui relie linéairement deux valeurs numériques successives ;
  - l'interpolateur d'ordre 2 qui relie paraboliquement trois valeurs numériques successives ;
  - l'interpolateur idéal qui remplace chaque valeur numérique par un sinus cardinal.
- L'interpolateur le plus simple est celui d'ordre zéro et c'est également celui qui est réalisé par un convertisseur numérique-analogique classique. Il est souvent désigné sous le nom de bloqueur d'ordre zéro.

### 8.8.2 Interpolateur idéal

Dans l'énoncé du théorème d'échantillonnage, Shannon a également donné son corollaire qui précise qu'un signal  $x(t)$  peut être reconstruit à partir des valeurs échan-

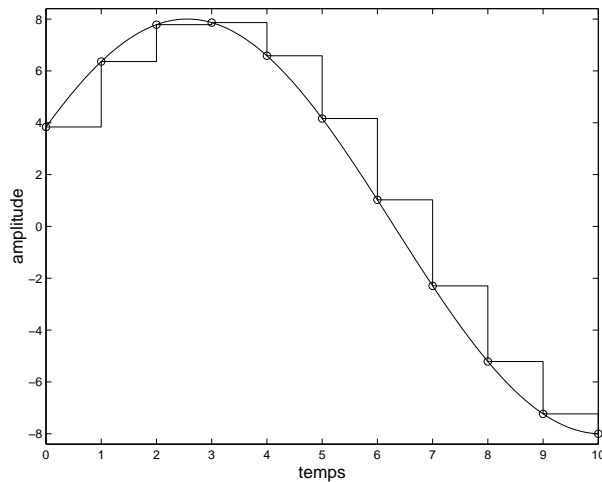


FIG. 8.24: Interpolation d'ordre zéro réalisée par un convertisseur N-A

tillonnées en utilisant la fonction d'interpolation suivante :

$$g(t) = \frac{\sin(\pi f_e t)}{(\pi f_e t)} \quad (8.26)$$

Cela signifie que le signal peut être reconstruit avec une somme de sinus cardinaux temporels centrés sur les instants d'échantillonnage  $t = nT_e$  et d'amplitudes égales aux valeurs échantillonnées  $x[n]$  :

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin(\pi f_e (t - nT_e))}{(\pi f_e (t - nT_e))} \quad (8.27)$$

Une illustration de cette interpolation est donnée à la figure 8.25. On notera que cette interpolation idéale n'est pratiquement réalisable qu'en temps différé et de manière approchée seulement.

Une comparaison entre les résultats fournis par l'interpolateur d'ordre zéro et l'interpolateur idéal peut être faite en observant les reconstructions illustrées à la figure 8.26. Comme le signal original possède une discontinuité, cela conduit à un effet de Gibbs assez prononcé. Dans le cas d'un signal sans discontinuité échantillonné assez rapidement, la reconstruction est presque parfaite.

### 8.8.3 Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un CNA

Le bloqueur d'ordre zéro fournit un signal analogique en escalier dont chaque niveau est égal à la valeur du signal numérique. Fondamentalement, cela signifie que le signal  $x[n]$  est remplacé par une suite d'impulsions rectangulaires d'amplitude variable.

À cette opération de maintien de la valeur  $x[n]$  correspond un opérateur linéaire dont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  est une impulsion d'amplitude 1 et de durée  $T_e$  (figure 8.27) :

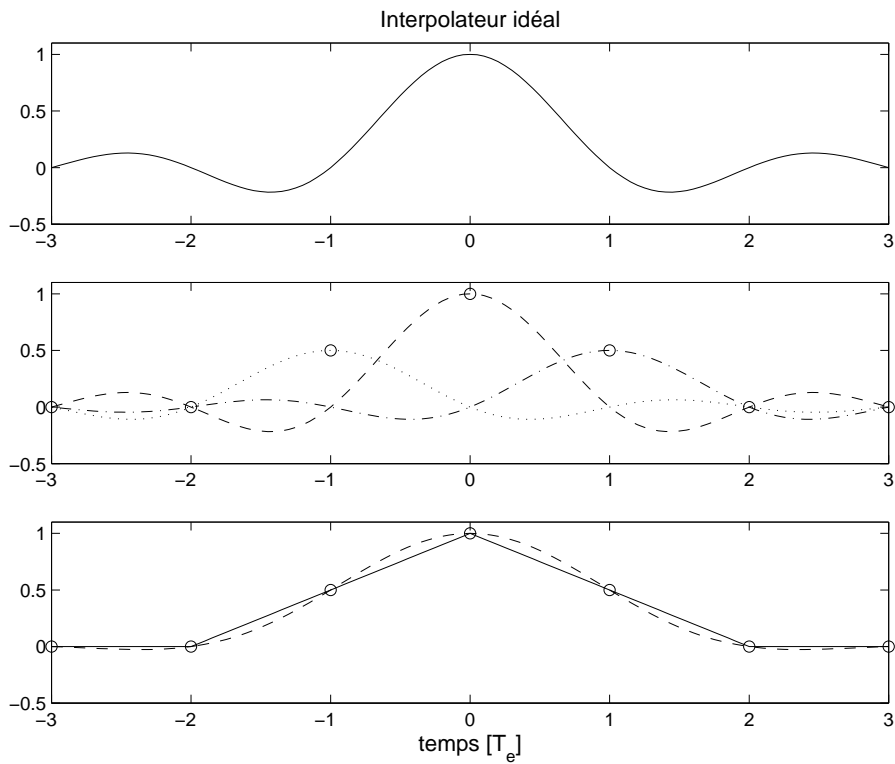


FIG. 8.25: Reconstruction d'un signal triangulaire à l'aide d'un interpolateur idéal

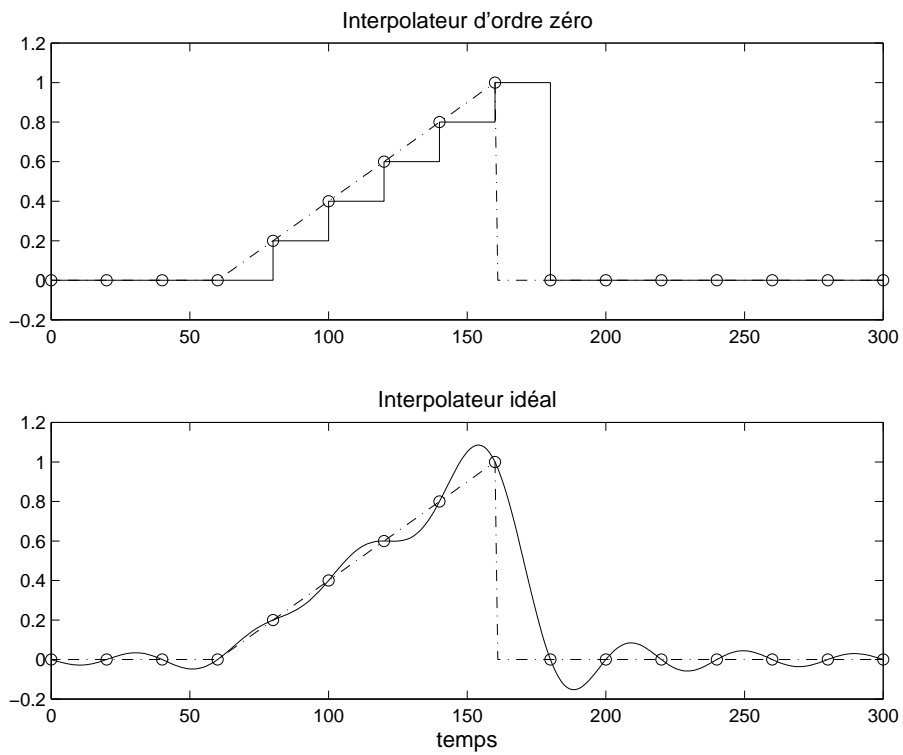


FIG. 8.26: Échantillonnage et reconstruction d'une rampe

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.28)$$

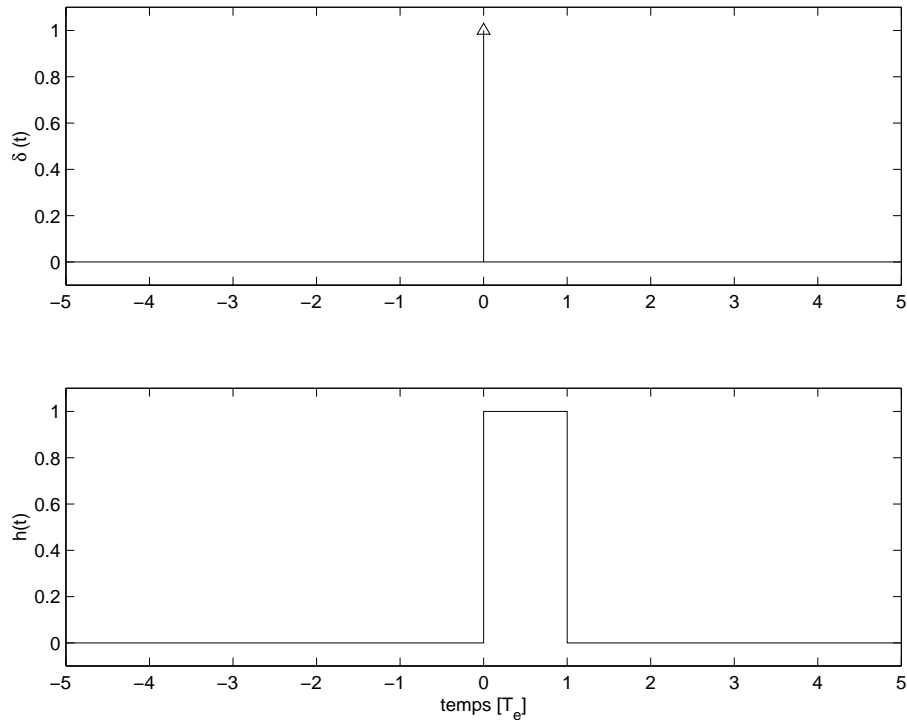


FIG. 8.27: Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro

La réponse en fréquence d'un tel opérateur est la transformée de Fourier  $H(jf)$  de sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$H(jf) = T_e \frac{\sin(\pi f T_e)}{(\pi f T_e)} \exp(-j\pi f T_e) \quad (8.29)$$

Sa représentation bien connue est rappelée à la figure 8.28. Pour comparaison, on y a superposé en traitillé la réponse fréquentielle d'un interpolateur idéal. On notera que le CNA agit comme un filtre passe-bas entre 0 et  $f_e/2$  et qu'il sera bon d'en tenir compte lors de la reconstruction du signal analogique.

#### 8.8.4 Filtre de reconstruction ou de lissage

On peut se rapprocher d'un signal analogique plus habituel en éliminant les escaliers du signal  $x_s(t)$  créé par le CNA. Pour cela, on fait suivre le convertisseur d'un filtre passe-bas, dit de reconstruction ou de lissage. La bande passante de celui-ci doit être suffisante pour laisser passer l'information contenue dans la bande de base du signal numérique. Comme celui-ci s'étend de 0 à  $f_e/2$ , les filtres antirecouvrement et de reconstruction sont généralement les mêmes.

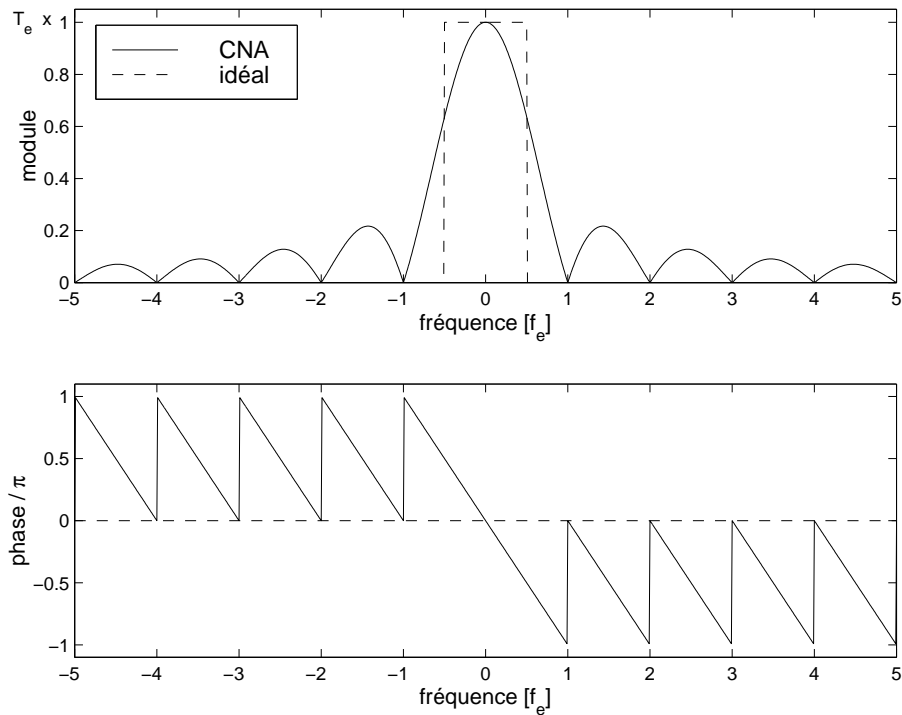


FIG. 8.28: Réponse fréquentielle d'un interpolateur d'ordre zéro

## 8.9 Analyse qualitative d'une chaîne A-N – N-A

Une illustration des différents points étudiés dans ce chapitre est donnée dans les figures qui suivent. On y décrit à l'aide de graphiques les effets du filtre antirecouvrement (FAR), de l'interpolateur d'ordre zéro (CNA) et celui du filtre de lissage (FL). Les signaux rencontrés correspondent à ceux du schéma fonctionnel suivant :

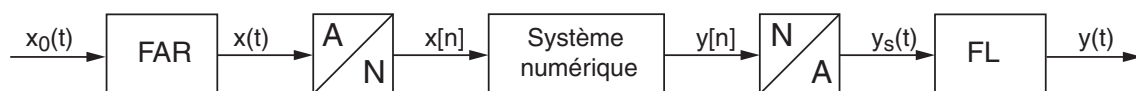


FIG. 8.29: Chaîne de traitement des signaux

### 8.9.1 Échantillonnage sans filtre antirecouvrement

La figure 8.30 montre le signal  $x_0(t)$  échantillonné sans filtrage préalable et son spectre. On y voit en particulier combien le spectre d'amplitude  $X_e(f)$  résultant s'éloigne du spectre original  $X_0(f)$ .

### 8.9.2 Échantillonnage avec filtre antirecouvrement

La figure 8.31 montre le signal  $x(t)$  échantillonné avec un filtre antirecouvrement et son spectre. On y voit en particulier que le spectre d'amplitude  $X_e(f)$  résultant est

## 8 ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

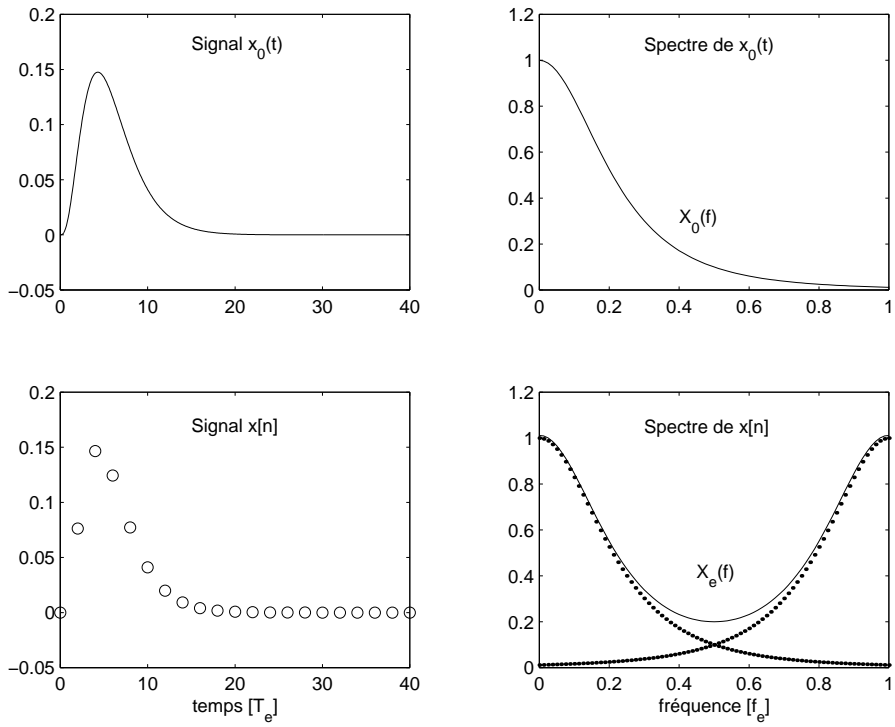


FIG. 8.30: Échantillonnage **sans** filtre antirecouvrement

très proche, entre 0 et  $f_c$ , du spectre original  $X_0(f)$ .

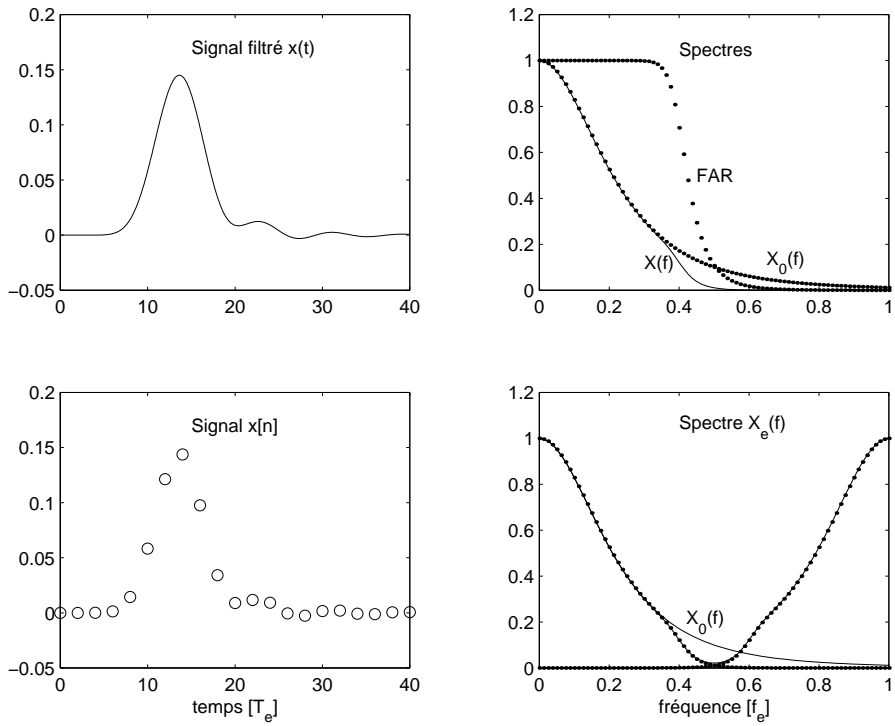


FIG. 8.31: Échantillonnage **avec** filtre antirecouvrement

### 8.9.3 Effet du convertisseur N–A

La figure 8.32 montre le signal échantillonné et son spectre ainsi que celui du bloqueur d'ordre 0 qui n'est autre que le premier lobe de la fonction sinus cardinal. Il est bien clair que ce spectre, qui est aussi la réponse fréquentielle du bloqueur, va modifier le spectre du signal  $y[n]$  appliqué au CNA.

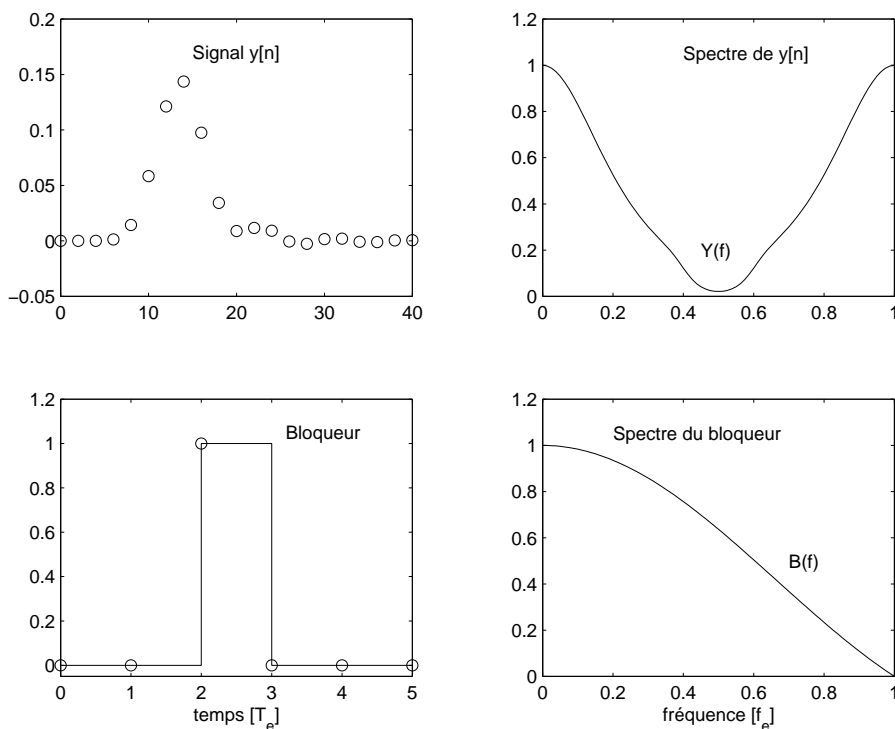


FIG. 8.32: Signal numérique et bloqueur d'ordre 0

### 8.9.4 Reconstruction du signal analogique

La figure 8.33 montre le signal en escalier et son spectre  $Y_s(f) = Y(f) \cdot B(f)$  qui provient du produit entre le spectre de  $y[n]$  et la réponse fréquentielle du bloqueur.

Afin d'éliminer les escaliers de  $y_s(t)$ , on fait suivre le CNA d'un filtre passe-bas identique au filtre antirecouvrement puisque les fréquences supérieures à  $f_e/2$  ne contiennent aucune information intéressante.

### 8.9.5 Correcteur d'amplitude

Il est fréquent de compléter ce filtre passe-bas par un correcteur d'amplitude accentuant les fréquences élevées. Ce correcteur, de réponse fréquentielle  $1/B(f)$  pour  $f$  compris entre 0 et  $f_e/2$ , est construit de manière à compenser le comportement passe-bas du bloqueur. On obtient alors une réponse fréquentielle  $Y(f) \simeq X(f)$  proche de celle du signal original.

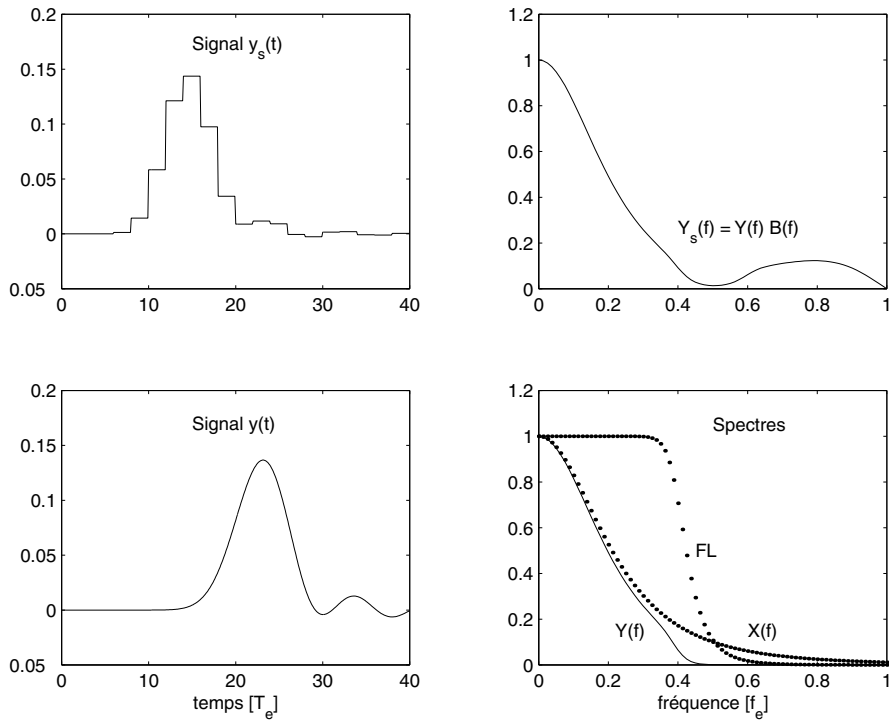


FIG. 8.33: Reconstruction sans et avec filtre de lissage

## 8.10 Exercices

**Ech 1 :** Considérant un signal dont le spectre est représenté à la figure 8.34, déterminez la fréquence d'échantillonnage minimum pour qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral.

Admettant  $f_e = 16 [kHz]$ ,

1. dessinez le spectre du signal échantillonné pour  $f$  compris entre  $\pm 16kHz$  ;
2. que faut-il faire pour éviter le recouvrement spectral ?
3. dessinez le nouveau spectre ; quel en est l'avantage ?

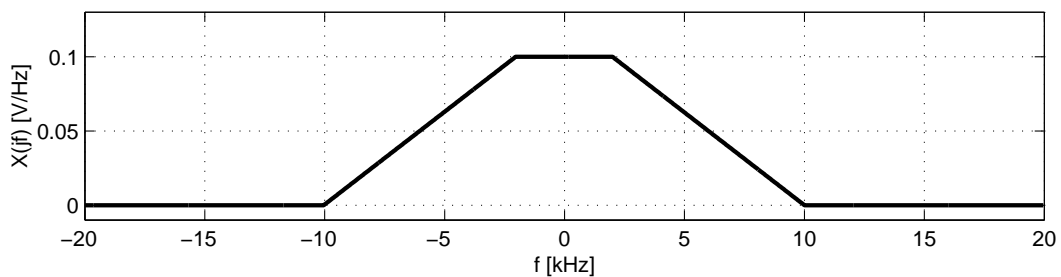


FIG. 8.34: Exercice 1

**Ech 2 :** On considère un signal  $x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 t)$  :

1. que valent sa période  $T_0$  et sa fréquence  $f_0$  ?
2. esquissez  $x_a(t)$  sur 3 périodes au moins et dessinez son spectre  $X_a(jf)$  ;
3. marquez les points d'échantillonnage de  $x_a(t)$  lorsque  $T_e = T_0/4$  ; esquissez le spectre  $X_e(jf)$  ; analysez  $x[n]$  et  $X_e(jf)$  ;
4. faites de même lorsque  $T_e = 3T/4$  ; quelle sinusoïde passe parmi ces points ? concluez ;
5. dans le cas où  $T_e = T_0/2$ , il se passe quelque chose de particulier ; analysez et commentez.

**Ech 3 :** On considère une SIR d'amplitude  $A = 10 [V]$ , de période  $T_0 = 1 [msec]$  et de largeur  $\Delta t = T_0/4$  que l'on échantillonne avec  $T_e = T_0/20$  ;

1. esquissez  $x(t)$  et  $x_e(t)$  ;
2. esquissez  $X(jf)$  et  $X_e(jf)$  ;
3. que valent  $X(jf)$  et  $X_e(jf)$  pour  $f = 3 [kHz]$  ?  
Rép. :  $X_e(+j3) = X(+j3) + X(-j17) + X(+j23) + \dots$

**Ech 4 :** Soit un signal en dents de scie d'amplitude comprise entre  $\pm A = \pm 5 [V]$ , de période  $T_0 = 1 [msec]$  que l'on échantillonne avec la fréquence  $f_e = 8 [kHz]$  ;

1. esquissez  $x(t)$  et  $x_e(t)$  ;
2. sachant que  $X(jk) = (-1)^{k+1} A/(jk\pi)$ ,  $k \neq 0$ , esquissez  $X(jf)$  et  $X_e(jf)$  ;
3. que valent  $X(jf)$  et  $X_e(jf)$  pour  $f = 1 [kHz]$  ?

**Ech 5 :** Considérant le signal analogique

$$x_a(t) = 2 \cos(100\pi t) + 5 \sin\left(250\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos(380\pi t) + 16 \sin\left(600\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. quelle valeur minimum faut-il choisir pour  $f_e$  si l'on veut respecter le théorème d'échantillonnage ?
2. soit  $f_e = 3 f_{e,min}$ , esquissez les spectres d'amplitudes et de phases du signal  $x_e(t)$ .

**Ech 6 :** Un signal analogique

$$x_a(t) = \cos(2\pi \cdot 240 t) + 3 \cos\left(2\pi \cdot 540 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

est échantillonné à raison de 600 échantillons par seconde.

1. que vaut la fréquence de Nyquist  $f_N = f_e/2$  ?
2. si elles existent, que valent les fréquences apparentes  $f_{app}$  ?
3. si  $x(n)$  est restitué à l'aide d'un convertisseur NA suivi d'un filtre passe-bas idéal tel que  $f_c = f_e/2$ , que vaut le signal reconstruit  $y_a(t)$  ?

**Ech 7 :** Considérant un signal carré à valeur moyenne nulle de période  $T_0 = 1 [ms]$  et d'amplitude  $A = 1 [V]$  que l'on échantillonne à la fréquence  $f_e = 9.8 [kHz]$ , on demande :

1. Quelles sont les fréquences et amplitudes des raies spectrales du signal analogique ? Esquissez le spectre d'amplitudes.
2. Quelle est la largeur de la bande de base ? Quelles sont les composantes spectrales réelles présentes dans la bande de base ?
3. Quelles sont les fréquences apparentes présentes dans la bande de base ?
4. Quelles sont les amplitudes de chacune de ces raies ?
5. Les résultats de l'analyse spectrale sont donnés dans la figure 8.35 ; associez les numéros des composantes spectrales théoriques aux raies spectrales obtenues après échantillonnage.

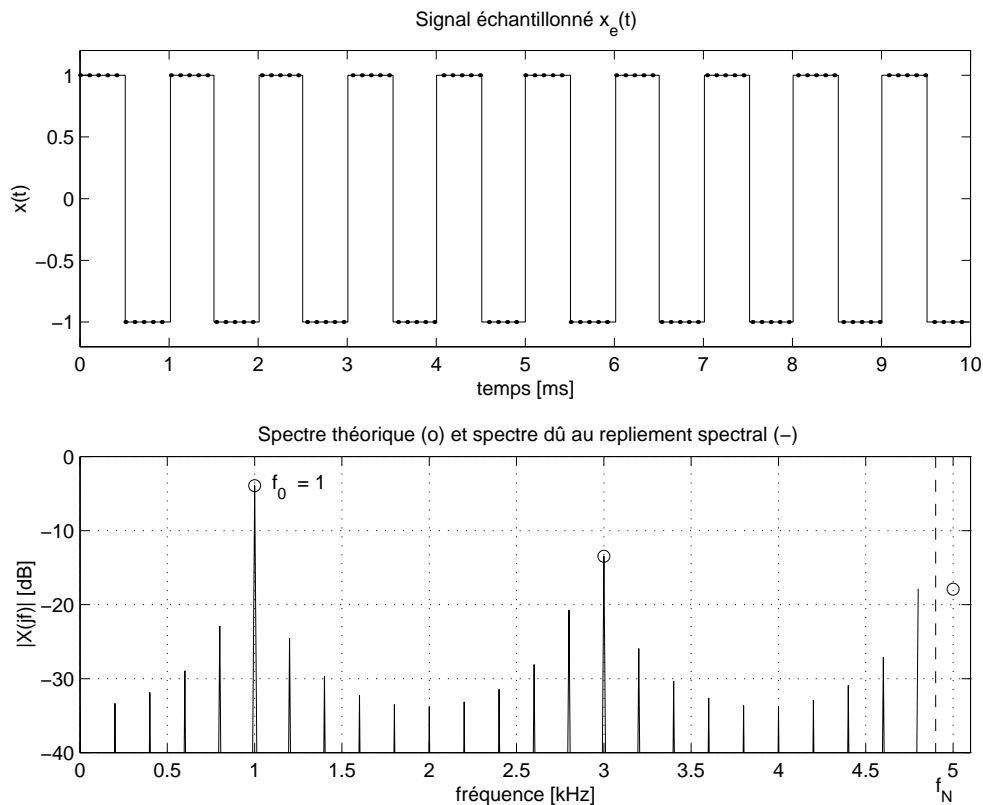


FIG. 8.35: Echantillonnage et repliement spectral pour un signal carré

**Ech 8 :** Considérant une exponentielle décroissante  $x(t) = e^{-at} \varepsilon(t)$  que l'on échantillonne avec une fréquence  $f_e$ , montrez que le spectre du signal échantillonné vaut :

$$X_e(jf) = \frac{1}{a + j2\pi f} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(a + j2\pi f)}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi k f_e)^2}$$

**AnNa 1 :** Considérant qu'un signal est échantillonné à 40kHz et numérisé avec 16 bits, quelle est la durée d'enregistrement que l'on peut stocker dans 1 Moct ?

**AnNa 2 :** Un filtre numérique est constitué des éléments suivants :

- un convertisseur AN à 12 bits avec un temps de conversion de  $5\mu\text{s}$ ,
- un processeur DSP de 16 bits avec un cycle d'horloge de  $50\text{ns}$ ,
- un convertisseur NA à 12 bits avec un temps d'établissement de  $0.5\mu\text{s}$ .

Calculez la bande passante maximum que peut traiter ce filtre sachant que pour chaque valeur échantillonnée le DSP calcule le signal de sortie avec l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{19} h(m) x(n - m)$$

en effectuant une multiplication et une addition en un seul cycle d'horloge.

**AnNa 3 :** Un signal sinusoïdal d'amplitude  $6\text{ V}$  est numérisé à l'aide d'un convertisseur 16 bits. Sachant que celui-ci travaille entre  $\pm 10\text{ V}$  et qu'il est entâché d'une non-linéarité de  $\pm\frac{1}{2}\text{ LSB}$ , calculez :

1. sa résolution et son pas de quantification ;
2. les valeurs efficaces du signal et du bruit de quantification ;
3. le rapport signal sur bruit du signal numérisé.

**AnNa 4 :** On échantillonne un signal sinusoïdal d'amplitude  $5\text{ V}$  avec un CAN 16 bits /  $\pm 10\text{ V}$  entâché d'une de non-linéarité de  $\pm\frac{1}{2}\text{ LSB}$ . Est-il possible de garantir un SNR d'au moins  $90\text{ dB}$  ?

**AnNa 5 :** On échantillonne un signal analogique

$$x(t) = 4 \cos(2\pi \cdot 300 t) - 2 \cos(2\pi \cdot 900 t) [V]$$

avec un convertisseur AN 16 bits travaillant entre  $\pm 5\text{ V}$  qui possède une non linéarité de  $\pm\frac{1}{2}\text{ LSB}$ . Les valeurs numériques du CAN sont transmises à travers une ligne dont le débit est de  $10^4\text{ oct/sec}$ . On demande :

1. y a-t-il repliement spectral ?
2. que valent la résolution et le pas de quantification du convertisseur ?
3. que vaut la puissance du signal  $x(t)$  ? quelle est sa valeur efficace ?
4. que vaut le rapport signal sur bruit de conversion AN ?

**AnNa 6 :** On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 6 et de fréquence de coupure  $4\text{ kHz}$  comme filtre antirepliement. Considérant que le signal échantillonné est perturbé par une composante spectrale d'amplitude  $A = 5\text{ V}$  et de fréquence  $f_0 = 8\text{ kHz}$ , on demande :

1. quelle fréquence d'échantillonnage faut-il choisir pour que le repliement de la perturbation se fasse en  $f \geq f_c$  ?
2. quelle sera l'amplitude  $A_r$  du signal replié en  $f = f_c$  ?

**AnNa 7 :** On utilise un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 comme filtre antirepliement en amont d'un convertisseur AN 12 bits avec  $\pm\frac{1}{2}$  LSB de non linéarité. Sa fréquence de coupure  $f_c$  est fixée à 8 kHz.

1. quelle est la résolution du convertisseur comprenant la quantification et la non-linéarité ;
2. esquissez la réponse fréquentielle du filtre et celle causée par le repliement spectral ;
3. calculez la fréquence d'échantillonnage nécessaire pour que l'affaiblissement du repliement spectral en  $f = f_c$  soit inférieur à la résolution du convertisseur.

**Rép. :**  $f_e = 13.7 f_c$

**AnNa 8 :** Un signal  $x(t)$  sinusoïdal d'amplitude  $A = 10$  [V] de fréquence  $f = 1$  [kHz] est échantillonné très rapidement (à 1 [MHz], par exemple) à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique 4 bits travaillant entre  $\pm 10$  [V].

1. esquissez les signaux  $x(t), x_e[n], x_q(t)$  ;
2. esquissez l'erreur de quantification  $e(t)$  ;
3. quelle est la valeur efficace de ce bruit de quantification ?
4. que vaut le SNR ?

**AnNa 9 :** On remplace le signal sinusoïdal de l'exercice précédent par un signal triangulaire de mêmes amplitude et fréquence. Qu'est ce qui change ?