10 Réponses des systèmes numériques

Nous avonsvu dans le chapitre précédent qu'un système numérique peut être décrit par une équation aux différences. De manière générale, c'est celle-ci qui est implantée dans un processeur afin de réaliser en temps réel la fonction souhaitée. Afin que les calculs se fassent dans un temps très court, on utilise de préférence un processeur spécialisé pour le traitement de signaux (Digital Signal Processor = DSP) qui, en un cycle d'horloge ($t_{clock} \simeq 10\,\mathrm{ns}$) va chercher deux variables, effectue leur produit et ajoute le résultat dans un registre.

Cependant, avant d'implanter dans un DSP un système ou un filtre numérique sous la forme d'un algorithme, il est nécessaire d'analyser et comprendre le comportement de celui-ci. Pour ce faire, on doit pouvoir au préalable :
– décrire le système considéré par sa réponse impulsionnelle ou par une équation aux différences ;
– représenter ce système avec une fonction de transfert ;
– prévoir la stabilité du système numérique ;
– calculer les réponses temporelle et fréquentielle du système.

10.1 Réponse temporelle des systèmes linéaires

10.1.1 Résolution d'une équation récursive

À titre introductif, considérons l'équation linéaire suivante :

$$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.2y[n-2] = x[n] \equiv 0.8^n$$

dont on recherchera la solution pour $n \geq 0$ en tenant compte des deux conditions initiales : $y[-1] = 0$, $y[0] = 0$.

La démarche à suivre pour résoudre cette équation aux différences est la même que celle utilisée pour résoudre les équations différentielles à coefficients constants. C'est-à-dire qu'il faut :

1. rechercher la solution générale $y_h[n]$ de l'équation homogène ;
2. rechercher une solution particulière $y_p[n]$ de l'équation non-homogène ;
3. en déduire la solution générale $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$;
4. calculer les coefficients indéterminés en tenant compte des conditions initiales.

10.1.2 Solution de l'équation homogène

On sait que la solution générale d'une équation différentielle à coefficients constants est une somme d'exponentielles de la forme e^{pt}. Il en va de même pour une équation aux différences à coefficients constants ; mais dans ce cas, l'exponentielle numérique sera de la forme λ^n. On recherchera donc une solution générale de l'équation homogène en posant :

$$y_h[n] = C\,\lambda^n$$

où λ est une constante, complexe ou non, et C une constante réelle.

En portant cette solution dans l'équation homogène, on obtient :

$$C\,\lambda^n - 0.9\,C\,\lambda^{n-1} + 0.2\,C\,\lambda^{n-2} = 0$$

En mettant en évidence le terme commun $C\,\lambda^{n-2}$, on obtient une équation quadratique en λ qui est l'équation caractéristique de l'équation aux différences :

$$\lambda^2 - 0.9\;\lambda + 0.2 = 0$$

dont les racines sont :

$$\lambda_1 = +0.4 \qquad \lambda_2 = +0.5$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n \\ &= C_1\,0.4^n + C_2\,0.5^n \end{aligned}$$

10.1.3 Solution particulière

La solution particulière de l'équation aux différences est du même type que la fonction du second membre de l'équation ; dans notre cas, on posera :

$$y_p[n] = C_3\,\lambda_3^n \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = 0.8$$

En portant cette solution dans l'équation aux différences, il vient :

$$C_3\,\lambda_3^n\left(1 - 0.9\,\lambda_3^{-1} + 0.2\,\lambda_3^{-2}\right) = \lambda_3^n$$

Après simplification par λ^n, on en tire le coefficient C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{1 - 0.9 \cdot 0.8^{-1} + 0.2 \cdot 0.8^{-2}} = \frac{16}{3}$$

La solution particulière vaut donc :

$$y_p[n] = \frac{16}{3}\,0.8^n$$

10.1.4 Solution générale

La solution générale
$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$
de l'équation aux différences complète s'écrit donc :
$$y[n] = C_1\, 0.4^n + C_2\, 0.5^n + \frac{16}{3}\, 0.8^n$$
Les coefficients C_1 et C_2 se calculent en tenant compte des conditions initiales. Celles-ci nous permettent d'écrire deux équations algébriques :
$$\begin{aligned}
y[-1] &= 0 \\
&= C_1\, 0.4^{-1} + C_2\, 0.5^{-1} + \frac{16}{3}\, 0.8^{-1} \\
&= 2.5\, C_1 + 2.0\, C_2 + \frac{20}{3} \\
y[0] &= 0 \\
&= C_1\, 0.4^0 + C_2\, 0.5^0 + \frac{16}{3}\, 0.8^0 \\
&= C_1 + C_2 + \frac{16}{3}
\end{aligned}$$
dont les solutions sont :
$$C_1 = +\frac{24}{3} \qquad C_2 = -\frac{40}{3}$$
La solution générale de l'équation aux différences pour $n \geq 0$ est donc :
$$y[n] = \frac{1}{3}\left(+24 \cdot 0.4^n - 40 \cdot 0.5^n + 16 \cdot 0.8^n\right)$$

10.1.5 Généralisation

On peut généraliser ce que nous venons de voir en considérant l'équation d'ordre N :
$$y[n]+a_1\, y[n-1]+\cdots+a_N\, y[n-N] = b_0\, x[n]+b_1\, x[n-1]+\cdots+b_M\, x[n-M] \quad (10.1)$$
dont on cherchera la solution en tenant compte des N conditions initiales.

Solution de l'équation homogène

La solution d'une équation aux différences linéaire et à coefficients constants est du type :
$$y_h[n] = C\, \lambda^n \quad (10.2)$$
En portant cette solution dans l'équation aux différences, on obtient une équation caractéristique dont les racines déterminent la forme de la solution générale. Celle-ci dépend des trois cas suivants.

Racines réelles et distinctes

Chaque terme λ_i^n avec $i = 1, 2, \cdots, M$ est une solution de l'équation aux différences homogène. La solution générale est une combinaison linéaire de tous ces termes :

$$y_h[n] = C_1\,\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n + \cdots + C_M\,\lambda_M^n \tag{10.3}$$

Les coefficients C_i sont des constantes fixées par les conditions initiales.

Racines complexes conjuguées

Soit $\lambda_{1,2} = a \pm jb$, deux racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, la solution $y_h[n]$ est une combinaison linéaire de chaque racine élevée à la puissance n :

$$y_h[n] = C_1\,(a + jb)^n + C_2\,(a - jb)^n$$

On peut également écrire les racines sous forme polaire :

$$a \pm jb = R\,e^{\pm j\Omega}$$

avec :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \Omega = \mathrm{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a donc

$$(a \pm jb)^n = \left(R\,e^{\pm j\Omega}\right)^n = R^n\,\left(\cos(n\Omega) \pm j\,\sin(n\Omega)\right)$$

Comme les coefficients de l'équation aux différences sont réels, la solution l'est également. Cela signifie que les termes imaginaires se simplifieront et que l'on obtiendra finalement :

$$\begin{aligned} y_h[n] &= A_1\,R^n\,\cos(n\Omega) + A_2\,R^n\,\sin(n\Omega) \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,R^n\,\cos\left(n\Omega + \mathrm{atan}\left(\frac{-A_2}{A_1}\right)\right) \end{aligned}$$

Le résultat général est alors le suivant :

$$y_h[n] = A\,R^n\,\cos\left(n\Omega + \alpha\right) \tag{10.4}$$

Les conditions initiales permettront de calculer les valeurs de A_1 et A_2 ou celles de A et α.

Racines multiples

Si la racine est de multiplicité m telle que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m$, on pose :

$$y_h[n] = \left(C_1 + C_2\,n + \cdots + C_m\,n^{m-1}\right)\,\lambda_1^n \tag{10.5}$$

Ici également, les coefficients C_1 à C_m seront fixés par les conditions initiales.

Solution particulière

La solution particulière $y_p[n]$ a la même forme que le second membre de l'équation aux différences $x[n]$. Comme exemple, on peut rappeller les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} x[n] = A \quad &\Rightarrow \quad y_p[n] = C \\ x[n] = A\,\lambda^n \quad &\Rightarrow \quad y_p[n] = C\,\lambda^n \\ x[n] = A\,\cos(n\Omega + \alpha) \quad &\Rightarrow \quad y_p[n] = C\,\cos(n\Omega + \varphi) \end{aligned}$$

10.2 Stabilité des systèmes numériques

Nous venons de voir que la dynamique de la réponse d'un système dépend directement des racines de son équation caractéristique. Comme la réponse du système est décrite par des exponentielles λ^n, il suffit que le module de la racine λ soit inférieur à l'unité pour que cette réponse tende vers zéro au fur et à mesure que n augmente.

Comme on le verra plus loin, les racines de l'équation caractéristique ne sont autres que les pôles de la fonction de transfert représentant le système. On parlera donc indifféremment de pôles du système ou de racines de l'équation caractéristique.

Conclusion Un système numérique est stable si toutes les racines de son équation caractéristique sont à l'intérieur du cercle de rayon unité (figure 10.1), alors qu'un système analogique n'est stable que si ses pôles sont à partie réelle négative.

10.3 Instants caractéristiques

On connaît l'importance des paramètres dynamiques d'un système pour évaluer son comportement temporel. Dans le cas des systèmes analogiques, on sait que, si les pôles $p_{1,2}$ sont complexes conjugués à partie réelle négative, la solution homogène $y_h(t)$ est une fonction sinusoïdale amortie telle que :

$$y_h(t) = C\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,\cos\left(2\pi\,\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

avec τ et T représentant la constante de temps et la période d'oscillation de l'évolution temporelle du signal. On montre aisément que ces deux temps caractéristiques valent respectivement :

$$\tau = \left|\frac{1}{Re\,\{p_{1,2}\}}\right| \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{|Im\,\{p_{1,2}\}|}$$

Dans le cas des systèmes numériques, il est également intéressant d'évaluer des instants caractéristiques K_c et K_p correspondant à la constante de temps τ et à la

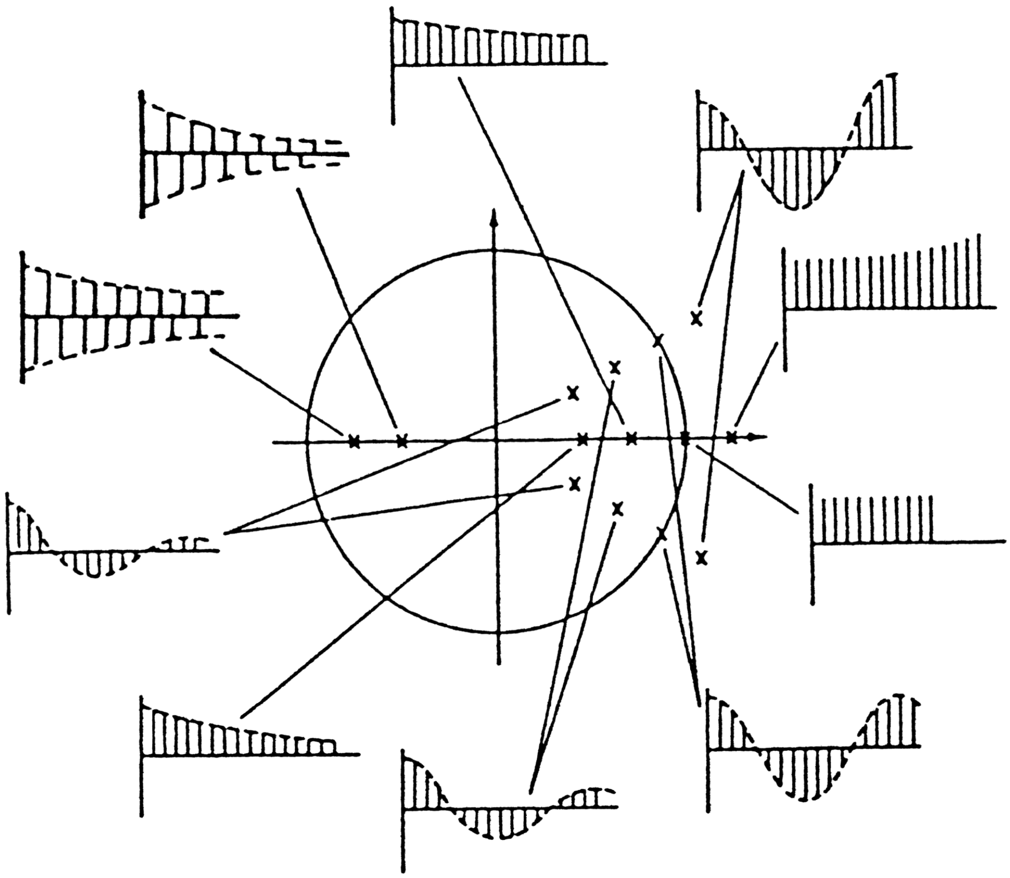


Fig. 10.1: Pôles et réponses impulsionnelles d'un système numérique

période d'oscillation T. Il est important de noter ici que K_c et K_p sont des valeurs sans unité, multiples de la période d'échantillonnage T_e du signal considéré.

Ces instants caractéristiques sont définis de la même manière que les paramètres continus τ et T :

1. L'instant K_c est celui pour lequel l'amplitude R^n a diminué ou augmenté d'une valeur égale à e. On a donc $R^{K_c} = e^{\pm 1}$. En prenant le logarithme naturel de cette égalité, on obtient :
$$K_c = \pm\frac{1}{\ln(R)} = \frac{1}{|\ln(R)|} \tag{10.6}$$
2. La période K_p d'une oscillation est telle que $K_p\,\Omega = 2\pi$. On en tire donc :
$$K_p = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{10.7}$$

Comme la durée du régime transitoire est égale à environ cinq fois la constante de temps, on a :
$$K_{tr} \simeq 5\,K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \tag{10.8}$$
et le nombre d'oscillations visibles pendant cette durée vaudra :
$$N_{osc} = \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5\,\Omega}{2\pi\;|\ln(R)|} \simeq \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \tag{10.9}$$

10.4 Transformation en z

La transformation en z fait pour les systèmes numériques ce que la transformation de Laplace fait pour les systèmes continus. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert $H(z)$ dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

10.4.1 Définition

La transformation en z s'applique à une suite de nombres $x[n]$ au travers de la définition suivante :
$$X(z) = Z\left\{x[n]\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\,z^{-n} \tag{10.10}$$
On peut montrer que cette définition découle de la transformation de Laplace d'un signal analogique $x(t)$:
$$X(s) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$
En effet, considérant que $x[n]$ est la représentation échantillonnée de $x(t)$, on peut remplacer l'intégrale par une somme. Il vient alors :
$$X(s) \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} x(n\,T_e)\,e^{-s\,nT_e}\,T_e = T_e \sum_{n=0}^{+\infty} x(n\,T_e)\,\left(e^{sT_e}\right)^{-n}$$

En définissant la variable z par

$$z \equiv e^{+sT_e} \tag{10.11}$$

et en attribuant à la période d'échantillonnage T_e la valeur unitaire, on obtient :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Ce résultat sert de définition à la transformation en z.

On notera que la définition de la variable z correspond à celle de l'opérateur de décalage avant égal à une période d'échantillonnage T_e et que l'opèrateur de décalage arrière ou de retard est naturellement

$$z^{-1} \equiv e^{-sT_e} \tag{10.12}$$

10.4.2 Calcul de quelques transformées

Impulsion unité Elle est définie par :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z, on obtient :

$$D(z) = Z\left\{\delta[n]\right\} = \sum_{n=0}^{0} 1\, z^{-n} = 1 \tag{10.13}$$

Saut unité Il est défini par :

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

En appliquant la définition de la transformation en z, on obtient :

$$E(z) = Z\left\{\epsilon[n]\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$$

Cette somme est celle d'une suite géométrique $\left(z^{-1}\right)^n$ qui est finie si $|z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad \text{si} \quad \left|z^{-1}\right| < 1 \tag{10.14}$$

Exponentielle Celle-ci est définie par

$$y[n] = \alpha^n \, \epsilon[n]$$

Alors :

$$Y(z) = Z\left\{\alpha^n \, \epsilon[n]\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha \, z^{-1}\right)^n$$

Cette équation représente la somme d'une suite géométrique de raison $(\alpha \, z^{-1})$ qui est finie si $|\alpha \, z^{-1}| < 1$. Dans ce cas, la somme de la suite géométrique vaut :

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \alpha \, z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \quad \text{si} \quad \left|\alpha \, z^{-1}\right| < 1 \tag{10.15}$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-a\,t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n\,\Omega_0)$	$\frac{z^2-\cos\Omega_0\,z}{z^2-2\cos\Omega_0\,z+1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
$\sin(n\,\Omega_0)$	$\frac{\sin\Omega_0\,z}{z^2-2\cos\Omega_0\,z+1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
$\alpha^n\,\cos(n\,\Omega_0)$	$\frac{z^2-\alpha\,\cos\Omega_0\,z}{z^2-2\alpha\,\cos\Omega_0\,z+\alpha^2}$	$\exp(-a\,t)\,\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
$\alpha^n\,\sin(n\,\Omega_0)$	$\frac{\alpha\,\sin\Omega_0\,z}{z^2-2\alpha\,\cos\Omega_0\,z+\alpha^2}$	$\exp(-a\,t)\,\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$

TAB. 10.1: Quelques transformées en z et de Laplace

10.4.3 Quelques propriétés de la transformation en z

La transformation en z possède des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace. Seules quelques unes sont rappelées ci-après sans démonstration.

1. linéarité :

$$Z\left\{a\,x[n] + b\,y[n]\right\} = a\,X(z) + b\,Y(z) \tag{10.16}$$

2. décalage temporel :

$$Z\left\{x[n+d]\right\} = z^{+d}\,X(z) \tag{10.17}$$

3. amortissement :

$$Z\left\{\alpha^n x[n]\right\} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right) \tag{10.18}$$

4. valeur initiale :

$$x[0] = X(z)|_{z\to\infty} \tag{10.19}$$

5. valeur finale (si le système est stable) :

$$x[\infty] = (z-1)\ X(z)|_{z=1} \tag{10.20}$$

10.4.4 Équation aux différences et fonction de transfert

Nous avons vu qu'un système pouvait être décrit par une équation aux différences d'ordre N :

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \tag{10.21}$$

On notera au passage que l'ordre M de la partie non-homogène de l'équation n'est pas nécessairement égal à celui de la partie homogène. Son schéma fonctionnel est représenté à la figure 10.2.

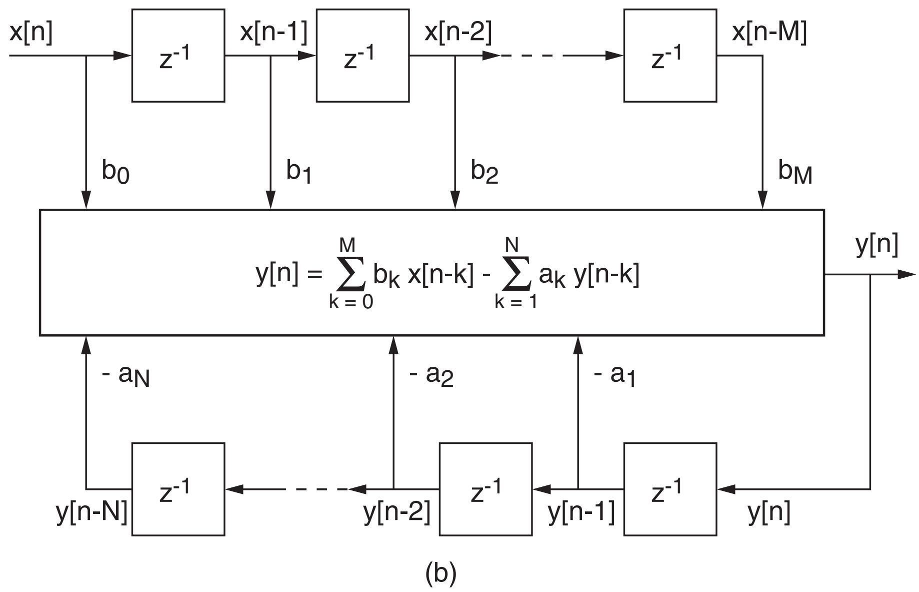


Fig. 10.2: Schéma fonctionnel d'une équation aux différences

Dans le cas particulier des systèmes d'ordre 2, on a donc

$$y[n] + a_1\, y[n-1] + a_2\, y[n-2] = b_0\, x[n] + b_1\, x[n-1] + b_2\, x[n-2] \tag{10.22}$$

Utilisant la propriété de linéarité, la transformation en z de l'équation aux différences se calcule aisément et donne :

$$Y(z) + a_1\, z^{-1}\, Y(z) + a_2\, z^{-2}\, Y(z) = b_0\, X(z) + b_1\, z^{-1}\, X(z) + b_2\, z^{-2}\, X(z)$$

En mettant en évidence $Y(z)$ et $X(z)$, il vient :

$$Y(z)\ \left(1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}\right) = X(z)\ \left(b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}\right)$$

Comme le rapport des grandeurs de sortie $Y(z)$ et d'entrée $X(z)$ définit la fonction de transfert $H(z)$, on obtient :

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}}{1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}} \tag{10.23}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par z^2, cette fonction de transfert peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$H(z) = \frac{b_0\, z^2 + b_1\, z + b_2}{z^2 + a_1\, z + a_2} \tag{10.24}$$

On remarque alors que le dénominateur de $H(z)$ n'est autre que l'équation caractéristique de l'équation aux différences représentant le système :

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_2 = 0 \tag{10.25}$$

La recherche des pôles de $H(z)$ est donc équivalente à la recherche des racines de l'équation caractéristique. On notera que la forme de $H(z)$ en z^{-1} est dite de *réalisation* (équ. 10.23) alors que celle en z est dite *analytique* (équ. 10.24) .

10.5 Réponse fréquentielle des systèmes LTI

10.5.1 Fonction de transfert et réponse fréquentielle

On a vu plus haut que la variable z correspond à l'opérateur d'avance

$$z = e^{sT_e} \quad \text{avec} \quad s = \sigma + j\omega \tag{10.26}$$

Comme dans le cas d'une réponse fréquentielle on travaille en régime sinusoïdal permanent, la variable de Laplace vaut simplement $s = j\omega$ et la variable z devient alors

$$z = e^{j\omega T_e} = e^{j\Omega} \quad \text{avec} \quad \Omega \equiv \omega T_e = 2\pi f/f_e \tag{10.27}$$

La variable $\Omega = 2\pi\, f/f_e$ est la pulsation normalisée définie entre $+\pi$ et $-\pi$; elle représente les fréquences comprises entre $+f_e/2$ et $-f_e/2$. On voit donc que pour calculer une réponse fréquentielle, il suffit de remplacer la variable z par la valeur se situant sur le cercle de rayon unité et d'argument $\Omega = 2\pi f/f_e$.

Ainsi, de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0\, z^2 + b_1\, z + b_2}{z^2 + a_1\, z + a_2} \tag{10.28}$$

on tire la réponse fréquentielle

$$H(j\Omega) = \frac{b_0\, e^{+j2\Omega} + b_1\, e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1\, e^{j\Omega} + a_2} \tag{10.29}$$

Dans le cas où la fonction de transfert est décrite avec l'opérateur de retard z^{-1}

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}}{1 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}} \tag{10.30}$$

on a bien évidemment

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1\, e^{-j\Omega} + b_2\, e^{-j2\Omega}}{1 + a_1\, e^{-j\Omega} + a_2\, e^{-j2\Omega}} \tag{10.31}$$

Les réponses fréquentielles pour $f = 0$, $f = f_e/4$ et $f = f_e/2$ se calculent aisément car on a

$$\begin{aligned}
f = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \Omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = +1 \\
f = \frac{f_e}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \Omega = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = +j \\
f = \frac{f_e}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \Omega = \pi \quad \Leftrightarrow \quad z = -1
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour une cellule biquadratique

$$H(jf)|_{f=0} = H(z)|_{z=+1} = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \tag{10.32}$$

$$H(jf)|_{f=f_e/4} = H(z)|_{z=j} = \frac{b_0 - b_2 + j\, b_1}{1 - a_2 + j\, a_1} \tag{10.33}$$

$$H(jf)|_{f=f_e/2} = H(z)|_{z=-1} = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \tag{10.34}$$

10.5.2 Pôles, zéros et réponse fréquentielle

Toute fonction de transfert peut être décrite à l'aide des pôles et zéros qui sont les racines des dénominateur et numérateur :

$$H(z) = \frac{b_0\, z^2 + b_1\, z + b_2}{z^2 + a_1\, z + a_2} = A \frac{(z - z_1)\,(z - z_2)}{(z - p_1)\,(z - p_2)} \tag{10.35}$$

Comme la variable z parcourt le cercle unité de 0 à $\pm\pi$ quand la fréquence varie de 0 à $\pm f_e/2$ (figure 10.3), on voit que la réponse fréquentielle s'affaiblit si la fréquence est proche des zéros car $(z - z_k)$ s'amenuise et qu'elle passe par un maximum lorsque la fréquence se situe aux environs des pôles car $(z - p_k)$ diminue.

La configuration pôles-zéros d'un filtre passe-bande ainsi que sa réponse fréquentielle sont représentées à la figure 10.3. Une bonne interprétation de la signification des pôles et zéros permet ainsi d'évaluer facilement une réponse fréquentielle.

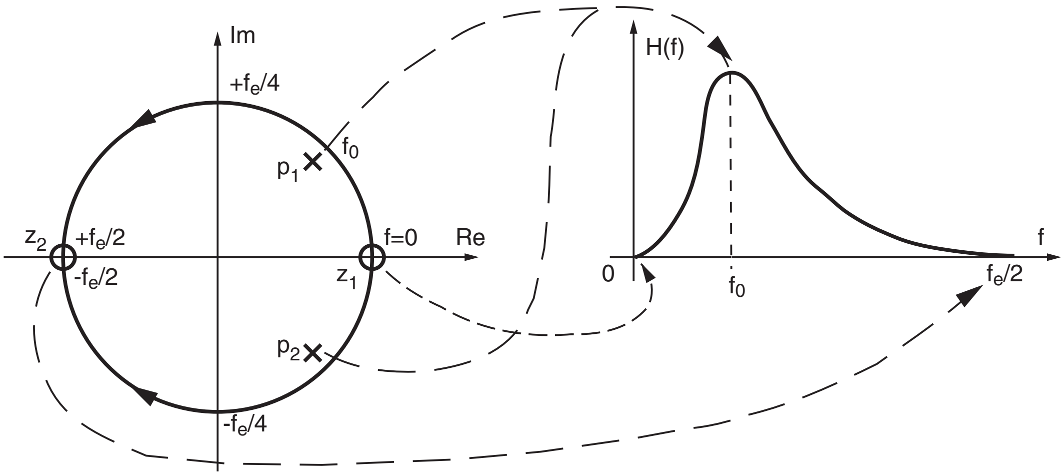


FIG. 10.3: Pôles, zéros et réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande

Évaluation d'une réponse fréquentielle

Considérons comme exemple un filtre passe-bande décrit par une fonction de transfert d'ordre 2

$$H(z) = A\frac{(z-z_1)\,(z-z_2)}{(z-p_1)\,(z-p_2)}$$

et caractérisé par les points suivants.

1. Il ne doit pas laisser passer la fréquence nulle qui se situe en $z = +1$ dans le plan complexe ; on doit donc avoir un zéro en cet endroit, d'où

$$z_1 = +1$$

2. Il doit bloquer les signaux de fréquence $f_e/2$ qui se situe en $z = -1$; on a donc

$$z_2 = -1$$

3. Il doit laisser passer la fréquence centrale f_0 qui correspond à deux pôles situés en

$$p_{1,2} = R\,e^{\pm j\Omega_0} \tag{10.36}$$

avec la pulsation normalisée $\Omega_0 = 2\pi\,\frac{f_0}{f_e}$ et $R < 1$ pour que le filtre soit stable.

La fonction de transfert sera donc décrite par

$$\begin{aligned} H(z) &= A\frac{(z-1)\,(z+1)}{(z-Re^{+j\Omega_0})\,(z-Re^{-j\Omega_0})} \\ &= A\frac{z^2-1}{z^2-2R\,\cos\Omega_0\,z+R^2} \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente, par

$$H(z) = A\frac{1-z^{-2}}{1-2R\,\cos\Omega_0\,z^{-1}+R^2\,z^{-2}} \tag{10.37}$$

La réponse fréquentielle vaut donc

$$H(j\Omega) = A\,\frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 - 2R\,\cos\Omega_0\,e^{-j\Omega} + R^2\,e^{-j2\Omega}} \tag{10.38}$$

Comme application numérique, considérons le cas particulier où

$$f_0 = f_e/8 \;\Leftrightarrow\; \Omega_0 = \pi/4, \qquad R = 0.9, \qquad A = 1 - R = 0.1$$

Pour un filtre passe-bande, on doit bien évidemment obtenir

$$H(f=0) = 0, \qquad H(f = f_e/2) = 0$$

De plus, avec $\Omega_0 = \pi/4$ et $2\Omega_0 = \pi/2$, il vient

$$\begin{aligned}
H(j\Omega_0) &= A\,\frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 - 2R\,\cos(\pi/4)\,e^{-j\pi/4} + R^2\,e^{-j\pi/2}} \\
&= A\,\frac{1+j}{1 - \sqrt{2}R\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - jR^2} \\
&= A\,\frac{1+j}{1 - R\,(1-j) - jR^2} = A\,\frac{1+j}{1 - R + jR - jR^2}
\end{aligned}$$

Comme $R = 0.9$ et $A = 1 - R$, on obtien finalement

$$H(jf_0) = (1-R)\,\frac{1+j}{(1-R)(1+jR)} = \frac{1+j}{1+j0.9} = 1.05\,\angle + 0.053\,[rad]$$

10.5.3 TFD et réponse fréquentielle

Sachant que les transformations de Fourier directe et inverse d'une suite de valeurs numériques sont définies par :

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\exp(-jn\Omega) \tag{10.39}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(j\Omega)\,\exp(+jn\Omega)\,d\Omega \tag{10.40}$$

il est possible de calculer la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ en transformant de Fourier soit la réponse impulsionnelle $h[n]$, soit l'équation aux différences. Comme illustration, appliquons ces deux approches à un système d'ordre 1.

Système décrit par une réponse impulsionnelle

En transformant de Fourier la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système numérique d'ordre 1,

$$h[n] = A\,R^n\,\varepsilon[n] \qquad 0 < R < 1$$

on obtient la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ suivante

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A\, R^n\, e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A\, \left(R\, e^{-j\Omega}\right)^n \end{aligned}$$

L'observation de ce résultat nous montre que l'on a affaire à une suite géométrique. Se souvenant que la somme d'une suite géométrique infinie de raison r vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad \text{si} \quad |r| < 1 \tag{10.41}$$

on peut calculer aisément $H(j\Omega)$:

$$H(j\Omega) = A\, \frac{1}{1 - R\, e^{-j\Omega}} \quad \text{si} \quad |R| < 1 \tag{10.42}$$

Système décrit par une équation aux différences

On a vu qu'un système numérique d'ordre 1 peut également être décrit par une équation récursive :

$$y[n] = A\, x[n] + R\, y[n-1]$$

Les propriétés de linéarité et de décalage de la transformation de Fourier permettent d'écrire immédiatement

$$Y(j\Omega) = A\, X(j\Omega) + R\, e^{-j\Omega}\, Y(j\Omega)$$

En regroupant les termes communs, puis en effectuant leur rapport, on obtient la fonction de transfert du système ou sa réponse fréquentielle :

$$H(j\Omega) \equiv \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{A}{1 - R\, e^{-j\Omega}}$$

Comme on pouvait s'y attendre, les deux expressions de la réponse fréquentielle sont identiques ; elles ne dépendent pas de la méthode de calcul utilisée.

Relation avec la transformation en z

Les résultats que nous venons de calculer peuvent également s'obtenir directement à partir des transformées en z des fonctions et signaux considérés en remplaçant l'opérateur d'avance z par son équivalent fréquentiel $e^{j\Omega}$. Ainsi, dans le cas de la réponse impulsionnelle

$$h[n] = A\, R^n\, \varepsilon[n] \quad \leftrightarrow \quad H(z) = A\, \frac{z}{z - R}$$

on obtient

$$H(j\Omega) = \left. H(z)\right|_{z=e^{j\Omega}} = A\, \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - R} = A\, \frac{1}{1 - Re^{-j\Omega}}$$

10.6 Calcul et traçage de quelques réponses fréquentielles

Afin d'illustrer le calcul et le traçage de quelques réponses fréquentielles, considérons quelques exemples de systèmes numériques décrits soit par leur réponse impulsionnelle, soit par leur équation récursive.

10.6.1 Moyenneur non causal

Un moyenneur non causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = \frac{1}{5}\left(x\ [n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]\right) \tag{10.43}$$

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si} \quad -2 \leq n \leq 2 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10.44}$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 10.4.

Utilisant la transformation en z, on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$H(z) = \frac{1}{5}\left(z^{-2} + z^{-1} + z^{0} + z^{1} + z^{2}\right)$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5}\left(e^{-j2\Omega} + e^{-j\Omega} + e^{-j0} + e^{+j\Omega} + e^{+j2\Omega}\right)$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{1}{5}\left(1\ \ + 2\cos(\Omega) + 2\cos(2\Omega)\right) \tag{10.45}$$

On constate que la réponse fréquentielle ainsi obtenue est réelle ; ceci n'est pas surprenant si on se souvient que la réponse impulsionnelle $h[n]$ considérée est paire. Le traçage de la réponse fréquentielle de ce moyenneur (figure 10.5) montre qu'il agit comme un filtre passe-bas et qu'il annule même la sortie pour certaines pulsations.

10.6.2 Moyenneur causal

Un moyenneur causal d'ordre 5 est décrit par l'équation aux différences suivantes :

$$y[n] = \frac{1}{5}\left(x\ [n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]\right) \tag{10.46}$$

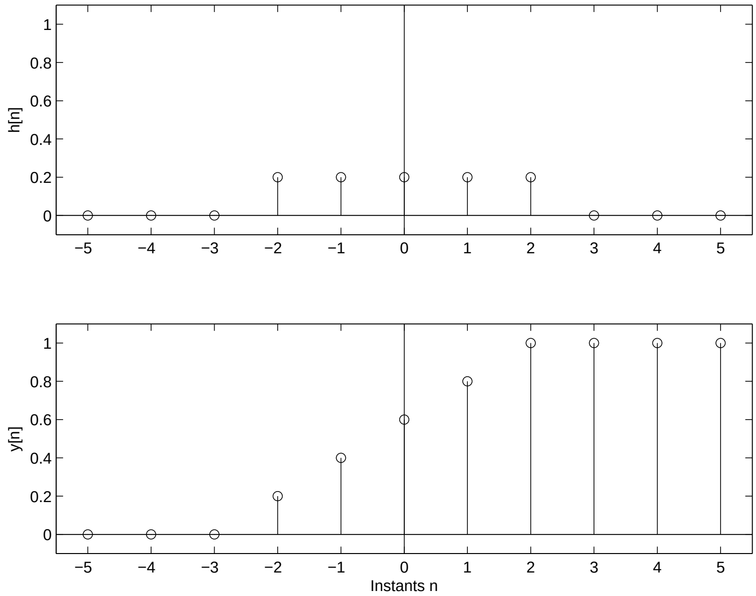


FIG. 10.4: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un moyenneur non causal d'ordre 5

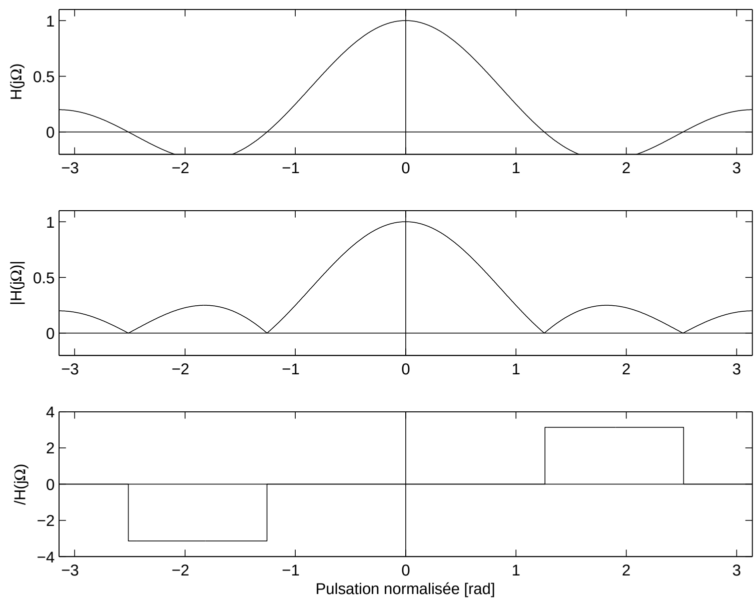


FIG. 10.5: Réponse fréquentielle d'un moyenneur non causal d'ordre 5

et sa réponse impulsionnelle est :

$$h[n] = \begin{cases} 1/5 & \text{si} \quad 0 \le n \le 4 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{10.47}$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont illustrées à la figure 10.4 et on constate que, par rapport au moyenneur non causal, ces réponses temporelles sont simplement retardées de deux échantillons.

Utilisant la transformation en z, on calcule aisément la fonction de transfert de ce filtre :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{5}\left(z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\right) \\ &= \frac{z^{-2}}{5}\left(z^2 + z^1 + z^0 + z^{-1} + z^{-2}\right) \end{aligned}$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5}\left(e^{+j2\Omega} + e^{+j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}\right)$$

d'où :

$$H(j\Omega) = \frac{e^{-j2\Omega}}{5}\left(1 \;+ 2\cos(\Omega) + 2\cos(2\Omega)\right) \tag{10.48}$$

On constate ainsi que, à un phaseur près, la réponse fréquentielle obtenue est la même que précédemment ; ce qui n'est pas surprenant puisque le moyenneur causal n'est qu'une version translatée du moyenneur non causal. Les modules des deux réponses fréquentielles sont donc les mêmes ; seules les phases diffèrent (figure 10.7). On notera que la phase ainsi obtenue est linéaire par rapport à la fréquence ; ce qui n'est autre que l'effet de la translation temporelle.

10.6.3 Filtre passe-bas d'ordre 1

On a vu plus haut qu'un filtre passe-bas numérique d'ordre 1 était décrite par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A\,R^n\,\varepsilon[n] \quad R < 1$$

ou par sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{A}{1 - R\,z^{-1}}$$

On en a déduit que sa réponse fréquentielle vaut :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R\,e^{-j\Omega}} \tag{10.49}$$

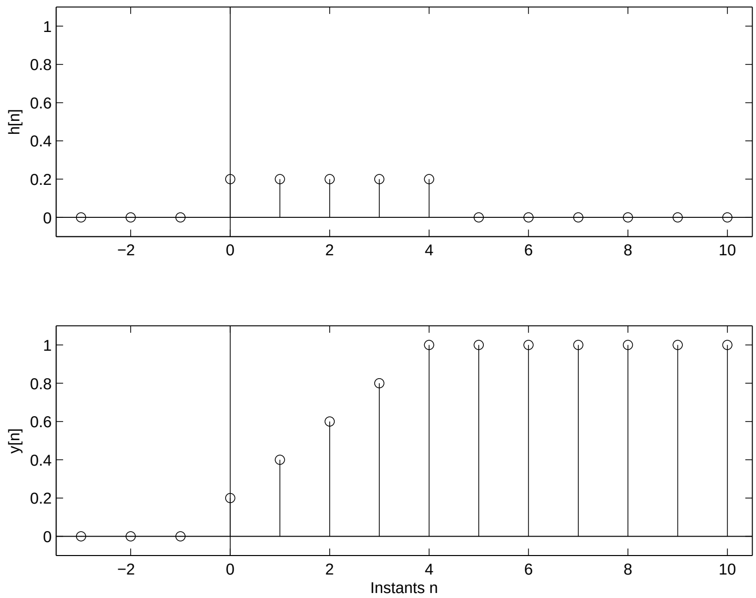


FIG. 10.6: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un moyenneur causal d'ordre 5

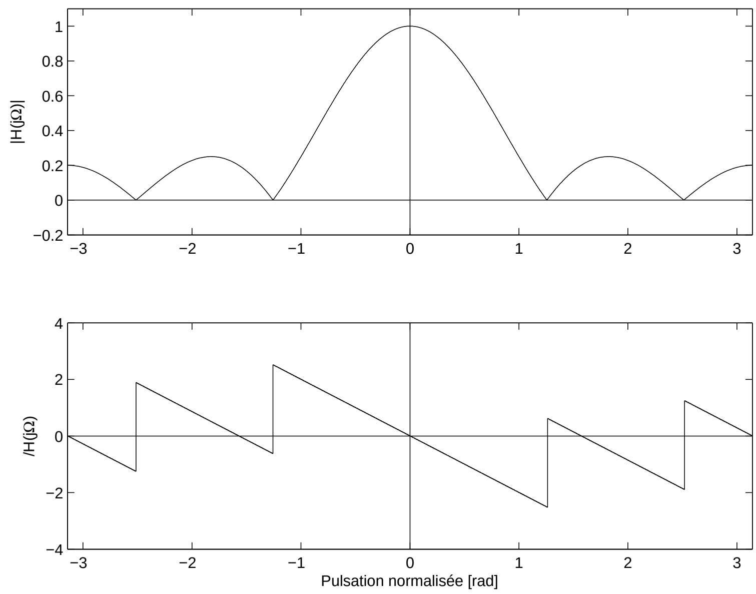


FIG. 10.7: Réponse fréquentielle d'un moyenneur causal d'ordre 5

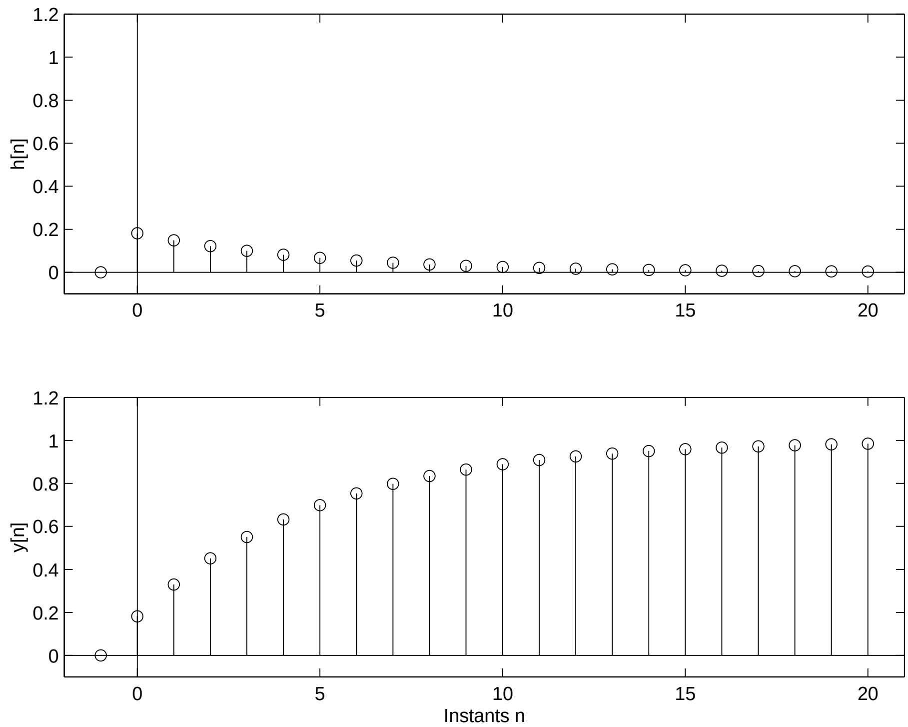


Fig. 10.8: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

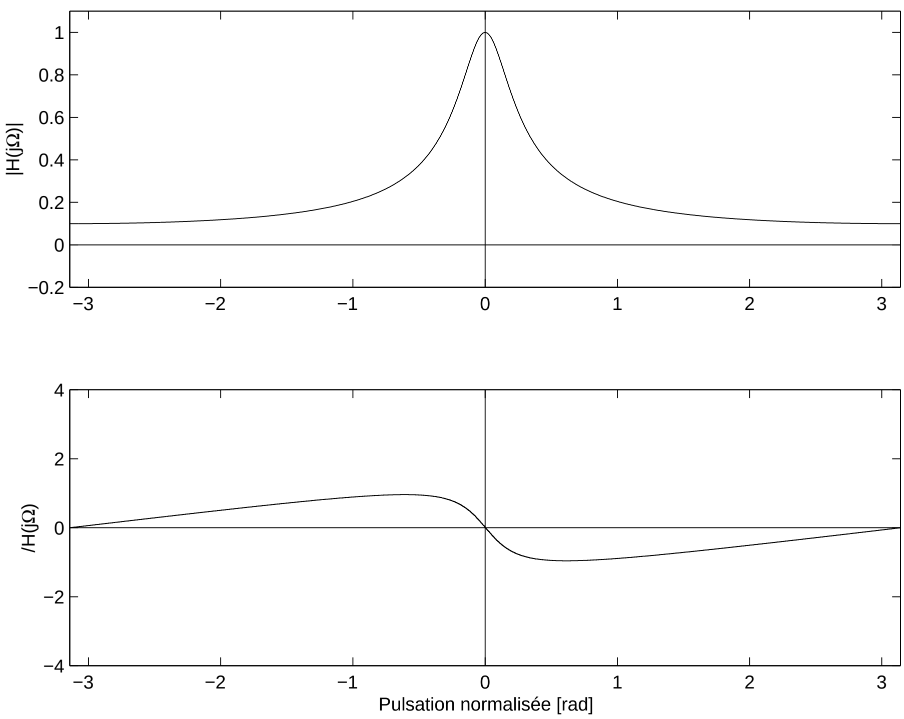


Fig. 10.9: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 1

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = 1 - R \tag{10.50}$$

Cette fonction à valeur complexe peut encore être décrite par :

$$H(j\Omega) = \frac{A}{1 - R\,\cos(\Omega) + jR\,\sin(\Omega)} \tag{10.51}$$

Ce qui permet de calculer le module et la phase de la réponse fréquentielle :

$$|H(j\Omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1 - R\,\cos(\Omega))^2 + (R\,\sin(\Omega))^2}} \tag{10.52}$$

$$\angle H(j\Omega) = -\arctan\left(\frac{R\,\sin(\Omega)}{1 - R\,\cos(\Omega)}\right) \tag{10.53}$$

Les réponses temporelles et fréquentielles sont présentées dans les figures 10.8 et 10.9.

10.6.4 Filtre passe-bas d'ordre 2

Prenons, comme nouvel exemple, un filtre passe-bas numérique d'ordre deux avec résonance décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A\,R^n\,\sin(n\,\Omega_0)\,\varepsilon[n] \qquad R < 1 \tag{10.54}$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre sont représentées dans la figure 10.10.

La transformée en z de $h[n]$ (voir tableau 10.1) donne la fonction de transfert

$$H(z) = A\,\frac{R\,\sin\Omega_0\,z}{z^2 - 2R\,\cos\Omega_0\,z + R^2} = A\,\frac{R\,\sin\Omega_0\,z^{-1}}{1 - 2R\,\cos\Omega_0\,z^{-1} + R^2\,z^{-2}}$$

dont on tire la réponses fréquentielle

$$H(j\Omega) = A\,\frac{R\,\sin(\Omega_0)\,e^{-j\Omega}}{1 - 2R\,\cos(\Omega_0)\,e^{-j\Omega} + R^2\,e^{-j2\Omega}} \tag{10.55}$$

qui pour $\Omega = 0$ donne un gain

$$H(j0) = A\,\frac{R\,\sin(\Omega_0)}{1 - 2R\,\cos(\Omega_0) + R^2}$$

De manière à avoir un gain unité pour $\Omega = 0$, on choisit

$$A = \frac{1 - 2R\,\cos(\Omega_0) + R^2}{R\,\sin(\Omega_0)} \tag{10.56}$$

Il est également possible de retrouver cette réponse fréquentielle à partir de la donnée des pôles du filtre. Cette approche, très simple, est laissée comme exercice.

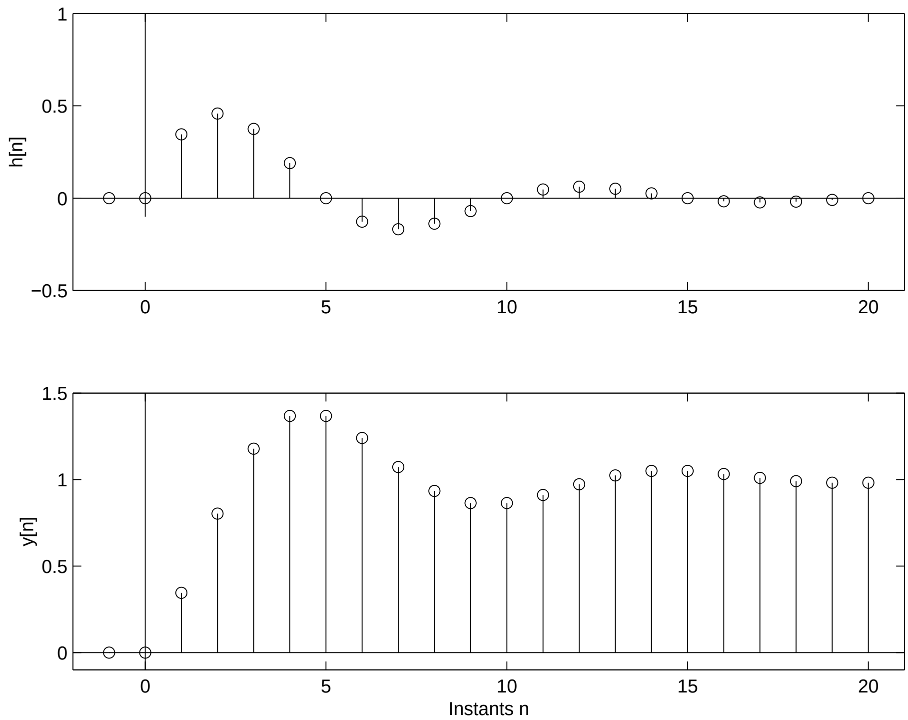


Fig. 10.10: Réponses impulsionnelle et indicielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

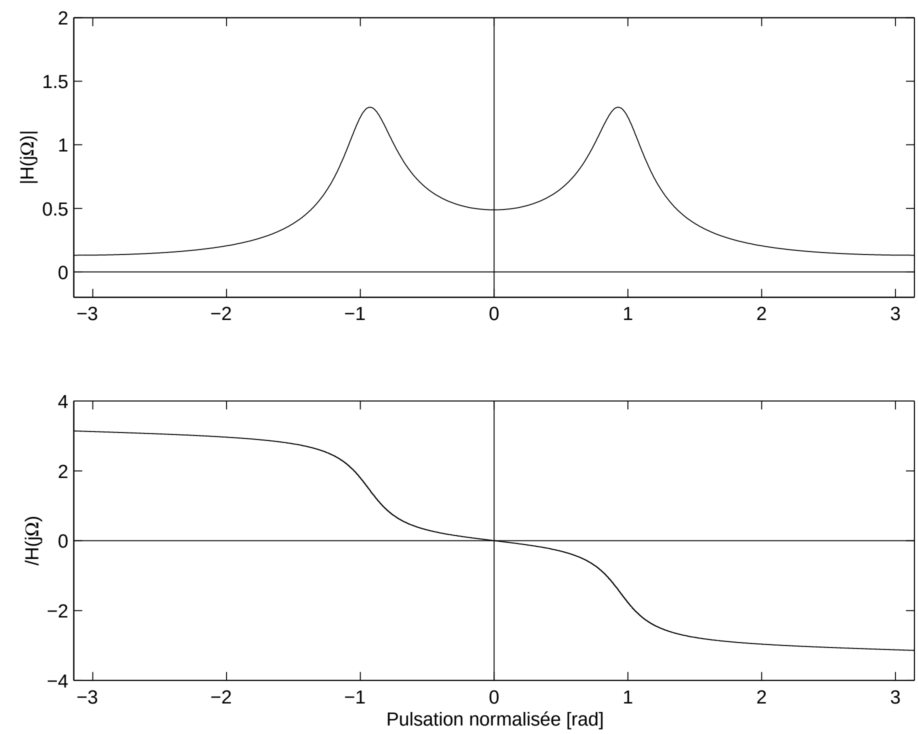


Fig. 10.11: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas d'ordre 2

10.7 Analyse et réalisation d'un filtre

Dans cette section, on souhaite illustrer les différentes étapes à parcourir pour analyser et réaliser un filtre numérique. Pour cela, considérons un filtre décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0.21 \, \frac{z^{-1}}{1 - 1.6\, z^{-1} + 0.81\, z^{-2}}$$

et étudions ses réponses temporelle et fréquentielle.

10.7.1 Calcul de la réponse temporelle du filtre

Nous avons vu que le comportement dynamique d'un filtre numérique est déterminé par les instants caractéristiques K_c et K_p et que leurs valeurs se calcule à partir des pôles de la fonction de transfert $H(z)$.

Pôles et réponse temporelle

En multipliant numérateur et dénominateur de $H(z)$ par z^2, on obtient la forme canonique nécessaire pour l'analyse :

$$H(z) = 0.21 \, \frac{z}{z^2 - 1.6\, z + 0.81}$$

On calcule aisément les pôles de cette fonction de transfert qui valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(1.6 \pm \sqrt{1.6^2 - 4 \cdot 0.81}\right) \\ &= 0.8 \pm j\, 0.412 \\ &= 0.9\, e^{\pm j\, 0.476} \end{aligned}$$

Comme ces pôles sont complexes et de module inférieur à 1, on en déduit que la réponse transitoire, c'est-à-dire la solution homogène de l'équation aux différences, comportera une oscillation amortie du type :

$$y_h[n] = C\, R^n\, \cos(n\Omega + \alpha)$$

ce qui, en tenant compte des valeurs numériques, donne :

$$y_h[n] = C\, 0.9^n\, \cos(0.476\, n + \alpha)$$

Instants caractéristiques

La réponse étant oscillante, il faut rechercher la constante de temps K_c et la période d'oscillation K_p :

$$K_c = \frac{1}{|\ln(0.9)|} = 9.5 \qquad K_p = \frac{2\pi}{0.476} = 13.2$$

On aura donc une durée du régime transitoire valant

$$K_{tr} \simeq 5\,K_c = 47.5 \quad \text{instants}$$

et un nombre d'oscillations visibles d'environ

$$N_{osc} \simeq \frac{K_{tr}}{K_p} \simeq 3.6 \quad \text{oscillations}$$

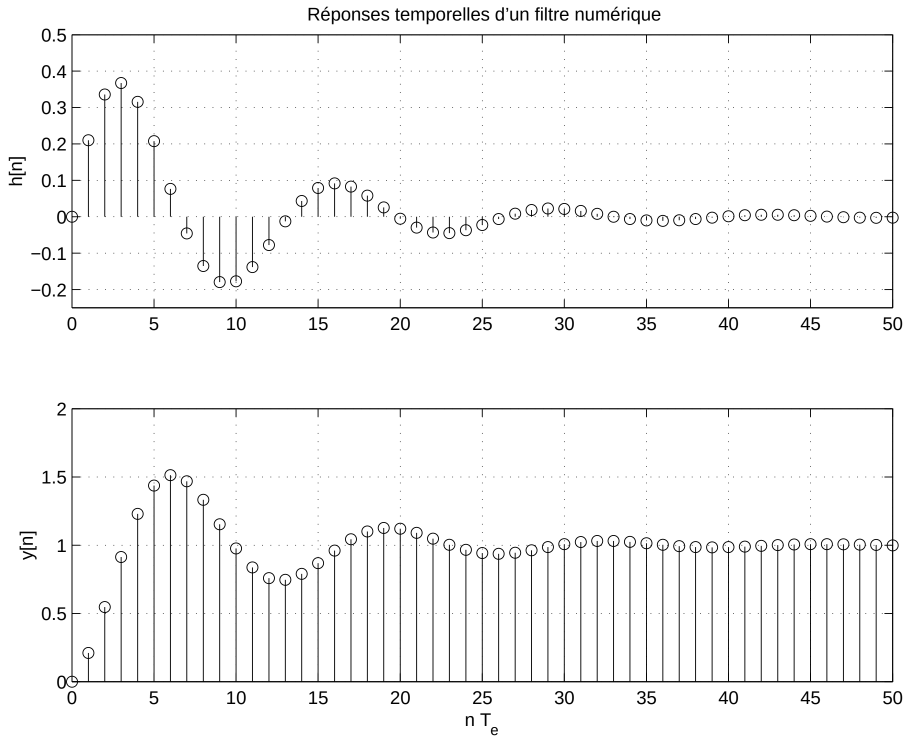


FIG. 10.12: Réponses impulsionnelle et indicielle du filtre

Évaluation de la réponse indicielle

À un saut unité dont l'image est

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

correspond la réponse indicielle suivante

$$Y(z) = X(z)\,H(z) = \frac{z}{z-1}\,\frac{0.21\,z}{z^2 - 1.6\,z + 0.81}$$

Dans cette réponse, on retrouve naturellement les deux pôles ($p_{1,2} = 0.9\,e^{\pm j\,0.476}$) dus au filtre, plus un pôle ($p_3 = +1$) dû au saut unité appliqué à l'entrée. L'évolution temporelle sera donc celle décrite précédemment, à laquelle on doit ajouter un terme constant A correspondant au pôle p_3 :

$$y[n] = A + C\,0.9^n\,\cos(0.476\,n + \alpha)$$

Ces informations peuvent être complétées par les valeurs initiale et finale que l'on calcule en utilisant le théorème des valeurs limites :

$$y[0] = Y(z)|_{z \to \infty} = 0$$

$$y[\infty] = (z-1)\ Y(z)|_{z=1} = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = 1$$

La figure 10.12 illustre les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre. On remarquera que toutes les valeurs calculées ci-dessus sont confirmées par ces graphes.

10.7.2 Calcul de la réponse fréquentielle

Partant de la fonction de transfert du filtre

$$H(z) = \frac{0.21\, z^{-1}}{1 - 1.6\, z^{-1} + 0.81\, z^{-2}} = \frac{0.21\, z}{z^2 - 1.6\, z + 0.81}$$

on obtient l'expression de la réponse fréquentielle en remplaçant la variable z par le phaseur $e^{+j\Omega}$; il vient alors :

$$H(j\Omega) = \frac{0.21\, e^{-j\Omega}}{1 - 1.6\, e^{-j\Omega} + 0.81\, e^{-j2\Omega}} = \frac{0.21\, e^{+j\Omega}}{e^{+j2\Omega} - 1.6\, e^{+j\Omega} + 0.81}$$

Quelques valeurs particulières

On a vu plus haut que

$$\begin{aligned} H(jf)|_{f=0} &= H(z)|_{z=+1} \\ H(jf)|_{f=f_e/4} &= H(z)|_{z=+j} \\ H(jf)|_{f=f_e/2} &= H(z)|_{z=-1} \end{aligned}$$

Ce qui donne dans notre cas

$$H(j0) = \frac{0.21}{1 - 1.6 + 0.81} = +1 = 1\angle 0$$

$$H(jf_e/4) = \frac{+j\, 0.21}{-1 + 0.81 - j\, 1.6} = -0.129 + j\, 0.015 = 0.130\angle -3.02$$

$$H(jf_e/2) = \frac{-0.21}{1 + 1.6 + 0.81} = -0.06 = 0.06\angle -\pi$$

Traçage de la réponse fréquentielle

Le calcul et le traçage de cette réponse fréquentielle se fait avantageusement avec l'aide de Matlab. Dans ce cas, il faut décrire la fonction de transfert avec l'opérateur d'avance z

$$H(z) = \frac{0.21\, z}{z^2 - 1.6\, z + 0.81}$$

Le calcul et traçage se fait ensuite avec les commandes suivantes :

```
% donnees :
  num = [0, 0.21, 0] ;
  den = [1, -1.6, 0.81] ;
% reponse frequentielle
  fe = 1 ; Npoints = 500 ;
  [Hjf, ff] = freqz(num,den,Npoints,fe) ;
% tracage
  figure ;
  subplot(2,1,1) ;
    plot(ff, 20*log10(abs(Hjf))) ; grid on ;
    title('Réponse fréquentielle d''un filtre numérique') ;
    ylabel('|H(jf)|') ;
    axis([0,0.5,-30,+10]) ;
  subplot(2,1,2) ;
    plot(ff,angle(Hjf)*180/pi) ; grid on ;
    ylabel('/H(jf)') ;
    xlabel('f / f_e') ;
```

La figure 10.13 présente le module et la phase de la réponse fréquentielle du filtre. On y retrouve bien les trois valeurs particulières

$$H(0) = 1\angle 0$$

$$H(jf_e/4) = 0.130\angle - 3.02 = -17.7\,\mathrm{dB}\angle - 3.02$$

$$H(f_e/2) = 0.06\angle - \pi = -24\,\mathrm{dB}\angle - \pi$$

10.7.3 Comment réaliser ce filtre ?

Une fois le comportement du filtre analysé et vérifié, il reste à le réaliser. Pour cela, on implantera l'équation aux différences correspondant au filtre désiré dans un processeur numérique. Puis on devra bien entendu le relier au monde analogique à l'aide des convertisseurs AN et NA et des filtres d'antirepliement (FAR) et de lissage (FL) (figure 10.14).

L'équation aux différences du filtre est déduite directement de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.21\,z^{-1}}{1 - 1.6\,z^{-1} + 0.81\,z^{-2}}$$

En effet, les produits croisés de cette équation donnent :

$$Y(z) - 1.6\,z^{-1}\,Y(z) + 0.81\,z^{-2}\,Y(z) = 0.21\,z^{-1}\,X(z)$$

Ce qui, par transformation inverse, correspond à l'équation

$$y[n] - 1.6\,y[n-1] + 0.81\,y[n-2] = 0.21\,x[n-1]$$

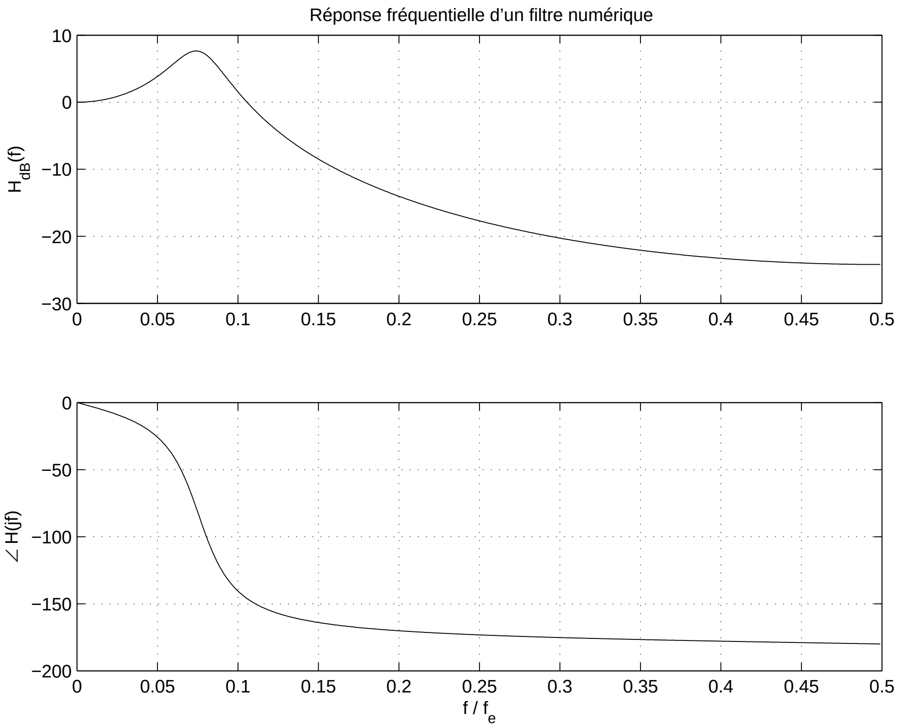


FIG. 10.13: Réponse fréquentielle du filtre

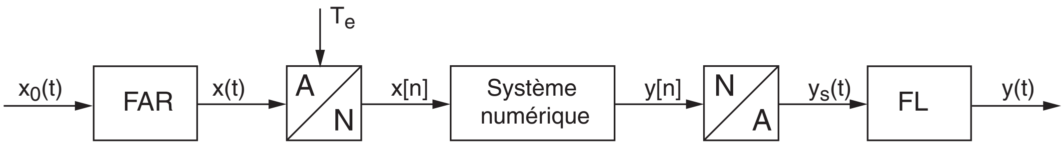


FIG. 10.14: Schéma bloc d'un filtre numérique

Algorithmiquement, cette équation s'écrit plutôt sous la forme suivante

$$y[n] = 0.21\,x[n-1] + 1.6\,y[n-1] - 0.81\,y[n-2]$$

C'est cette équation aux différences qui sera implantée dans le processeur et exécutée à chaque nouvel instant d'échantillonnage T_e. Le code réalisant ce filtre pourrait s'écrire comme suit :

```
% initalisation des constantes
b0 = 0.0 ;  b1 = +0.21 ; b2 = 0.0 ;
a1 = -1.6 ; a2 = +0.81 ;
% initalisation des variables
xn1 = 0.0 ; xn2 = 0.0 ;   % valeurs anciennes de x[n]
yn1 = 0.0 ; yn2 = 0.0 ;   % valeurs anciennes de y[n]

% operation de filtrage (xn0, yn0 : valeurs actuelles)
repeat
  xn0 = AnalogInput ;
  yn0 = b0*xn0 + b1*xn1 + b2*xn2 - a1*yn1 - a2*yn2 ;
  AnalogOutput(yn0) ;
  % mise a jour des 2 piles xn et yn
  yn2 = yn1 ; yn1 = yn0 ;
  xn2 = xn1 ; xn1 = xn0 ;
until stop ;
```

10.8 Classification des systèmes numériques

Au travers des sections précédentes, nous avons vu différentes formes de représentation des systèmes numériques : équations aux différences, schémas fonctionnels et fonctions de transfert. Les divers exemples ont permis de montrer que la réponse d'un système peut se calculer en prenant en compte le signal d'entrée seulement ou les signaux d'entrée et de sortie simultanément.

De ces deux possibilités découle une classification des systèmes qu'il est important de connaître. Ces deux classes de représentations des systèmes linéaires sont souvent désignées avec des acronymes anglo-saxons qui seront utilisés par la suite.

10.8.1 Systèmes non récursifs (dits RIF, FIR ou MA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal non récursif d'ordre N se calcule uniquement à partir du signal d'entrée $x[n]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 10.15a.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k\,x[n-k] = b_0\,x[n] + b_1\,x[n-1] + b_2\,x[n-2] + \cdots + b_N\,x[n-N] \quad (10.57)$$

On peut remarquer que sa réponse impulsionnelle correspond aux coefficients b_k ; elle est donc de longueur finie N. Ainsi le calcul de $y[n]$ revient-il à convoluer le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle $h[k] \equiv b_k$ du système linéaire. On peut également observer que ce système effectue une pondération des valeurs du signal d'entrée et que cela correspond à une moyenne glissante (moving average).

Ces systèmes sont donc désignés avec l'acronyme *RIF* (Réponse Impulsionnelle Finie) ou *FIR* (Finite Impulse Response) ou *MA* (Moving Average) et leur fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N} \tag{10.58}$$

De par leur structure, les systèmes FIR sont toujours stables, mais ils demandent passablement de temps de calcul car la longueur de la réponse impulsionnelle d'un tel système est généralement très élevée ($N > 100$).

10.8.2 Systèmes récursifs (dits RII, IIR ou ARMA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal récursif d'ordre N se calcule à partir du signal d'entrée $x[n]$ et des valeurs précédentes de la sortie $y[n-k]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 10.15b.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] \tag{10.59}$$

On peut remarquer que ces systèmes ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leur fonction de transfert

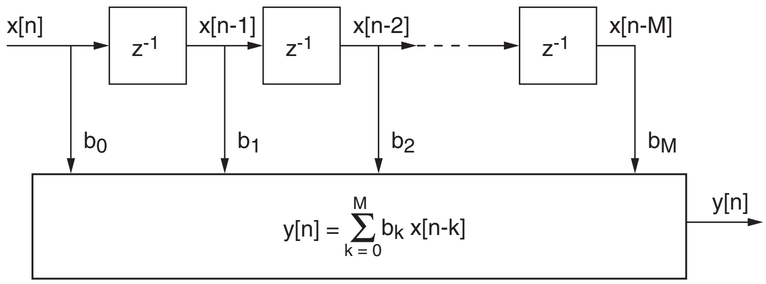
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} \tag{10.60}$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette fonction de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie *RII* ou *IIR* (Infinite Impulse Response) ou Auto Regressive (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (Moving Average MA). D'où l'appellation *ARMA* (Auto Regressive and Moving Average).

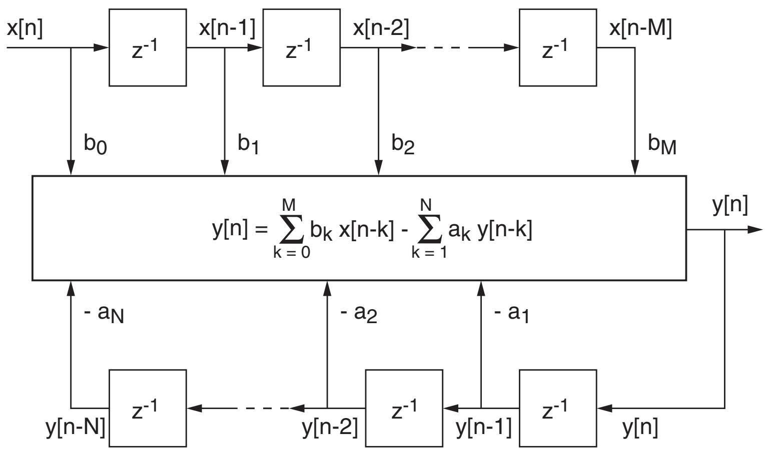
Généralement, l'ordre d'un système IIR est peu élevé ($N = 1 \cdots 10$) et il est réalisé en plaçant en série des cellules biquadratiques (cellules IIR d'ordre 2). Il est donc très efficace en temps de calcul mais, de par sa structure récursive, il peut devenir instable.

10.8.3 Caractéristiques des filtres FIR et IIR

Les qualités (indiquées en gras) et les défauts des filtres FIR et IIR sont présentés dans le tableau de la figure 10.15.



(a)



(b)

Caractéristiques	Filtres FIR ou MA	Filtres IIR ou ARMA
sélectivité	faible	**élevée**
ordre	élevé	**faible**
nombre d'opérations	élevé	**faible**
mémoire nécessaire	élevée	**faible**
temps de propagation constant (phase linéaire)	**naturellement réalisable**	impossible au sens strict
stabilité	**absolue**	limitée
nombre de bits nécessaires	**raisonnable**	élevé
précision des coefficients	**raisonnable**	élevée
cycles limites	**aucun**	présents
filtres adaptatifs	**possibles**	difficiles

Fig. 10.15: Schémas fonctionnels et caractéristiques des filtres FIR et IIR

10.9 Exercices

SNT 1 Considérant les systèmes numériques suivants

$$\begin{aligned}
y_1[n] &= x[n] + x[n-4] + x[n-8] \\
y_2[n] &= \sum_{k=0}^{6} x[n-k] \\
y_3[n] &= n \sum_{k=0}^{6} x[n-k] \\
y_4[n] &= x[n] + y_4[n-1] - 0.5 y_4[n-2] \quad \text{avec } y_4[-2] = y_4[-1] = 0
\end{aligned}$$

dessinez leur schéma fonctionnel ainsi que leurs réponses impulsionnelle et indicielle.

SNT 2 Considérant le schéma fonctionnel d'un filtre numérique (figure SNT 2),

1. Écrivez son équation aux différences et sa réponse impulsionnelle.
2. Dessinez les réponses impulsionnelle et indicielle.
3. Ce filtre est-il récursif ? Quelle est son action ?

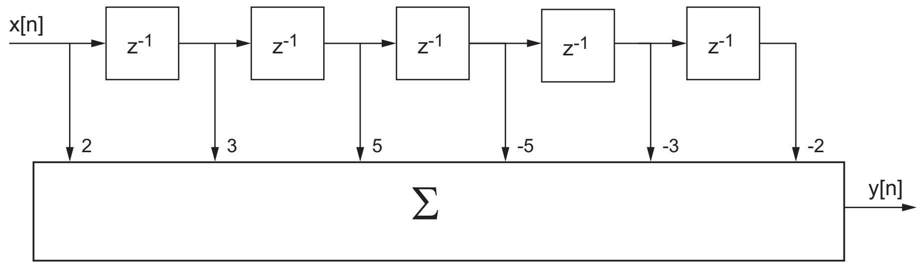


Fig. 10.16: Ex. SNT 2

SNT 3 Écrivez l'équation aux différences d'un moyenneur causal d'ordre 5 et dessinez sa réponse $y[n]$ au signal $x[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-10]$.

SNT 4 On souhaite réaliser l'équivalent numérique d'un filtre analogique passe-bas d'ordre 1. Pour cela :

1. Considérez l'équation différentielle du filtre analogique

$$RC \, \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

   et remplacez la dérivée par une différentielle finie pour obtenir l'équation aux différences du filtre numérique.
2. Utilisez vos résultats et calculez les coefficients du filtre numérique dont la fréquence de coupure se situe aux environs de 1kHz alors que le signal d'entrée est échantillonné à $f_e = 10\,\text{kHz}$. Dessinez son schéma fonctionnel.

3. Calculez les premiers points de sa réponse indicielle et comparez à celle du filtre analogique.
4. Que valent en particulier $y[0]$ et $y[\infty]$? Comparez à $y(0)$ et $y(\infty)$. Justifiez les différences. Que se passe-t-il si on augmente la fréquence d'échantillonnage ?

SNT 5 On considère deux filtres numériques décrits par

$$y[n] = x[n] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2y[n-1] - 0.4y[n-2]$$

Que valent $y[0]$ et $y[\infty]$ si $x[n] = \epsilon[n]$? Quelle est la fonction de chaque filtre ?

SNT 6 Considérant six systèmes numériques linéaires décrits par leurs équations aux différences :

1	$y[n] = x[n] + 0.8\,y[n-1]$
2	$y[n] = x[n] - 0.8\,y[n-1]$
3	$y[n] = x[n] + 1.2\,y[n-1]$
4	$y[n] = x[n] - 1.2\,y[n-1]$
5	$y[n] = x[n] + 1\,y[n-1] - 0.8\,y[n-2]$
6	$y[n] = x[n] + 1.2\,y[n-1] - 0.32\,y[n-2]$

1. Calculez et dessinez leurs racines dans le plan complexe ; où se situent-elles par rapport au cercle unité ?
2. Calculez les instants caractéristiques K_c, K_p et N_{osc} pour chaque cas.
3. Donnez l'expression générale de leur réponse transitoire et esquissez leur réponse indicielle.

SNT 7 Calculez la réponse indicielle d'un système numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.6\,y[n-1] - 0.75\,y[n-2] \quad \text{avec} \quad y[0] = y[-1] = 0$$

En particulier, que valent $y[0]$, $y[\infty]$, K_{trans} et N_{osc} ?

SNTZ 1 Calculez la transformée en z de la suite suivante

$$y[n] = \{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \cdots\}, \quad n \geq 0$$

SNTZ 2 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7\,y[n-1] - 0.72\,y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$.
2. Calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles.
3. Admettant $x[n] = \epsilon[n]$, esquissez $y[n]$ après avoir calculé $y[0]$ et $y[\infty]$.

SNTZ 3 Répondez aux questions de l'exercice précédent pour

$$y[n] = x[n] + 1.2\,y[n-1] - 0.75\,y[n-2]$$

SNTZ 4 Considérant la réponse indicielle d'un système décrit par

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2 - 1.6\,z + 0.81}$$

calculez la durée du régime transitoire et le nombre d'oscillations visibles ainsi que les valeurs $y[0]$ et $y[\infty]$. Esquissez $y[n]$.

SNTZ 5 Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est décrite par

$$h[n] = \exp\left(-\frac{nT_e}{\tau}\right) \sin\left(n\,2\pi f_0\,T_e\right)\,\epsilon(n)$$

lorsque $T_e = 1\,\text{msec}$, $\tau = 10\,\text{msec}$, $f_0 = 100\,\text{Hz}$?

Rép. :

$$h[n] = R^n\,\sin(n\Omega_0) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{0.53\,z}{z^2 - 1.46\,z + 0.82}$$

SNF 1 Considérant un moyenneur pondéré décrit par l'équation aux différences suivante qui accorde plus d'importance aux valeurs récentes

$$y[n] = \frac{1}{6}\left(3x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]\right)$$

1. Dessinez son schéma ainsi que ses réponses impulsionnelles et indicielle.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

SNF 2 Un filtre passe-bas d'ordre 1 est décrit par

$$y[n] = x[n-1] + 0.9y[n-1]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ lorsque $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2$?
4. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$.

SNF 3 Considérant un filtre d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = R\,\sin(\Omega_0)\;x[n-1] + 2R\,\cos(\Omega_0)\;y[n-1] - R^2\,y[n-2]$$

avec $R = 0.8$ et $\Omega_0 = \pi/4$.

1. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2$?
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ pour $-\pi < \Omega < +\pi$. Quel type de filtre est ainsi réalisé ?

SNF 4 Un filtre numérique biquadratique est décrit par l'équation aux différences suivante

$$y[n] = a_0\,x[n] + a_1\,x[n-1] + a_2\,x[n-2] - b_1\,y[n-1] - b_2\,y[n-2]$$

1. Dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
3. Que valent $|H(j\Omega)|$ et $\angle H(j\Omega)$ si $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2$?
4. Quelles conditions faut-il satisfaire pour que le filtre soit :
   a) un filtre passe-bas de gain unité ?
   b) un filtre passe-haut de gain unité ?

SNF 5 On applique un signal sinusoïdal permanent $x(t) = 5\,\sin(2\pi\,1\text{kHz}\,t)$ à un filtre numérique décrit par $y[n] = 0.1\,x[n] + 0.9\,y[n-1]$. Sachant que $f_e = 10\,\text{kHz}$, que vaut le signal analogique $y(t)$ obtenu après conversion N–A ?

SNF 6 Considérant un moyenneur non causal centré d'ordre 5 :

1. Écrivez son équation aux différences et dessinez son schéma fonctionnel.
2. Calculez sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ et écrivez-la à l'aide de fonctions en cosinus seulement.
3. Que valent $H(0)$ et $H(\pi)$? Y a-t-il des pulsations pour lesquelles $H(j\Omega)$ s'annule ?

SNF 7 Calculez puis esquissez les réponses indicielle $y[n]$ et fréquentielle $H(j\Omega)$ d'un filtre décrit par sa réponse impulsionnelle

$$h[n] = A\,\{10, 8, 6, 4, 2, 0, 0, \cdots\}, \quad n \geq 0, \quad A = 1$$

Que doit valoir A pour que le gain de ce filtre soit égal à 1 ?

SNF 8 Considérant un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] + 1.7\, y[n-1] - 0.72\, y[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Recherchez les valeurs numériques de $H(j\Omega)$ lorsque $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2$.
3. Esquissez $|H(j\Omega)|$.

SNF 9 Répétez l'exercice précédent pour un filtre numérique décrit par

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + 1.2\, y[n-1] - 0.72\, y[n-2]$$

SNF 10 Considérant le schéma fonctionnel du filtre numérique de l'exercice SNT 2 pour lequel la réponse impulsionnelle vaut

$$h[n] = \{+2, +3, +5, -5, -3, -2, 0, 0, \cdots\}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

1. Calculez sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse fréquentielle $H(j\Omega)$.
2. Écrivez cette dernière avec un phaseur et une somme de sinus.
3. Écrivez le module et la phase de $H(j\Omega)$. Observez-alors que la phase est linéaire ; expliquez a posteriori pourquoi cette phase doit être linéaire.
4. Esquissez le module et la phase de $H(j\Omega)$ après avoir calculé les valeurs particulières pour $f = 0,\ f_e/4,\ f_e/2,\ 3f_e/4,\ f_e$.