

9 Description des signaux et systèmes numériques

9.1 Signaux numériques

Les signaux numériques sont mathématiquement représentés par des séquences de nombres notées $x[n]$ pour $-\infty < n < +\infty$. Dans le cas où la séquence provient de l'échantillonnage périodique d'un signal continu $x(t)$, on aura :

$$x[n] = x(nT_e)$$

Les signaux discrets sont souvent représentés graphiquement (figure 9.1). Bien que l'abscisse soit dessinée de manière continue, il est important de noter que la séquence $x[n]$ n'est définie que pour n entier. Pour n non entier, $x[n]$ est simplement non définie.

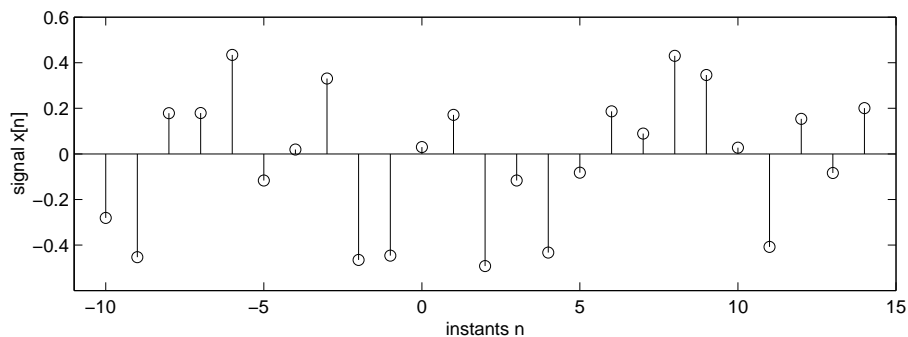


FIG. 9.1: Graphe d'un signal numérique

9.1.1 Quelques signaux fondamentaux

Parmi l'infinité de séquences que l'on peut imaginer, il y en a quelques unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et des systèmes. Ce sont :

1. L'*impulsion unité* définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

9 DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence (telle que celle de la figure 9.1) peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées $\delta[n-k]$ et d'amplitude $x[k]$. La suite $x[n]$ peut donc être décrite par l'expression suivante :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \quad (9.2)$$

2. Le *saut unité* défini par :

$$\varepsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

De manière équivalente, on a :

$$\varepsilon[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad (9.4)$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux sauts unités :

$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] \quad (9.5)$$

3. L'*exponentielle numérique* décrite par :

$$x[n] = R^n \varepsilon[n] \quad (9.6)$$

Dans le cas où $0 < R < 1$, on obtient une exponentielle décroissante alors que pour $|R| > 1$, l'amplitude de la séquence ne cesse d'augmenter avec n .

4. La *sinusoïde* décrite par :

$$x[n] = \cos(n\Omega_0 + \varphi) \quad (9.7)$$

avec $\Omega_0 = 2\pi f_0 T_e$.

5. La *suite complexe* généralement décrite par une exponentielle numérique dont l'argument est complexe :

$$x[n] = (a + jb)^n \varepsilon[n]$$

En remplaçant l'argument $a + jb$ par sa représentation polaire

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \arctan \frac{b}{a} \equiv R \exp(j\Omega_0)$$

on obtient

$$x[n] = R^n \exp(jn\Omega_0) \varepsilon[n] \quad (9.8)$$

Grâce à la relation d'Euler, on voit que cette séquence est une oscillation à valeurs complexes dont l'amplitude varie exponentiellement avec le temps n . L'enveloppe sera croissante si $R > 1$ et décroissante si $R < 1$.

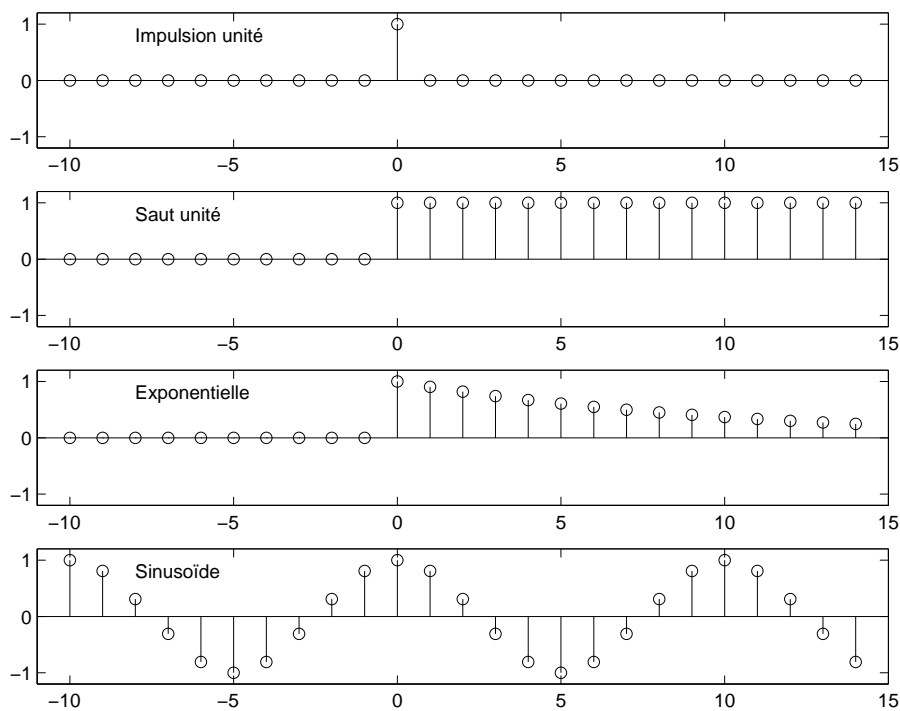


FIG. 9.2: Quelques signaux fondamentaux

6. Le *phaseur* de pulsation Ω_0 :

$$x[n] = \exp(jn\Omega_0) \quad (9.9)$$

Les séquences exponentielle, sinusoidale et complexe décrites ci-dessus sont particulièrement importantes dans l'analyse des systèmes linéaires.

On notera que pour les signaux discrets, la pulsation normalisée Ω_0 se mesure en radians par échantillon et non pas en radians par seconde comme pour la pulsation ω_0 des signaux continus.

9.1.2 Périodicité des signaux numériques

Du point de vue de la périodicité, il existe une différence importante entre signaux continus et discrets. Dans le cas de ces derniers, la périodicité existe si :

$$x[n] = x[n + N]$$

où N est un entier représentant la période de la séquence. Ce qui, pour une sinusoïde discrète, s'écrit :

$$x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi) = A \cos(n\Omega_0 + N\Omega_0 + \varphi)$$

Comme la sinusoïde est périodique 2π , on doit avoir

$$N\Omega_0 = k 2\pi \quad (9.10)$$

Or ceci n'est possible que si Ω_0/π est rationnel.

Considérons comme exemple le cas où $\Omega_0 = 1$. On a alors $N = 2\pi k$; ce qui n'est pas possible car N et k sont des entiers et que π est irrationnel. Par contre, si $\Omega_0 = 3\pi/11$, on a alors :

$$N \Omega_0 = N 3\pi/11 = k 2\pi \quad \Rightarrow \quad N = \frac{22}{3} k$$

et la plus petite valeur de N satisfaisant cette équation est 22 lorsque k vaut 3. Ces deux valeurs signifient qu'il faut 22 échantillons pour retrouver la valeur de départ (une période numérique) et que cette période numérique contient 3 périodes du signal analogique échantillonné.

On voit donc que les *séquences sinusoïdales n'ont pas nécessairement la même période que leur correspondant analogique* et, suivant la valeur de Ω_0 , elles peuvent même ne pas être périodiques du tout.

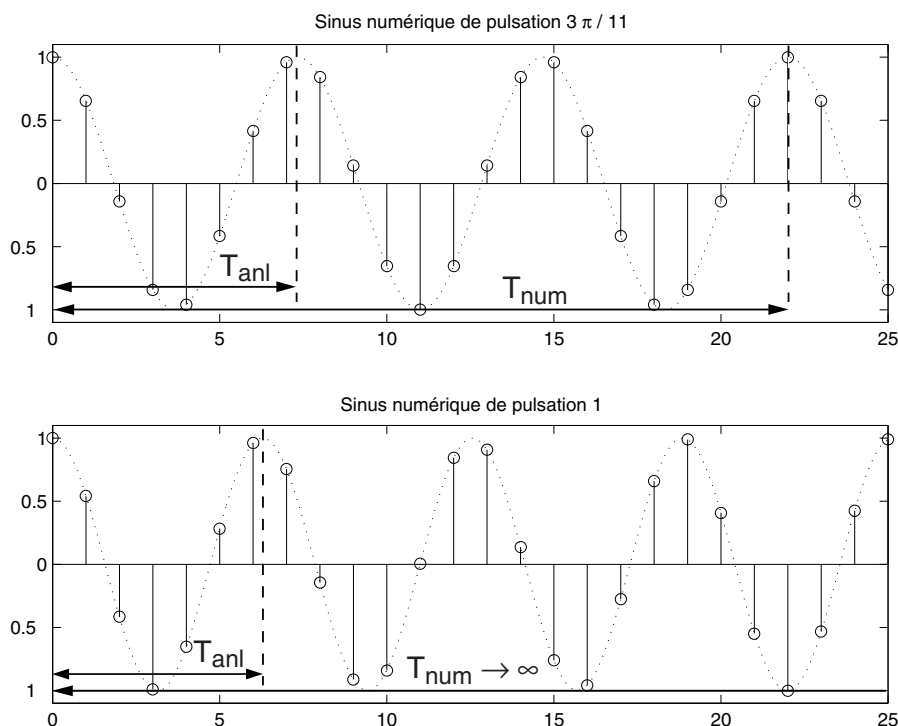


FIG. 9.3: Périodes numérique et analogique

On doit encore rappeler le fait que *l'interprétation des hautes et basses fréquences* est différente pour les signaux discrets ou continus. En effet, pour une sinusoïde analogique, l'oscillation sera d'autant plus rapide que la pulsation ω_0 est élevée. Dans le cas du signal discret $x[n] = A \cos(n\Omega_0 + \varphi)$, l'oscillation sera d'autant plus rapide que Ω_0 se rapproche de π et elle deviendra plus lente si Ω_0 varie de π à 2π . Cette deuxième partie correspond au phénomène de repliement spectral. En fait, à cause de la périodicité des spectres des signaux discrets, ce qui se passe autour de $\Omega = 2\pi$ est indistinguable de ce qui se passe autour de $\Omega = 0$.

9.2 Systèmes numériques

Un système numérique est une fonction ou un algorithme prédéfini qui opère sur un signal numérique (appelé l'entrée ou l'excitation) et qui produit un autre signal numérique nommé la sortie ou la réponse du système.

Un tel système est défini mathématiquement comme un opérateur ou une transformation qui modifie une séquence d'entrée $x[n]$ en une séquence de sortie $y[n]$. On peut représenter cette transformation par un opérateur T tel que $y[n] = T\{x[n]\}$ et en donner l'équation ou son schéma fonctionnel (section 9.2.2).

9.2.1 Exemples de système numériques

Quelques systèmes simples

Considérons des systèmes simples décrits par les équations du tableau 9.1.

a	$y[n] = x[n]$
b	$y[n] = x[n - 1]$
c	$y[n] = x[n + 1]$
d	$y[n] = \max \{x[n - 1], x[n], x[n + 1]\}$
e	$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[k]$
f	$y[n] = x[n] - x[n - 1]$

TAB. 9.1: Équations décrivant des systèmes numériques

A chacun de ces systèmes, on applique à l'instant $n = 0$ le signal :

$$x[n] = \{\uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

Les réponses de chacun des systèmes sont alors les suivantes :

1. L'équation (a) représente le système identité qui restitue simplement le signal qu'on lui applique :

$$y[n] = \{\dots 0, 0, \uparrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

9 DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

2. L'équation (b) représente un décalage arrière d'un pas :

$$y[n] = \{\cdots 0, 0, \uparrow 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, \cdots\}$$

3. Dans le cas (c), le signal est avancé d'un pas :

$$y[n] = \{\cdots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, 0, 0, 0, \cdots\}$$

4. La sortie du système (d) fournit à chaque instant la valeur maximum du signal considéré aux instants présent (n), précédent ($n - 1$) et suivant ($n + 1$) :

$$y[n] = \{\cdots 0, 0, \uparrow 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 0, 0, 0, \cdots\}$$

5. Le système (e) représente un accumulateur qui fait la somme des valeurs qui apparaissent au cours du temps :

$$y[n] = \{\cdots 0, 0, \uparrow 0, 1, 3, 6, 10, 15, 15, 15, 15, 15, \cdots\}$$

6. Le système (f) effectue la différence entre la valeur actuelle et la précédente ; ce qui, numériquement, correspond à la dérivation analogique :

$$y[n] = \{\cdots 0, 0, \uparrow 0, 1, 1, 1, 1, 1, -5, 0, 0, \cdots\}$$

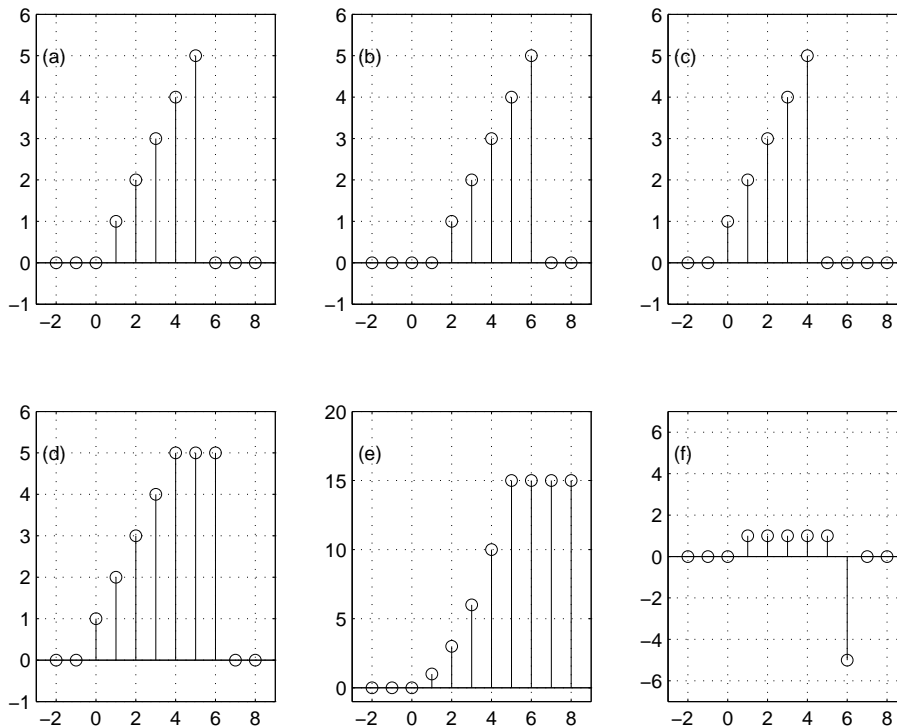


FIG. 9.4: Réponses des systèmes considérés

Moyenneur glissant

Un moyenneur glissant d'ordre 5 est défini par l'équation :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]) \quad (9.11)$$

Ce système fournit à chaque instant n la valeur moyenne des 5 échantillons $x[n]$ entourant et correspondant à la position n . Un tel opérateur est fréquemment utilisé pour atténuer des fluctuations et mettre ainsi en évidence une tendance à moyen terme. Une illustration en est donnée par la figure 9.5 représentant l'enregistrement d'une température.

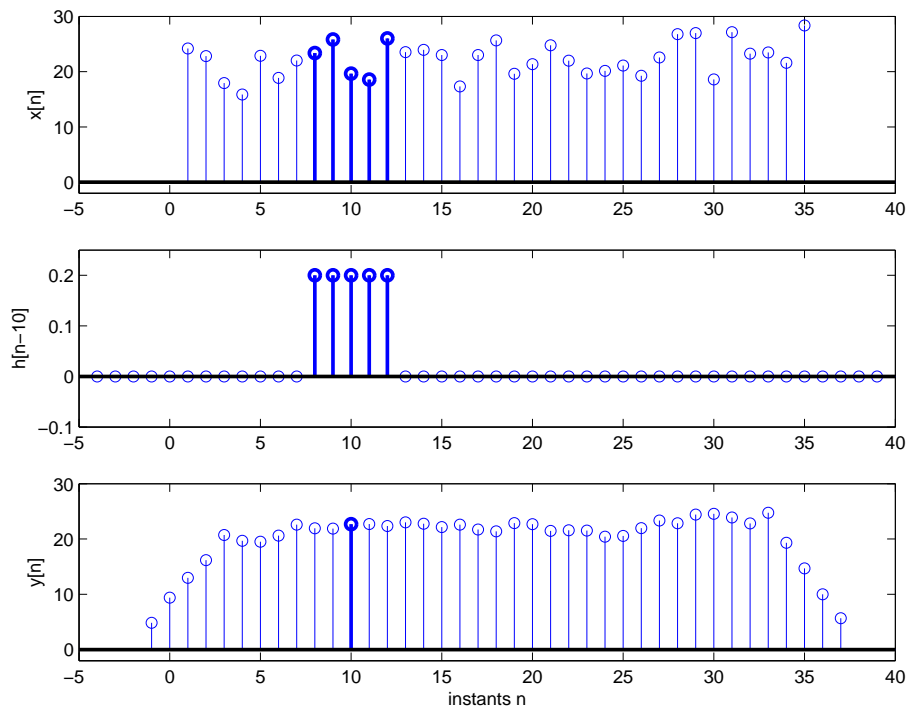


FIG. 9.5: Lissage de l'évolution d'une température

On notera que ce moyenneur centré sur l'instant n est un système non causal ; c'est-à-dire que pour pouvoir l'utiliser, il est nécessaire d'avoir préalablement à sa disposition les valeurs à traiter. Si l'on désirait effectuer ce traitement en temps réel (système causal), on ne pourrait calculer la moyenne glissante que sur les 5 points les plus récents :

$$y[n] = \frac{1}{5} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]) \quad (9.12)$$

9.2.2 Schéma fonctionnel d'un système numérique

Un système numérique peut être décrit, comme on l'a vu, par la donnée d'une équation liant le signal de sortie au signal d'entrée. On peut également, et c'est fréquemment le cas, représenter ces systèmes à l'aide de diagrammes fonctionnels.

Ceux-ci illustrent alors graphiquement les opérations effectuées sur le signal d'entrée ainsi que les connexions les reliant. Les plus fréquentes sont l'addition de 2 valeurs (\oplus), la multiplication de 2 signaux entre eux (\otimes), la multiplication d'un signal par un coefficient (\rightarrow), le décalage avant (z) et le décalage arrière (z^{-1}).

Deux illustrations de schémas fonctionnels sont présentées dans la figure 9.6. Le premier des deux schémas correspond à l'équation non linéaire suivante :

$$y[n] = 0.5 (x_1[n] + x_1[n - 1]) \cdot x_2[n] + 0.9 y[n - 1]$$

dans laquelle on trouve un moyeneur causal d'ordre 2 (premier cadre) et un filtre passe-bas d'ordre 1 (deuxième cadre).

Le deuxième schéma fonctionnel illustre une équation aux différences linéaire d'ordre 2

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] + b_2 x[n - 2] - a_1 y[n - 1] - a_2 y[n - 2]$$

représentant un filtre récursif d'ordre 2.

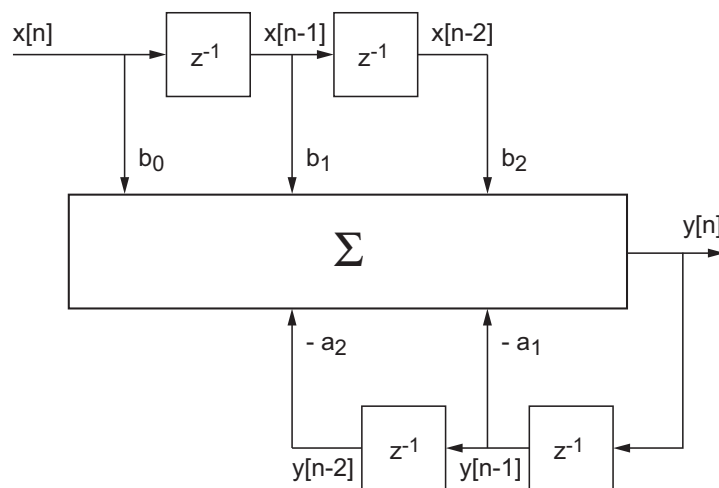
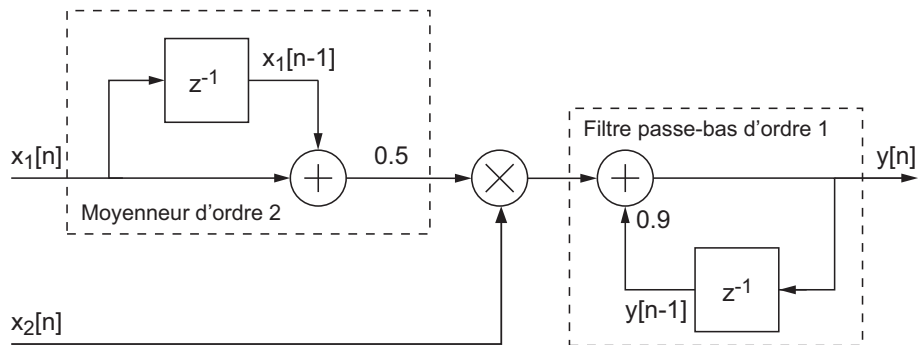


FIG. 9.6: Deux exemples de schémas fonctionnels

9.2.3 Propriétés des systèmes

Suivant leurs propriétés, on peut classer les systèmes de la façon suivante :

1. *Système statique*

Un système statique ou sans mémoire est un système dont la sortie $y[n]$ ne dépend que du signal d'entrée à l'instant n . Par exemple :

$$y[n] = a x[n] + n x[n]^2$$

2. *Système dynamique*

Inversement, un système tenant compte de ce qui s'est passé ou se passera est dit dynamique ou avec mémoire :

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n-1] + x[n] + x[n+1])$$

3. *Système linéaire*

Un système linéaire satisfait au principe de superposition :

$$\begin{aligned} y[n] &= T \{a x_1[n] + b x_2[n]\} \\ &= a T \{x_1[n]\} + b T \{x_2[n]\} \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

4. *Système temporellement invariant*

Un système invariant dans le temps est un système pour lequel un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie simplement décalé de la même valeur :

$$\begin{aligned} \text{si } T \{x[n]\} &= y[n] \\ \text{alors } T \{x[n+d]\} &= y[n+d] \end{aligned}$$

De manière équivalente, un système est dit temporellement invariant lorsqu'on peut croiser les opérations de décalage et de transformation sans modifier le signal de sortie. On a alors :

$$y_{D,T}[n] = y_{T,D}[n]$$

On notera que tous les systèmes décrits par une équation aux différences à coefficients constants sont temporellement invariants.

5. *Système causal*

Un système est causal si la séquence de sortie ne dépend que des valeurs actuelles ou passées de la séquence d'entrée.

6. *Système stable*

Un système est stable si, quelle que soit la séquence d'amplitude finie appliquée à l'entrée, sa sortie ne devient pas infiniment grande.

On notera que les propriétés mentionnées ci-dessus sont des propriétés liées aux systèmes et sont indépendantes des séquences appliquées à ceux-ci.

Remarque Il est important de ne pas oublier que la grande liberté offerte lors de la réalisation des systèmes numériques peut parfois conduire à des pièges. Ainsi en est-il de la succession des opérations effectuées sur un signal. En effet, on a pris l'habitude avec les systèmes analogiques d'effectuer des opérations dans l'ordre qui nous convient sachant que le résultat est théoriquement indépendant de l'ordre des opérations de filtrage. Cela était possible parce que les systèmes analogiques réels sont pratiquement tous linéaires et temporellement invariants par nature.

Or, avec les systèmes numériques, les opérations que l'on peut souhaiter faire ne sont limitées que par notre imagination et certaines d'entre elles conduisent à des résultats qui dépendent de la succession des opérations effectuées. Il est donc très important de vérifier si les opérations avec lesquelles on agit sur un signal sont temporellement invariantes ou non.

Quelques exemples

L'accumulateur Un accumulateur défini par la relation :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (9.13)$$

correspond à l'opération analogique d'intégration. C'est un système linéaire. On notera que si on lui applique une impulsion unité $\delta[n]$, sa sortie sera un saut unité $\varepsilon[n]$. Si on lui applique un saut unité, sa sortie ne cessera d'augmenter linéairement avec n et tendra vers l'infini. L'accumulateur n'est donc pas un système stable.

Différences avant et arrière La différence entre 2 valeurs successives est l'équivalent de la dérivation analogique. On peut effectuer la différence avant définie par la relation :

$$y[n] = x[n + 1] - x[n] \quad (9.14)$$

Elle n'est évidemment pas causale ; ce qui est par contre le cas pour la différence arrière :

$$y[n] = x[n] - x[n - 1] \quad (9.15)$$

Opérateur quadratique Afin d'illustrer ce qu'est un système invariant temporellement, considérons l'opérateur quadratique :

$$y[n] = x^2[n] \quad (9.16)$$

Si l'on effectue d'abord l'élévation au carré puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x^2[n] \rightarrow x^2[n - d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n - d] \rightarrow x^2[n - d] = y_{D,T}[n]$$

Comme les deux résultats sont identiques, le système est temporellement invariant.

Sous-échantillonnage Cette opération très fréquente en traitement numérique des signaux n'est pas invariante temporellement. Pour le voir, considérons une situation où l'on ne prend qu'un échantillon sur deux :

$$y[n] = x[2n] \quad (9.17)$$

Si l'on effectue d'abord la contraction puis le décalage temporel, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[2n] \rightarrow x[2n - d] = y_{T,D}[n]$$

Dans le cas où l'on effectue le décalage puis la contraction, on obtient :

$$x[n] \rightarrow x[n - d] \rightarrow x[2(n - d)] = y_{D,T}[n]$$

Comme le résultat dépend de l'ordre des opérations, le système n'est pas temporellement invariant.

Le tableau 9.2 rassemble les propriétés de quelques opérations fréquemment effectuées en traitement numérique des signaux et mentionne si les opérations sont linéaires (L), invariantes temporellement (I), causales (C), stables (S) et si elles nécessitent une mémoire (M). Quelques opérations sont laissées à l'analyse du lecteur.

	Opérations	Équations	L	I	C	S	M
a	Différence avant	$x[n + 1] - x[n]$	O	O	N	O	O
b	Différence arrière	$x[n] - x[n - 1]$	O	O	O	O	O
c	Accumulation	$\sum_{-\infty}^n x[k]$	O	O	O	N	O
d	Amplification	$a x[n]$	O	O	O	O	N
e	Moyenneur centré	$(x[n + 1] + x[n] + x[n - 1]) / 3$	O	O	N	O	O
f	Contraction temporelle	$x[n^2]$					
g	Sous-échantillonnage	$x[2n]$					
h	Rotation autour de Oy	$x[-n]$					
j	Multiplication temporelle	$n x[n]$					
k	Opération quadratique	$x^2[n]$					
l	Amplification et décalage	$a x[n] + b, \quad b \neq 0$					

TAB. 9.2: Propriétés de quelques transformations

9.2.4 Interconnexions des systèmes

Comme pour les systèmes analogiques, les systèmes numériques peuvent être interconnectés pour former des systèmes plus complexes. Pour ce faire, on a deux possibilités : les connecter en cascade ou en parallèle (figure 9.7). Lors d'une connexion en cascade, on a les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} y_1[n] = H_1 \{x[n]\} \\ y[n] = H_2 \{y_1[n]\} \end{array} \right\} \Rightarrow y[n] = H_2 \{H_1 \{x[n]\}\}$$

Lors d'une connexion en parallèle, on a les relations suivantes :

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] \quad \Rightarrow \quad y[n] = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\}$$

Et c'est seulement dans le cas où les systèmes sont *linéaires et temporellement invariants* que l'on pourra écrire comme on a l'habitude de le faire avec les systèmes continus :

$$y[n] = (H_1 \cdot H_2) \{x[n]\} = (H_2 \cdot H_1) \{x[n]\}$$

$$y[n] = (H_1 + H_2) \{x[n]\} = H_1 \{x[n]\} + H_2 \{x[n]\}$$

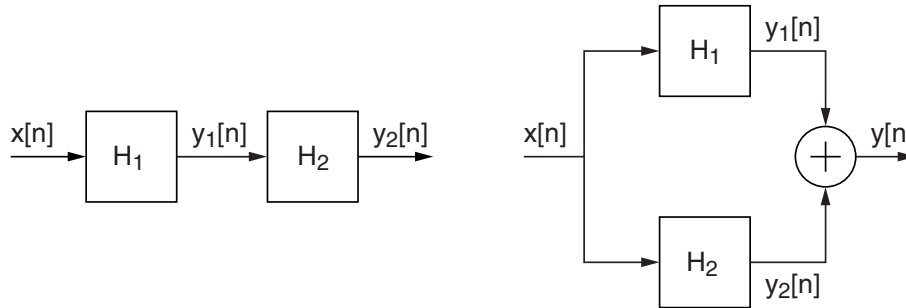


FIG. 9.7: Interconnexions de 2 systèmes en cascade ou en parallèle

9.2.5 Conclusions

Comme nous venons de le voir, les systèmes linéaires et temporellement invariants (systèmes LTI) constituent une classe importante des systèmes et c'est seulement sur les systèmes LTI que l'on peut appliquer les notions de réponse impulsionnelle, de produit de convolution et de fonction de transfert.

9.3 Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Parmi l'ensemble des réponses temporelles d'un système, il en est une qui permet de calculer toutes les autres : c'est la réponse impulsionnelle que l'on obtient en appliquant à un système LTI une impulsion unité $\delta[n]$. Cette réponse particulière est désignée par $h[n]$:

$$h[n] \equiv T \{ \delta[n] \} \tag{9.18}$$

On a vu au début de ce chapitre qu'un signal quelconque $x[n]$ peut être considéré comme une suite d'impulsions d'amplitude variable :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] \tag{9.19}$$

9.3 Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Puisque les systèmes que nous examinerons dès à présent sont linéaires et temporellement invariants, la réponse de ceux-ci au signal $x[n]$ sera constituée d'une somme de réponses dues à chaque impulsion $x[k] \delta[n - k]$:

$$y_k[n] = T \{x[k] \delta[n - k]\} = x[k] h[n - k] \quad (9.20)$$

Ce qui, en tenant compte de l'ensemble des impulsions, conduit à :

$$y[n] = T \{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] \quad (9.21)$$

Cette relation importante porte le nom de *produit de convolution numérique*. Les opérations que nous venons d'effectuer peuvent être décrites et résumées dans la suite de relations suivantes

$$\begin{aligned} \delta[n] &\rightarrow h[n] \\ \delta[n - k] &\rightarrow h[n - k] \\ x[k] \delta[n - k] &\rightarrow x[k] h[n - k] \\ \sum x[k] \delta[n - k] &\rightarrow \sum x[k] h[n - k] \\ x[n] &\rightarrow y[n] \end{aligned}$$

qui sont illustrées par la figure 9.8.

Un simple changement de variable permet de montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n - k] \quad (9.22)$$

Ce résultat s'écrit symboliquement sous la forme :

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = h[n] \otimes x[n] \quad (9.23)$$

L'intérêt du produit de convolution réside dans le fait qu'un système LTI est totalement caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h[n]$ et que le calcul de la réponse à un signal quelconque peut alors se faire en restant dans le domaine temporel. On notera que le produit de convolution est le résultat direct de la linéarité et de l'invariance temporelle ; il ne peut donc s'appliquer qu'aux systèmes LTI.

9.3.1 Systèmes causaux

Systèmes à réponse impulsionnelle infinie

Dans le cas où le système considéré est causal, sa réponse impulsionnelle $h[n]$ ne peut pas précéder l'instant de l'application du signal $x[n]$ au système ; elle est donc nulle si $n < 0$. Considérant que l'on applique le signal $x[n]$ à l'instant $n = 0$, on a donc :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+n} x[k] h[n - k] = \sum_{k=0}^{+n} h[k] x[n - k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (9.24)$$

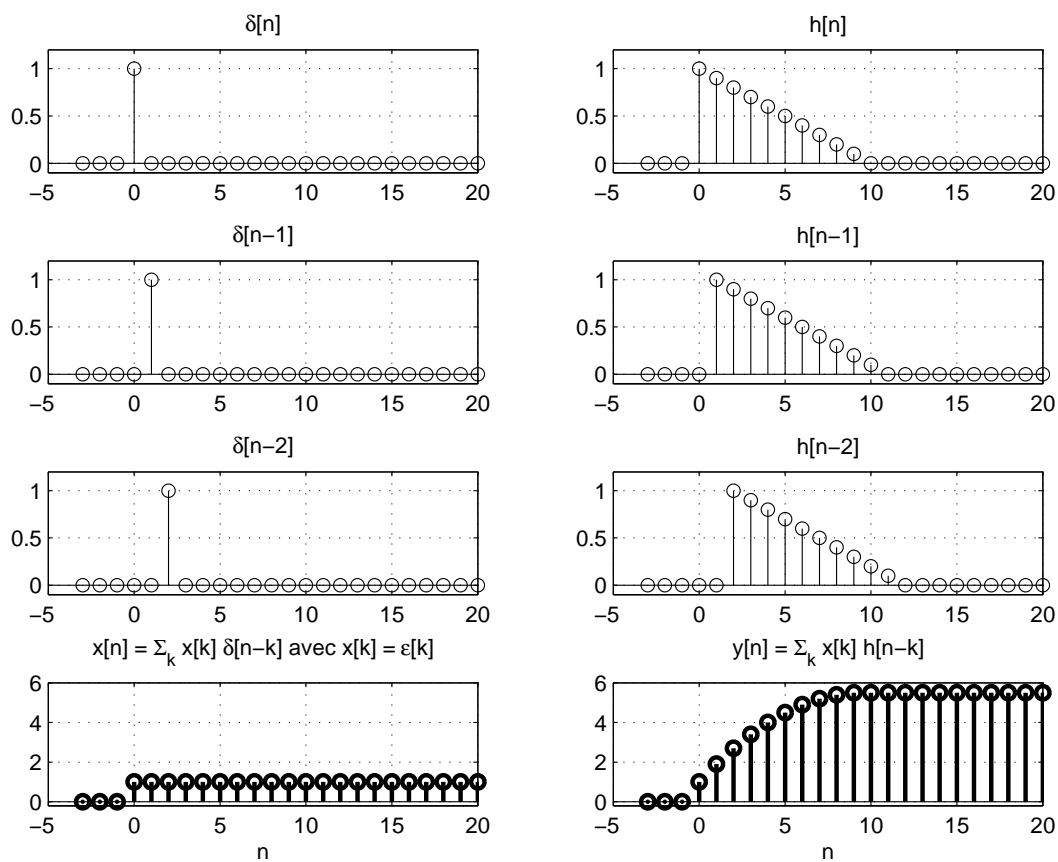


FIG. 9.8: Illustration du produit de convolution

Systèmes à réponse impulsionnelle finie

De plus, dans le cas très fréquent de systèmes causaux à réponse impulsionnelle de durée finie (systèmes RIF), la réponse impulsionnelle est nulle pour $n < 0$ et pour $n \geq N$. Alors, considérant que $x[n < 0] = 0$, la réponse impulsionnelle est de longueur N et la réponse du système à un signal quelconque $x[n]$ se calcule avec :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < +\infty \quad (9.25)$$

Le schéma fonctionnel correspondant à cette équation est représenté à la figure 9.9 (on notera l'usage de l'opérateur z^{-1} qui effectue un décalage arrière).

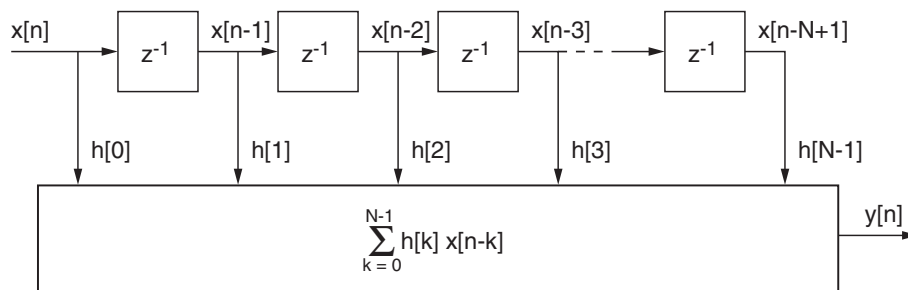


FIG. 9.9: Représentation du produit de convolution

Il est important de bien comprendre les opérations sousjacentes à l'équation de convolution

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

On voit que l'on doit tout d'abord "retourner" le signal d'entrée $x[k]$ (ici, un saut unité) autour de l'ordonnée afin d'obtenir $x[-k]$ (figure 9.10). Puis, à chaque instant n on devra :

1. décaler $x[-k]$ en n pour obtenir $x[n-k]$;
2. effectuer sa multiplication avec $h[k]$ pour obtenir $h[k] \cdot x[n-k]$;
3. sommer la suite de valeurs ainsi obtenues. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/ni.html>

La figure 9.10 illustre la situation pour $n = 10$ et l'on voit que la somme des valeurs successives vaut :

$$\sum_{k=0}^{10} h[k] x[n-k] = 1 + 0.9 + 0.9^2 + \dots + 0.9^{10} = 6.86 = y[10]$$

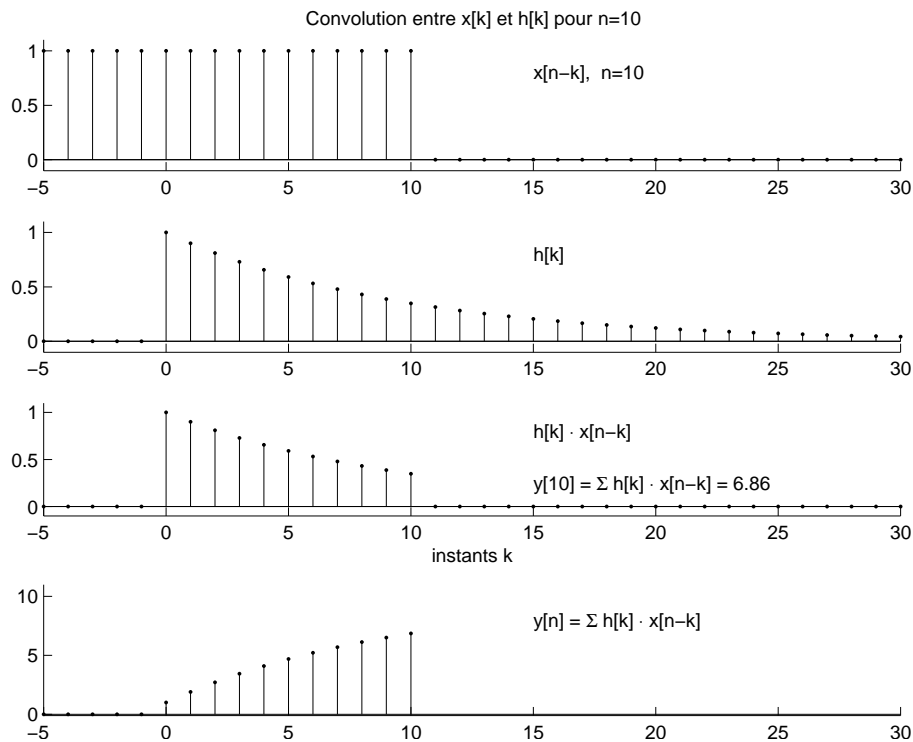


FIG. 9.10: Illustration du calcul d'un produit de convolution

9.3.2 Réalisation d'un produit convolution

Considérant la figure 9.9, on voit que pour calculer un produit de convolution il faut avoir à sa disposition les suites de valeurs $h[k]$ et $x[n-k]$. Cela nécessite donc deux espaces-mémoire de longueur N . Dans le premier (généralement une EPROM), on stockera les valeurs de la réponse impulsionnelle $h[k]$ avec $0 \leq k \leq N-1$ caractérisant le système que l'on souhaite réaliser. Dans le deuxième, qui sera constamment mis à jour (généralement une RAM), on gardera les N dernières valeurs du signal d'entrée $x[n]$ (figure 9.11).

Comme exemple illustratif, imaginons que l'on souhaite réaliser un équivalent numérique d'un filtre passe-bas analogique dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ et la sortie $y(t)$ sont décrites par :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t-\theta) d\theta$$

dont l'équivalent numérique s'écrit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n T_e h[k] x[n-k]$$

On notera que dans cette expression, la période d'échantillonnage T_e multiplie la réponse impulsionnelle $h[k]$ dont les unités sont l'inverse du temps. De manière à

9.3 Réponse impulsionnelle et produit de convolution

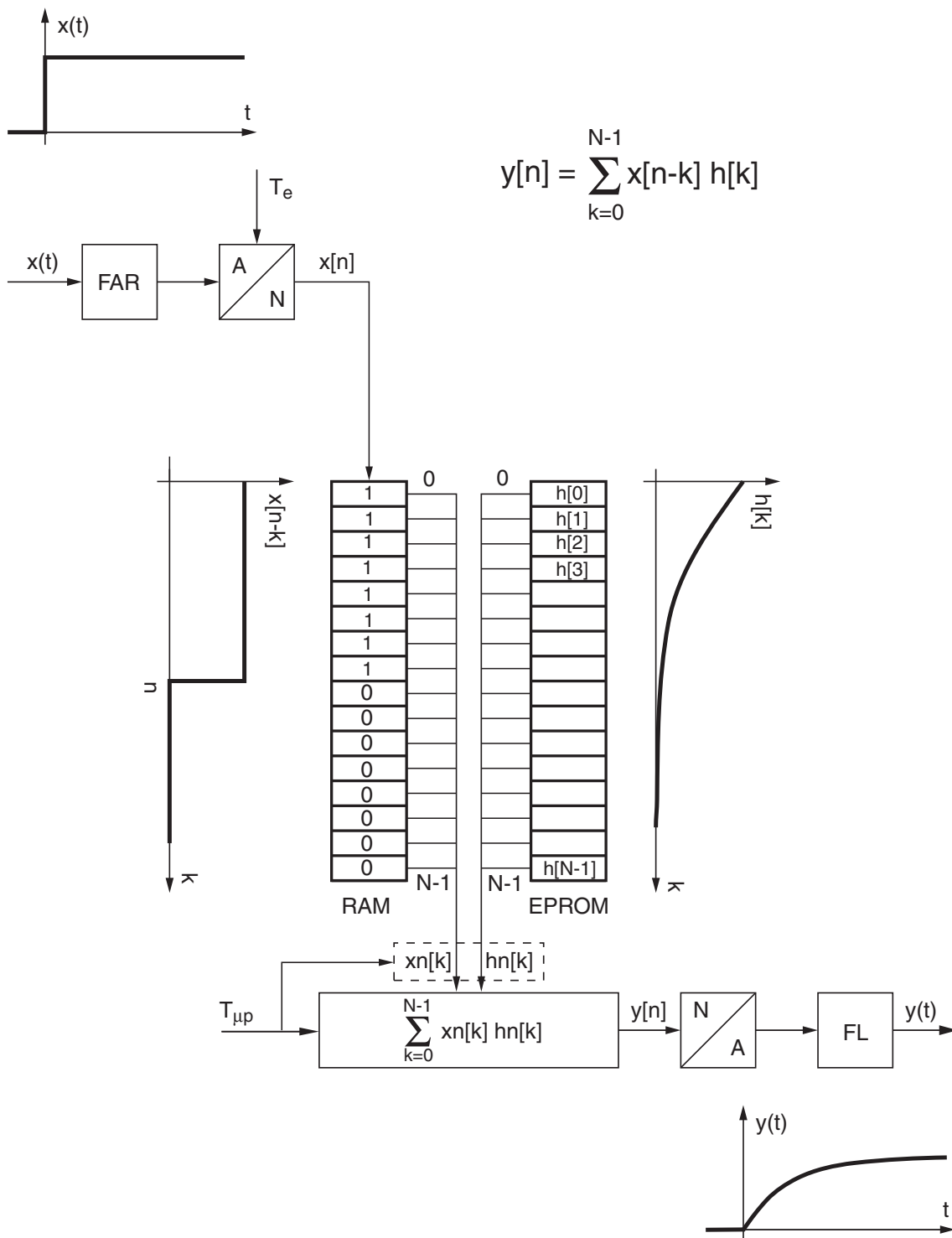


FIG. 9.11: Schéma technologique d'une convolution numérique

9 DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

normaliser la réponse impulsionnelle numérique par rapport à T_e , on la définit comme suit :

$$h[n] \equiv T_e h(t = nT_e) \quad (9.26)$$

Ce qui dans notre cas particulier devient :

$$h[n] = T_e \frac{1}{\tau} e^{-nT_e/\tau} = \frac{T_e}{\tau} (e^{-T_e/\tau})^n$$

En posant :

$$R = e^{-T_e/\tau}$$

la réponse impulsionnelle du filtre numérique passe-bas d'ordre 1 s'écrit donc :

$$h[n] = \frac{T_e}{\tau} R^n \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (9.27)$$

En limitant la longueur de la réponse impulsionnelle aux N premières valeurs et admettant que le contenu de la RAM a été initialisé à zéro, la réponse à un signal quelconque se calcule alors comme suit :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k]$$

Une traduction algorithmique du produit de convolution pourrait être la suivante :

```
{initialisation des variables}
tau = 1e-3
Te = 1e-4
R = exp(-Te/tau)
N = 100
{initialisation des tableaux}
for k = 0 :N-1
    xn(k) = 0
    hn(k) = (Te/tau)*R^k
end
{calcul et envoi du signal de sortie yn}
repeat
    x0 = AnalogInput
    {initialisation et calcul de la somme}
    yn = x0*hn(0)
    for k = 1 :N-1
        do yn = yn + xn(k) * hn(k)
    end
    AnalogOutput (yn)
    {mise à jour du tableau xn(k)}
```

```

for k = N-1 :-1 :1
    do xn(k) = xn(k-1)
end
xn(0) = x0
until stop

```

9.3.3 Une application : l'interpolation numérique

Une application intéressante du produit de convolution consiste en l'agrandissement (zoom) d'une suite de valeurs par interpolation numérique. Parmi le grand nombre d'interpolations possibles, on en présente trois : les interpolations constante, linéaire et parabolique. La première maintient la valeur considérée, la deuxième relie deux points successifs par un segment de droite et enfin la dernière relie ces deux points par des arcs de parabole. Un interpolateur d'ordre N remplace chaque valeur d'une suite $x[n]$ (sauf la dernière) par N nouvelles valeurs.

Du point de vue de la convolution, une fonction d'interpolation est un opérateur que l'on décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n]$. Son application à une suite $x[n]$ de valeurs numériques remplace chacune de celles-ci par, respectivement, une constante, deux segments de droite ou trois arcs de parabole (figure 9.12). Ces fonctions d'interpolation de longueur $2N$ doivent valoir 1 au centre et 0 aux extrémités. Elles sont décrites respectivement par les expressions suivantes :

$$h_0[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{si } N/2 < |n| \leq N \end{cases} \quad (9.28)$$

$$h_1[n] = \frac{N - |n|}{N} \quad \text{pour } |n| \leq N \quad (9.29)$$

$$h_2[n] = \begin{cases} \frac{2}{N^2} (n + N)^2 & \text{si } -N < n < -N/2 \\ 1 - \frac{2}{N^2} n^2 & \text{si } -N/2 \leq n \leq +N/2 \\ \frac{2}{N^2} (n - N)^2 & \text{si } +N/2 < n < +N \end{cases} \quad (9.30)$$

La figure 9.13 illustre l'effet des interpolateurs d'ordre $N = 15$ appliqués à trois impulsions d'amplitude 1, 4 et 2. On y voit très bien que chaque impulsion est remplacée par une fonction d'interpolation et que la somme de celles-ci conduit au résultat global représenté par les points interpolés. Il est important de noter que pour utiliser la convolution en tant qu'interpolateur, il faut au préalable insérer entre les valeurs à interpoler un nombre de zéros égal à $N - 1$. Ainsi, avant d'effectuer le produit de convolution pour obtenir la suite interpolée

$$y[n] = h[n] \otimes x_0[n] \quad (9.31)$$

on doit remplacer la suite $x[n] = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{2}\}$ par une nouvelle suite valant

$$x_0[n] = \{\mathbf{0}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{1}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{4}, 0, 0, 0, \dots, \mathbf{2}\} \quad (9.32)$$

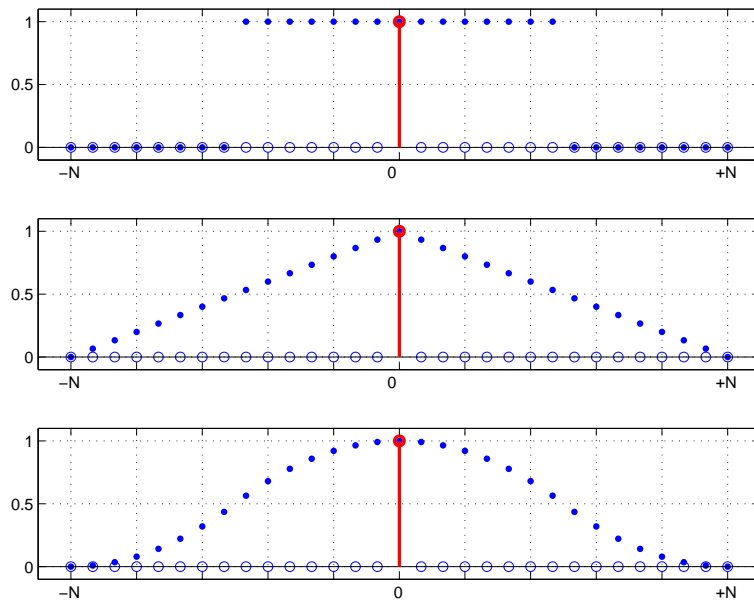


FIG. 9.12: Réponses impulsionnelles de trois interpolateurs

Puis, afin d'éliminer les effets de bords, on enlèvera du résultat de cette convolution les N valeurs extrêmes obtenues de part et d'autre de la suite originale $x_0[n]$.

La figure 9.14 montre les résultats des trois interpolations appliquées à une suite de valeurs oscillantes amorties. On notera que le choix d'une fonction d'interpolation n'est pas anodin car il peut conduire à une représentation erronée du signal analogique enregistré. La figure 9.15 illustre le résultat de ces trois mêmes interpolations appliquées à une image agrandie d'un facteur huit.

9.4 Systèmes décrits par des équations récursives

Dans la section précédente, nous avons analysé les systèmes linéaires et temporellement invariants (LTI). Ces systèmes étaient représentés par leur réponse impulsionnelle $h[n]$ et l'obtention de la réponse $y[n]$ à un signal d'entrée quelconque faisait appel au produit de convolution. Dans le calcul de celui-ci n'intervient que le signal d'entrée $x[n]$ et $h[n]$ (équation non récursive). Cette manière de faire nécessite, pour chaque instant n , le calcul complet de $y[n]$ sans utiliser des résultats précédemment calculés :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x[n - k]$$

Dans les quelques exemples qui suivent, on montre qu'il est généralement assez facile de trouver une équation utilisant des résultats obtenus préalablement. Le système est alors décrit, de manière équivalente, par une équation récursive.

9.4 Systèmes décrits par des équations récursives

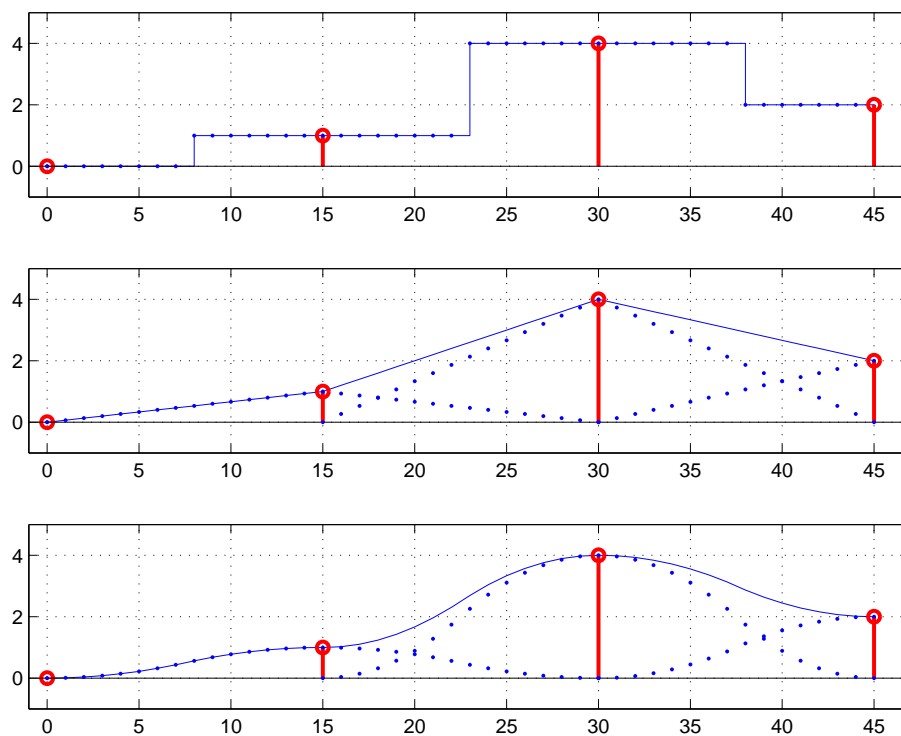


FIG. 9.13: Réponses individuelle et globale de trois interpolateurs d'ordre $N = 15$

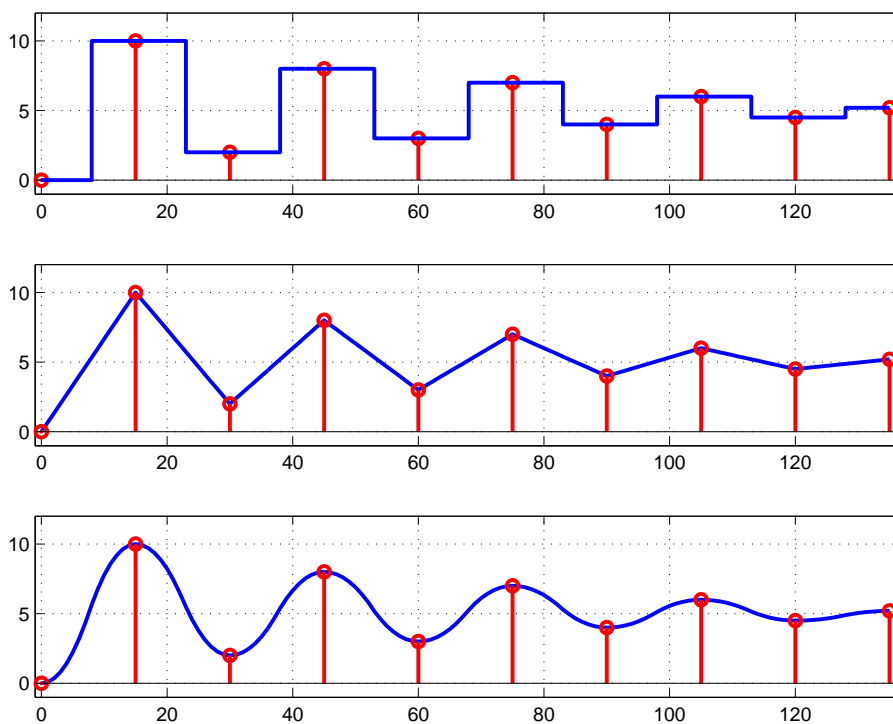


FIG. 9.14: Trois interpolations d'une même suite de valeurs

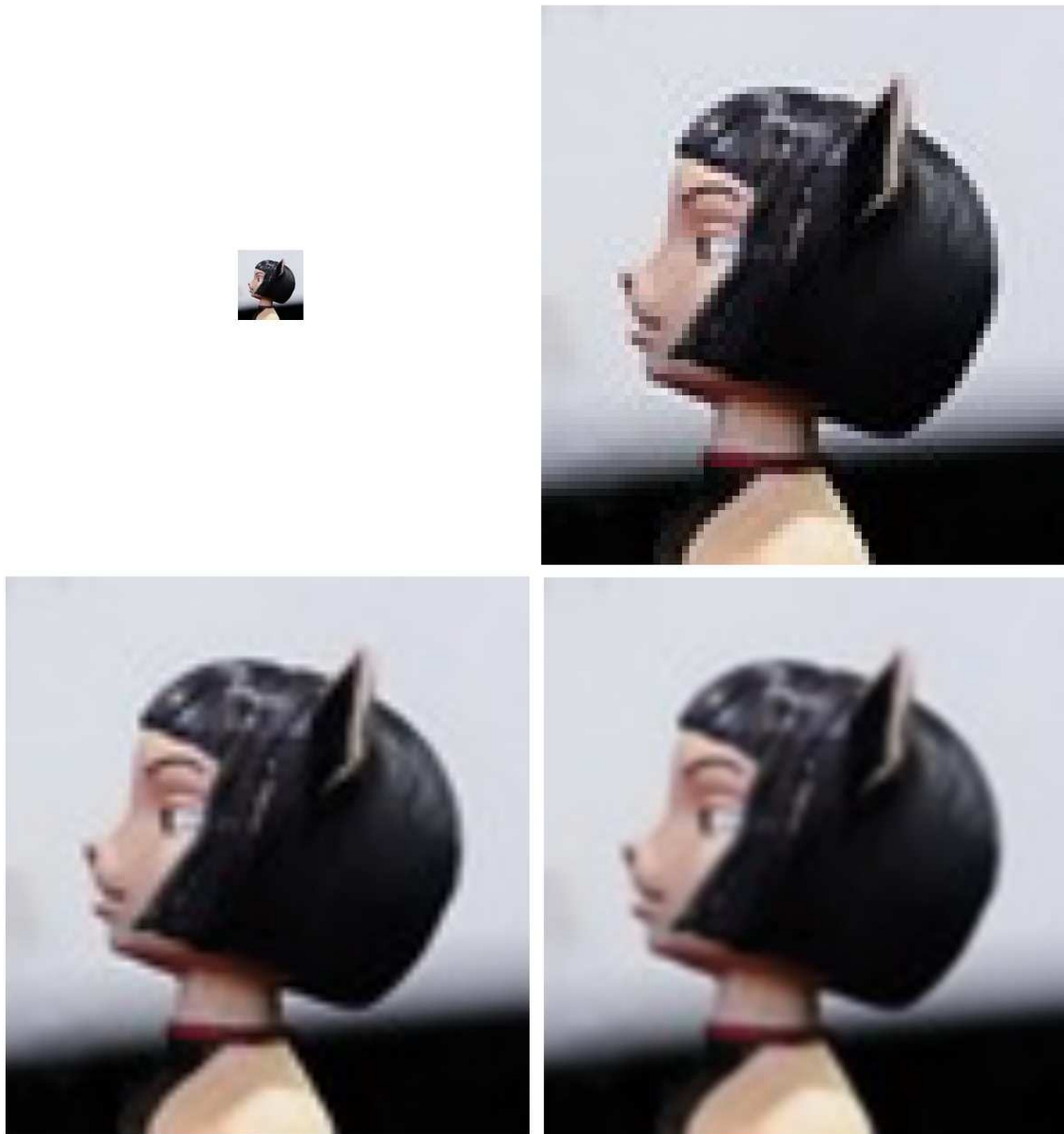


FIG. 9.15: Agrandissement d'une image par interpolation constante, linéaire ou parabolique

9.4.1 Quelques exemples

Accumulateur Un accumulateur causal est représenté par l'équation :

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] \quad (9.33)$$

On voit immédiatement que ce résultat peut être récrit sous la forme :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^n x[k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] \end{aligned}$$

donc :

$$y[n] = y[n-1] + x[n] \quad (9.34)$$

Cette dernière équation n'est autre que la forme récursive de l'accumulateur.

Filtre passe-bas On a vu plus haut que la réponse d'un filtre passe-bas d'ordre 1 pouvait être décrite par :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] \quad (9.35)$$

Ce résultat peut également s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T_e}{\tau} R^k x[n-k] = \frac{T_e}{\tau} \sum_{k=0}^{N-1} R^k x[n-k] \\ &= \frac{T_e}{\tau} \{R^0 x[n] + R^1 x[n-1] + R^2 x[n-2] + \dots\} \\ &= \frac{T_e}{\tau} x[n] + R \frac{T_e}{\tau} \{R^0 x[n-1] + R^1 x[n-2] + R^2 x[n-3] + \dots\} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement la forme récursive suivante :

$$y[n] = \frac{T_e}{\tau} x[n] + R y[n-1] \quad (9.36)$$

On voit ainsi que le calcul de la réponse $y[n]$, qui dans l'approche non récursive demande pour chaque instant n le calcul de N multiplications et additions, peut être remplacé par une équation récursive ne demandant qu'une multiplication et une addition.

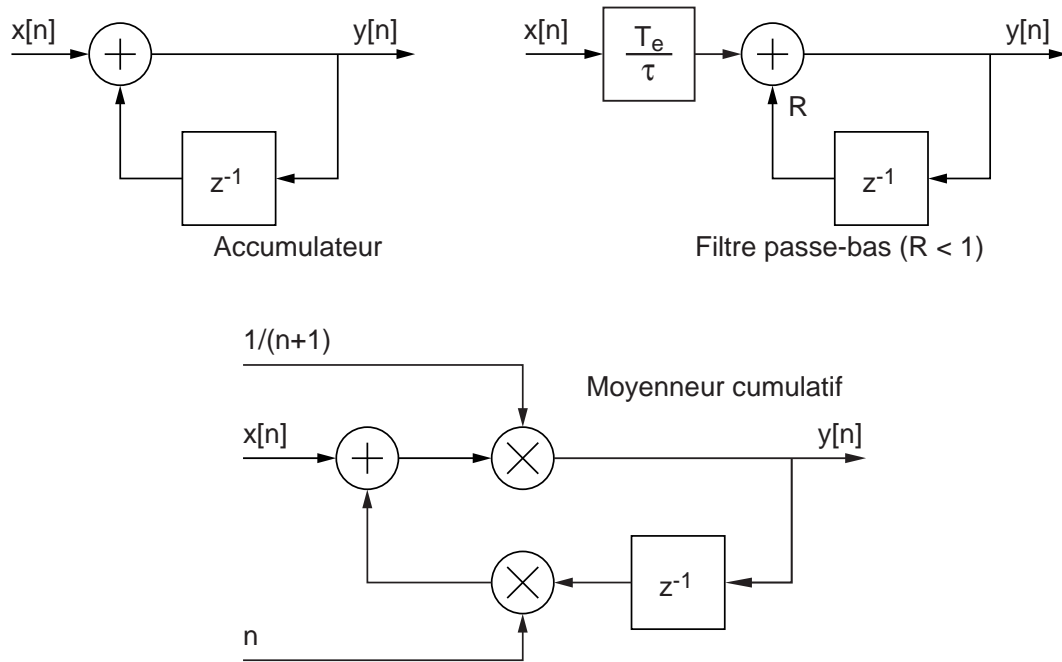


FIG. 9.16: Schémas fonctionnels : (a) d'un accumulateur, (b) d'un filtre passe-bas, (c) d'un moyeneur cumulatif

Moyenne cumulée Considérons le calcul d'une moyenne que l'on souhaite évaluer à l'apparition de chaque nouvel échantillon :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x[k] \tag{9.37}$$

En multipliant les 2 membres de l'équation par $n+1$, on obtient :

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$$

Ce qui peut également s'écrire sous la forme :

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \left(x[n] + n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \right)$$

pour donner finalement

$$y[n] = \frac{1}{n+1} (x[n] + n y[n-1]) \tag{9.38}$$

Les schémas fonctionnels correspondant à chacun de ces 3 systèmes sont illustrés par la figure 9.16.

Conclusion Ces quelques exemples ont montré que bien des opérations linéaires peuvent être ramenées à des équations récursives et qu'alors le nombre d'opérations à effectuer est fortement réduit.

9.5 Exercices

SNB 1 Esquissez les signaux suivants

$$x_1[n] = -\epsilon[n - 2]$$

$$x_2[n] = +\epsilon[n + 1] + \delta[n]$$

$$x_3[n] = 2\epsilon[n + 2] - \epsilon[3 - n]$$

$$x_4[n] = 0.9^n \epsilon[n]$$

$$x_5[n] = \sin(\pi n/6)$$

$$x_6[n] = \sin(\pi n/8) \epsilon[n]$$

SNB 2 Esquissez le signal $x[n] = \{\dots, 0, 0, -1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots\}$ puis faites de même avec les signaux suivants

$$y_1[n] = x[n - 2]$$

$$y_2[n] = x[3 - n]$$

$$y_3[n] = x[n + 1] \cdot \epsilon[n]$$

$$y_4[n] = x[n] \cdot \delta[n]$$

$$y_5[n] = x[n + 1] \cdot \delta[n]$$

$$y_6[n] = x[3 - n] \cdot \delta[n - 2]$$

SNB 3 Trouvez les expressions mathématiques décrivant les signaux de la figure SNB 3.

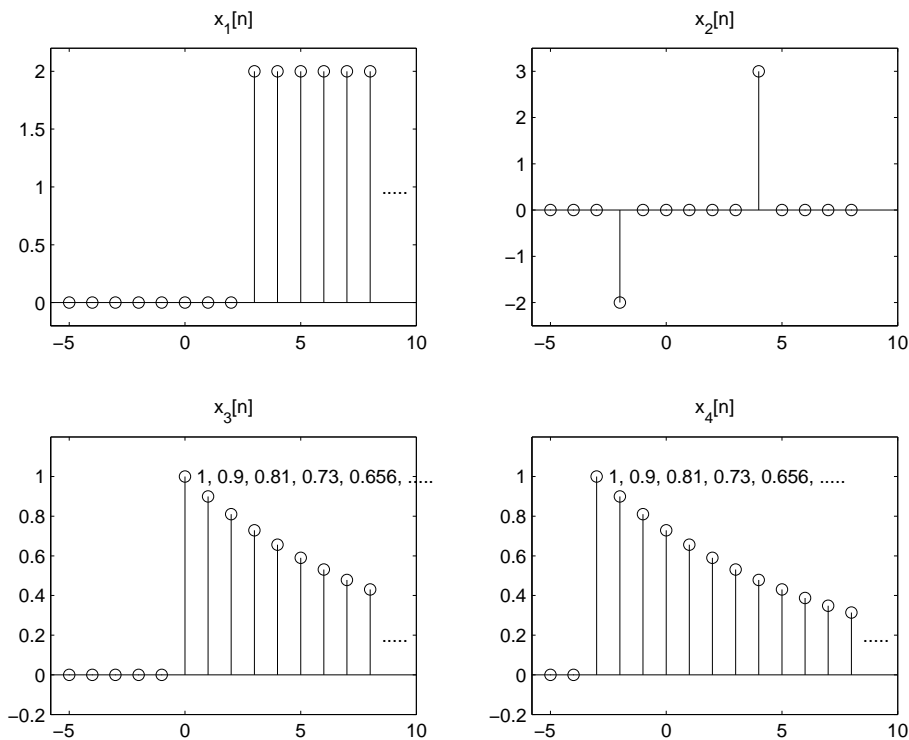


FIG. 9.17: Ex. SNB 3

SNB 4 Considérant les fonctions oscillantes ci-dessous, donnez pour chacune d'entre-elles la pulsation normalisée Ω_0 , la période numérique N et le nombre de périodes analogiques par période numérique.

$$\begin{aligned}
 x_1[n] &= \cos(n\pi/20) & x_4[n] &= \exp(jn\pi/4 - \pi/2) \\
 x_2[n] &= \cos(n3\pi/8) & x_5[n] &= 3\sin(5n + \pi/6) \\
 x_3[n] &= \cos(n13\pi/8 - \pi/3) & x_6[n] &= \cos(n3\pi/10) - \sin(n\pi/10) + 3\cos(n\pi/5)
 \end{aligned}$$

SNC 1 On considère un système temporellement invariant auquel on applique successivement les signaux d'entrée $x_1[n]$, $x_2[n]$ (figure SNC 1). A ces signaux distincts correspondent les suites $y_1[n]$, $y_2[n]$.

1. Quelle est la réponse impulsionnelle du système ?
2. Déterminez si le système est linéaire ou non.
3. Donnez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.

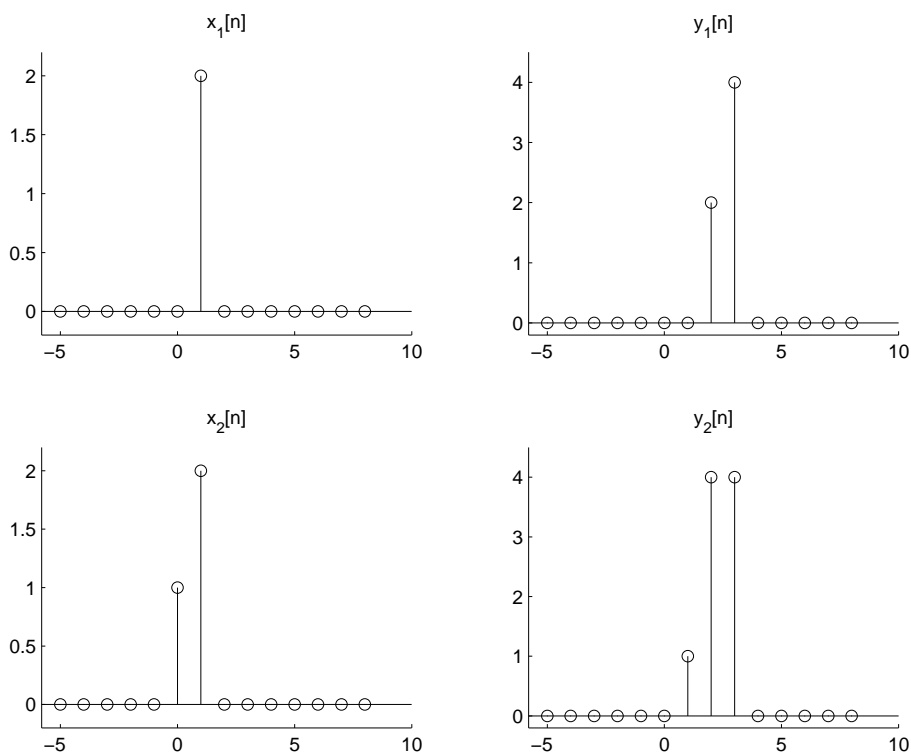


FIG. 9.18: Ex. SNC 1

SNC 2 On considère un système LTI causal décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = \{4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \dots\} \quad n \geq 0$$

et les signaux d'entrée suivants

$$\begin{aligned}
 x_1[n] &= \delta[n - 1] & x_3[n] &= \epsilon[n] - \epsilon[n - 5] \\
 x_2[n] &= +2\delta[n] - \delta[n - 1] & x_4[n] &= \epsilon[n + 5]
 \end{aligned}$$

Esquissez ces signaux $x_k[n]$ et les réponses respectives $y_k[n]$ après les avoir calculées avec le produit de convolution.

SNC 3 Étant donné la réponse impulsionnelle causale

$$h[n \geq 0] = \{0, 1, 1, 1, 1, -2, -2, 0, 0, \dots\}$$

d'un système LTI, dessinez cette réponse puis calculez et esquissez sa réponse à $x[n] = \epsilon[n]$. De quel filtre s'agit-il ?

SNC 4 Utilisez le produit de convolution pour calculer la réponse indicielle d'un système causal et LTI décrit par sa réponse impulsionnelle $h[n] = 0.8^n \epsilon[n]$.

SNC 5 On considère un système décrit par l'équation aux différences suivantes

$$y[n] = 2x[n-1] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel et calculez sa réponse impulsionnelle sachant que les CI sont nulles.

SNC 6 Trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système causal LTI qui a répondu avec le signal $y[n]$ au signal appliqué $x[n]$ (figure SNC 6).

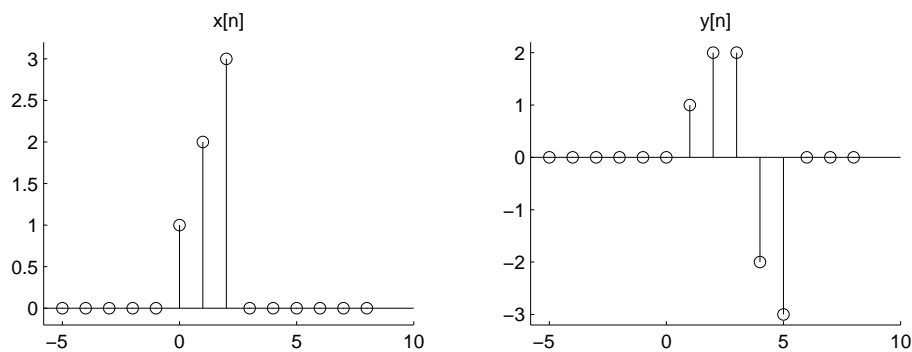


FIG. 9.19: Ex. SNC 6

Remarque : Ce calcul, qui porte le nom d'opération de déconvolution, se fait de manière récursive directement à partir de la définition du produit de convolution.

SNC 7 On souhaite appliquer une interpolation en cosinus d'ordre 4 à la séquence numérique $x[n] = \{1, 6, 3\}$. Pour ce faire,

1. calculez littéralement la réponse impulsionnelle $h[n]$ en cosinus telle que $h[0] = 1$ et $h[\pm N] = 0$;
2. calculez les valeurs numériques de $h[n]$;
3. créez la suite $x_0[n]$ et calculez la suite interpolée $y[n]$.

Rép. :

$$h[n] = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{n}{N} \right) \right) \quad \text{avec} \quad -N \leq n \leq +N$$

9 DESCRIPTION DES SIGNAUX ET SYSTÈMES NUMÉRIQUES

$h[n]$	0	0.1465	0.5	0.8535	1	0.8535	0.5	0.1465	0
$x_0[n]$	1	0	0	0	6	0	0	0	3
$h_1[n]$	1	0.8535	0.5	0.1465	0				
$h_6[n]$	0	0.8787	3	5.1213	6	5.1213	3	0.8787	0
$h_3[n]$					0	0.4394	1.5	2.5606	3
$y[n]$	1	1.7322	3.5	5.2678	6	5.5607	4.5	3.4393	3