

11 Éléments de filtrage analogique

11.1 Introduction

Le filtrage est l'opération qui consiste à modifier les composantes spectrales d'un signal. Le filtre est un circuit qui réalise cette opération. Les intervalles de fréquence où les composants du signal sont transmises sont appelées bandes passantes ; les intervalles où les signaux sont bloqués sont désignés sous le nom de bandes d'arrêt ou d'atténuation.

11.1.1 Filtre idéal

Un filtre idéal est caractérisé par :

1. une réponse fréquentielle dont le module vaut 1 dans les bandes passantes ;
2. une réponse fréquentielle dont le module vaut 0 dans les bandes d'arrêt ;
3. un temps de propagation t_p qui est le même pour toutes les composantes spectrales. Ce temps de propagation constant est équivalent à une réponse fréquentielle à phase linéaire.

Ce type de filtres, purement théorique et bien entendu impossible à réaliser pratiquement, est celui vers lequel on tend avec un filtre réel. Les réponses fréquentielles des 4 filtres idéaux de base sont représentés à la figure 11.1.

11.1.2 Formes canoniques

Les filtres réels sont généralement représentés par des fonctions de transfert $H(s)$ dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes en s . Ces polynômes sont ordonnés de manière croissante (forme de Bode) ou dans l'ordre décroissant (forme de Laplace). Dans chaque cas, le premier coefficient de ces polynômes doit être égal à un.

Afin de faciliter l'analyse, le tracé des réponses fréquentielles et la réalisation des filtres, ces polynômes sont généralement décomposés en facteurs simples d'ordre 1 ou 2. Ces facteurs simples font intervenir une pulsation caractéristique ω_0 et, pour ceux d'ordre 2, un facteur de qualité Q_0 ou, son inverse, le coefficient d'amortissement $\zeta = 1/(2Q_0)$.

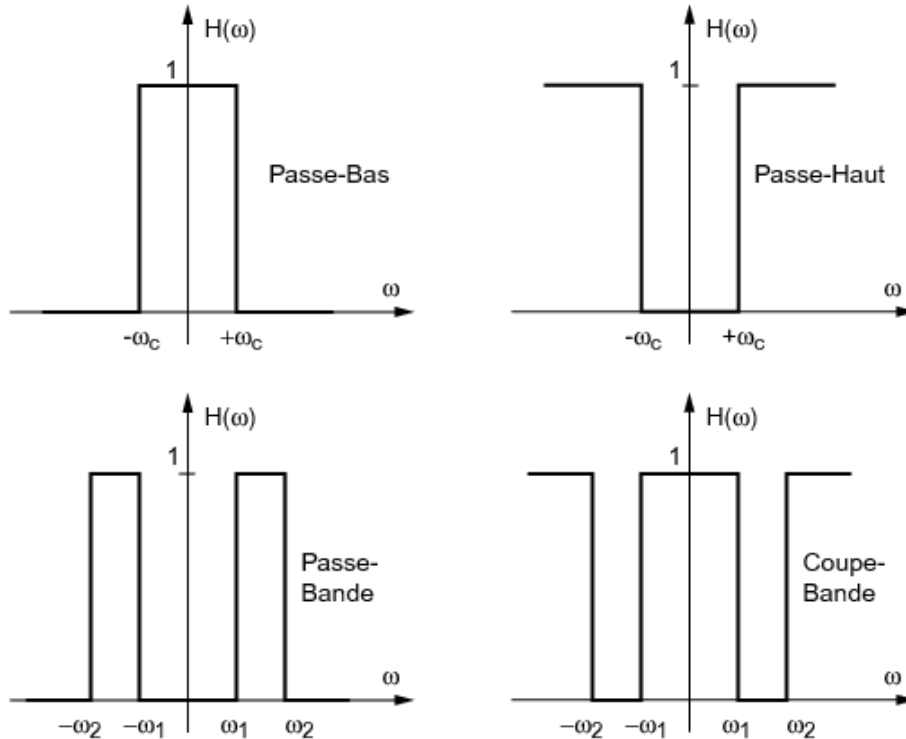


FIG. 11.1: Réponses fréquentielles des filtres idéaux

L'ensemble des possibilités de description des filtres se réduit donc aux facteurs simples suivants représentés sous la forme de Bode :

$$\begin{aligned}
 \frac{s}{\omega_1} & & 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \\
 1 + \frac{s}{\omega_1} & & 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

On y trouve :

- les pulsations caractéristiques ω_1 et ω_0 ;
- le facteur de qualité Q_0 ;
- le coefficient d'amortissement $\zeta = 1/(2Q_0)$.

Voici un exemple d'écriture de fonctions de transfert dans les formes de Bode et de Laplace :

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1 + s/\omega_1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \\
 H(s) &= \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{(s + \omega_1)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

11.1.3 Formes normalisées

Il est d'usage de décrire ces fonctions de transfert à l'aide de polynômes normalisés dans lesquels les pulsations caractéristiques sont unitaires. Les polynômes normalisés

d'ordre 1 s'écrivent alors sous la forme :

$$P_1(s) = s + 1 \quad (11.2)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_1(s) = \begin{cases} s + \omega_1 \\ 1 + \frac{s}{\omega_1} \end{cases} \quad (11.3)$$

Les polynômes normalisés d'ordre 2 s'écrivent sous la forme :

$$P_2(s) = s^2 + 2\zeta s + 1 \quad (11.4)$$

et il est sous-entendu qu'ils correspondent à l'un des deux polynômes suivants :

$$P_2(s) = \begin{cases} s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 \\ 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2} \end{cases} \quad (11.5)$$

11.1.4 Filtres d'ordre 2

Les filtres fondamentaux sont du type passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. A ceux-ci, on peut en ajouter beaucoup d'autres tels que, par exemple, les filtres correcteurs d'amplitude et les filtres déphaseurs.

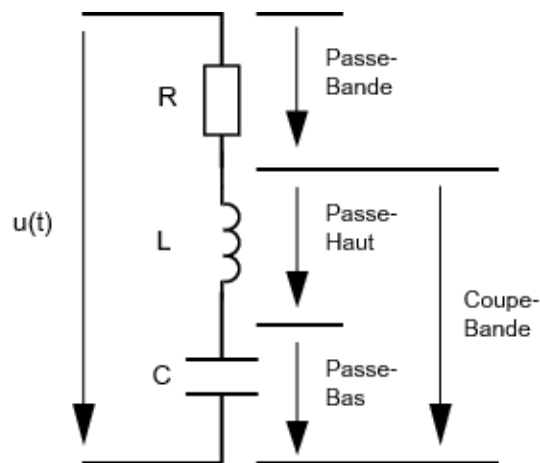


FIG. 11.2: Filtres d'ordre 2 réalisés avec un circuit série RLC

La figure 11.2 montre comment le circuit RLC permet de réaliser les 4 filtres de base. Suivant l'endroit où l'on recueille la tension de sortie, on trouve en effet :

- le filtre passe-bas aux bornes de la capacité

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.6)$$

– le filtre passe-bande aux bornes de la résistance

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{2\zeta(s/\omega_0)}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.7)$$

– le filtre passe-haut aux bornes de l'inductance

$$H_{PH}(s) = \frac{(s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.8)$$

– le réjecteur de bande aux bornes de l'inductance et de la capacité

$$H_{R\Delta}(s) = \frac{1 + (s/\omega_0)^2}{1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.9)$$

Dans le cas du filtre passe-bande d'ordre 2, on n'oubliera pas les relations importantes suivantes :

$$\Delta\omega \equiv \omega_s - \omega_i = \frac{\omega_0}{Q_0}, \quad \omega_0^2 = \omega_s \cdot \omega_i \quad (11.10)$$

où ω_i , ω_s , $\Delta\omega$ sont, respectivement, les pulsations de coupure inférieure, supérieure et la bande passante du filtre.

11.2 Filtres optimums

11.2.1 Gabarit

Contrairement au filtre idéal, un filtre réel possède une bande de transition entre les bandes passantes et d'arrêt et les spécifications du filtre sont généralement données à l'aide d'un gabarit (figure 11.3). Celui-ci précise les bandes passantes, bandes de transition et bandes d'arrêt souhaitées.

A la donnée du gabarit, on peut ajouter des spécifications telles que

- l'amplitude de l'ondulation acceptée dans les bandes passantes et/ou d'arrêt
- l'uniformité du temps de propagation dans la bande passante (phase linéaire).

Il est important de relever ici que les gabarits ne sont pas toujours aussi simples que celui de la figure 11.3. Pour exemple, vous trouverez à la figure 11.4 le gabarit que doivent respecter les transmissions téléphoniques aux USA.

11.2.2 Approximations

Suivant le cahier des charges donné, la réalisation d'un filtre passe-bas conduit à des fonctions de transfert dont les dénominateurs sont des polynômes qui optimisent au mieux les contraintes demandées. Ces polynômes, appelés polynômes d'approximation, réalisent des filtres caractérisés par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

- une bande passante plate au maximum pour les **filtres de Butterworth** ;
- un temps de propagation pratiquement uniforme (ou une phase linéaire) dans la bande passante pour les **filtres de Bessel** ;

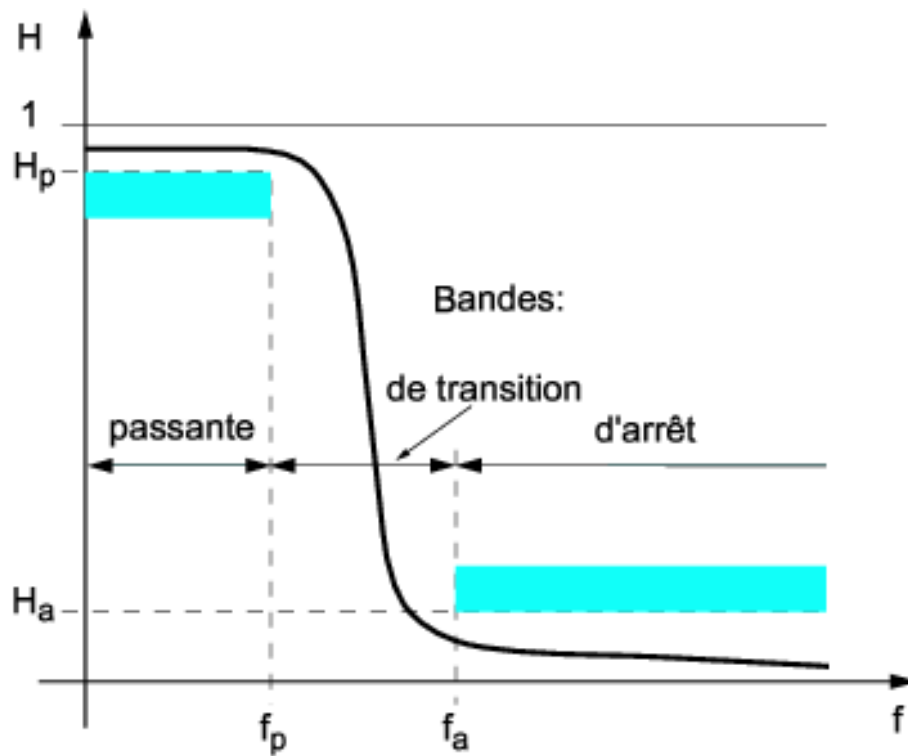


FIG. 11.3: Gabarit pour un filtre passe-bas

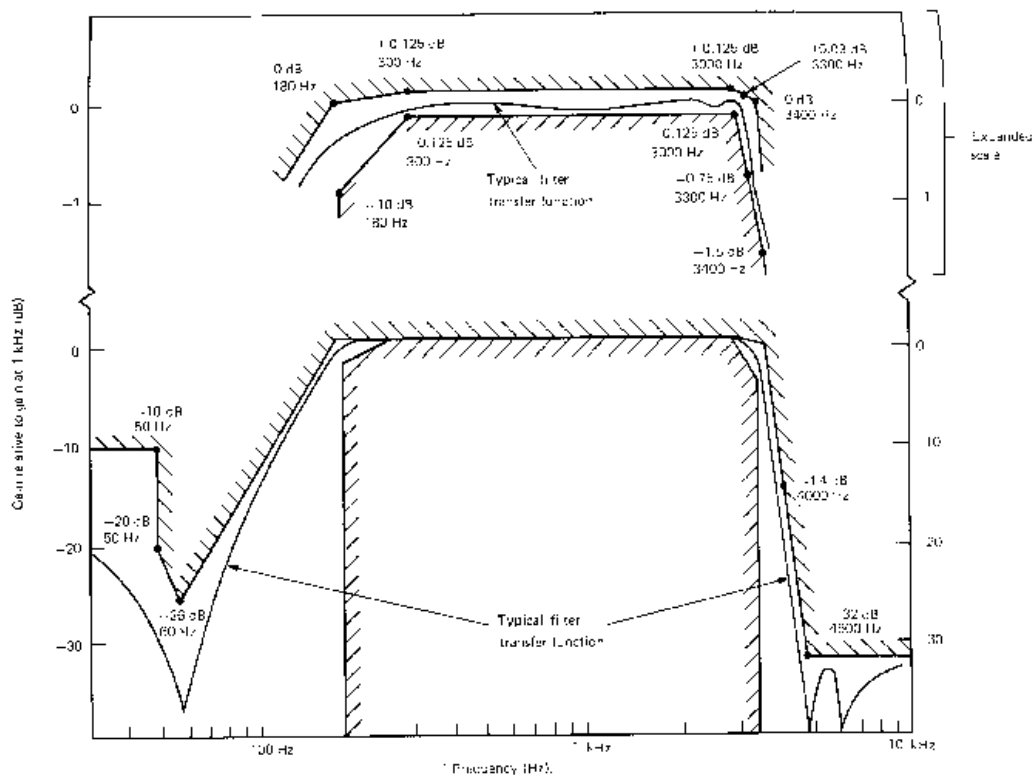


FIG. 11.4: Gabarit de transmission téléphonique (Copyright 1975, ATT Company)

– une bande de transition étroite obtenue au dépend d'une ondulation de la réponse fréquentielle dans la bande passante pour les **filtres de Tchebycheff de type I**. Les filtres ci-dessus sont des filtres dits tout pôles pour lesquels le numérateur est d'ordre 0. Leurs fonctions de transfert s'écrivent alors sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \quad (11.11)$$

D'autres approximations de filtres réels existent comme par exemple :

- les **filtres de Tchebycheff de type II** qui n'ont pas d'ondulations dans la bande passante mais en possèdent dans la bande d'arrêt ;
- les **filtres elliptiques** pour lesquels on accepte des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt.

Les fonctions de transfert de ces filtres sont alors décrites par un rapport de deux polynômes ;

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (11.12)$$

Suivant la nature du filtre les performances sont sensiblement différentes ; elles sont présentées dans le tableau 11.1.

	Butterworth	Bessel	Tchebycheff I	Tchebycheff II
Régularité de la courbe d'amplitude	excellente	satisfaisante	ondulations	bonne
Raideur de la transition	faible	médiocre	bonne	moyenne
Régularité du temps de propagation	faible	excellente	médiocre	faible
Qualité de la réponse temporelle	satisfaisante	excellente	mauvaise	bonne
Facteurs de qualité	moyens	faibles	élevés	moyens
Disparité des composants	faible	très faible	forte	faible

TAB. 11.1: Caractéristiques selon le type de filtres [4]

11.2.3 Temps de propagation

On sait que le déphasage est une mesure du décalage temporel t_d entre deux signaux périodiques de même nature et que l'on a la relation suivante :

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t_d}{T}$$

De manière équivalente, cela s'écrit

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{T} t_d = \omega t_d \quad \Leftrightarrow \quad t_d = \frac{\varphi(\omega)}{\omega} = T \frac{\varphi(\omega)}{2\pi}$$

Lorsque l'on s'intéresse au *temps de propagation* t_p d'un filtre réel, celui-ci est négatif et on le définit comme suit

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (11.13)$$

Sa valeur est généralement donnée pour les basses fréquences

$$t_p = -\left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (11.14)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant, toutes les composantes spectrales d'un signal sont retardées du même temps t_p et le signal temporel est ainsi peu déformé.

11.2.4 Illustration des réponses fréquentielles et temporelles

Pour cette illustration, on considère quatre filtres d'ordre 5 et de nature différente. Les figures 11.5 à 11.8 illustrent le comportement temporel et fréquentiel des filtres de Butterworth, Bessel et Tchebycheff I en utilisant des échelles logarithmiques (diagrammes de Bode).

Dans un but de comparaison, on y a ajouté un filtre passe-bas composé de 5 cellules identiques d'ordre 1. Afin que les comparaisons se fassent sur une base commune, tous les filtres ont la même pulsation de coupure, à savoir, $\omega_c = 1$ [rad/sec].

La figure 11.9 permet de comparer les réponses de l'ensemble des filtres. La figure 11.10 utilise des axes linéaires afin de mettre en évidence le comportement de la phase et celui du temps de propagation des 4 filtres.

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

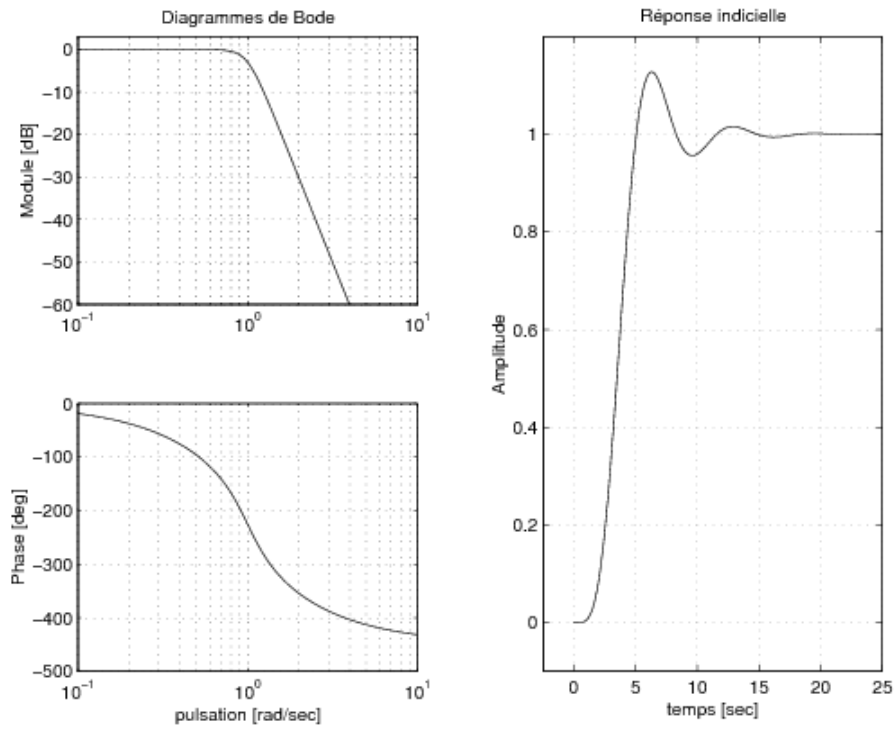


FIG. 11.5: Filtre de Butterworth ($n=5$)

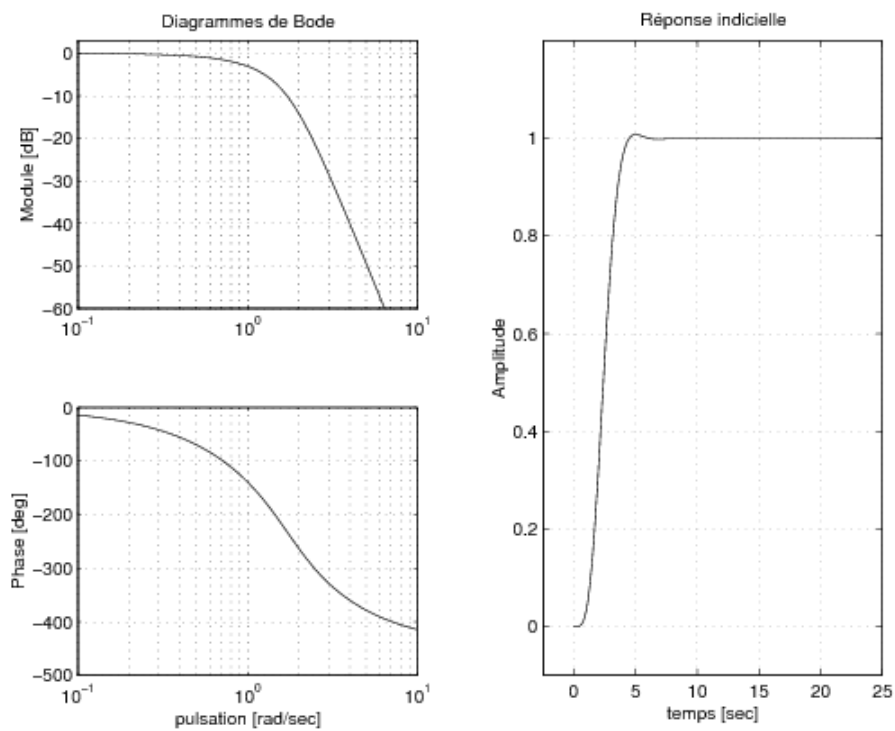


FIG. 11.6: Filtre de Bessel ($n=5$)

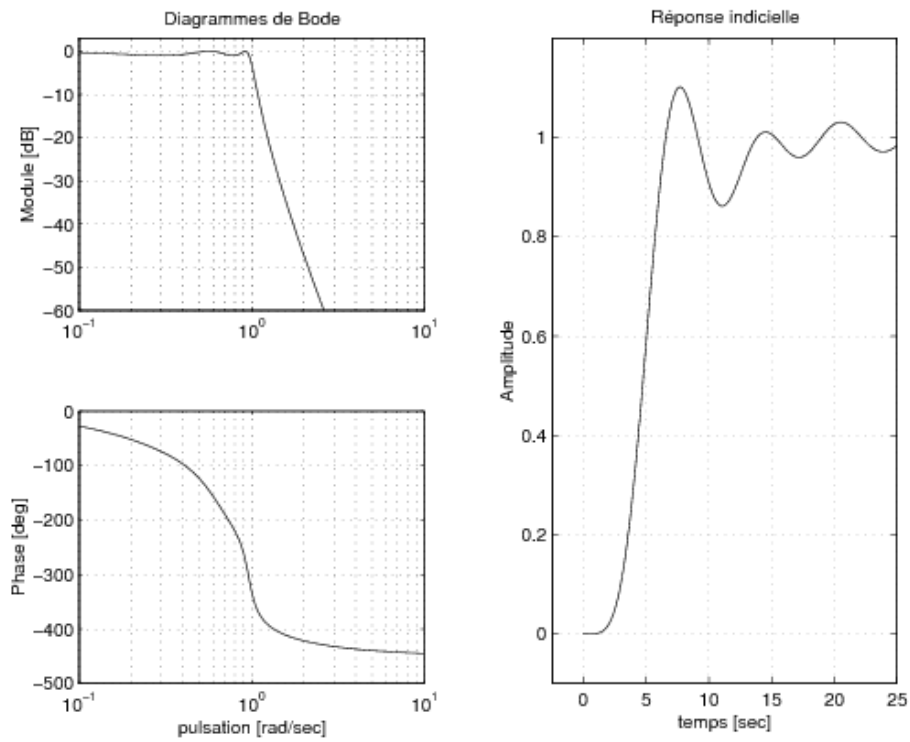


FIG. 11.7: Filtre de Tchebycheff ($n=5$)

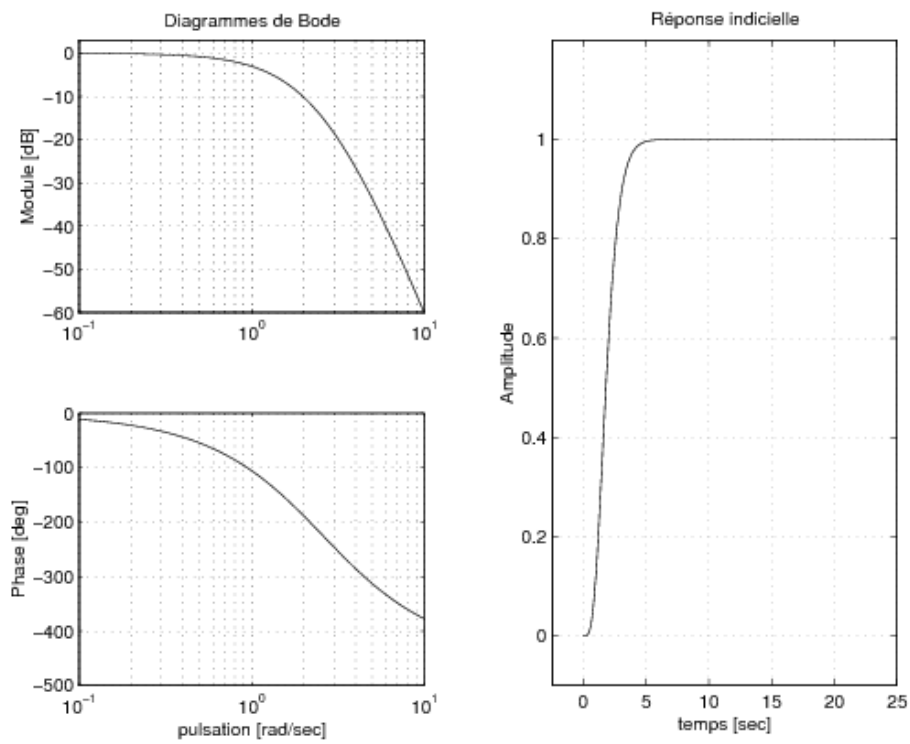


FIG. 11.8: Filtre composé de 5 cellules d'ordre 1

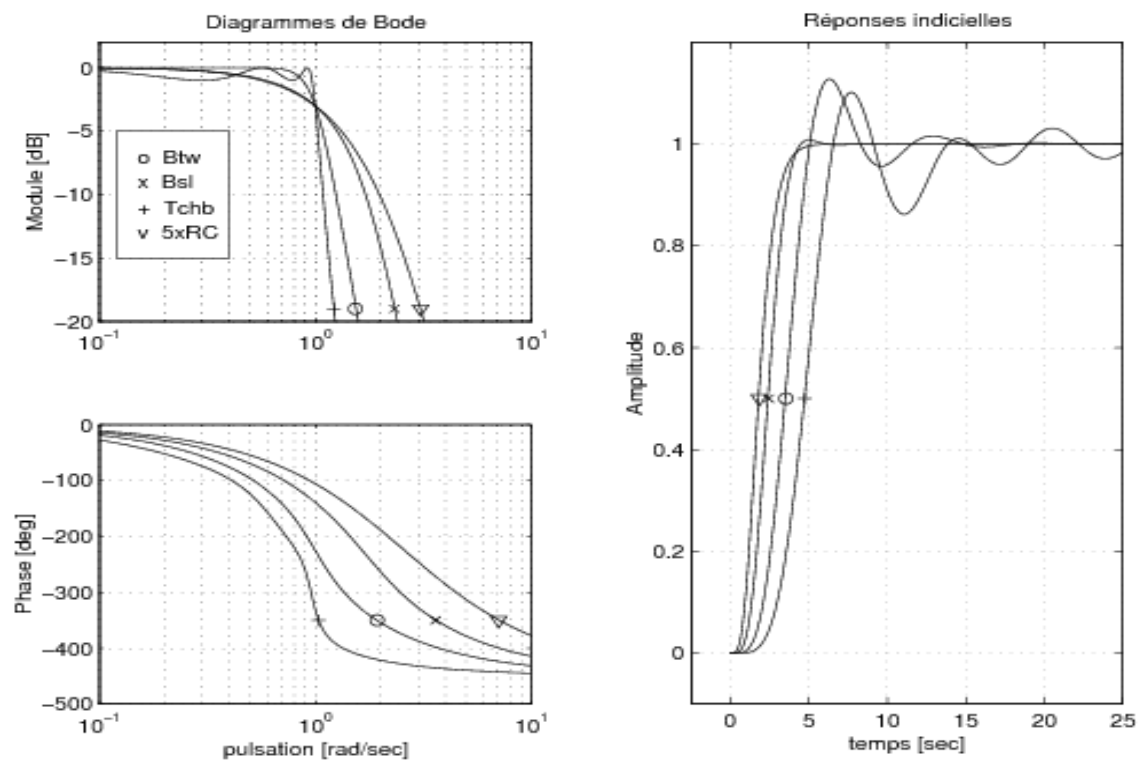


FIG. 11.9: Comparaison des réponses fréquentielles et indicielles

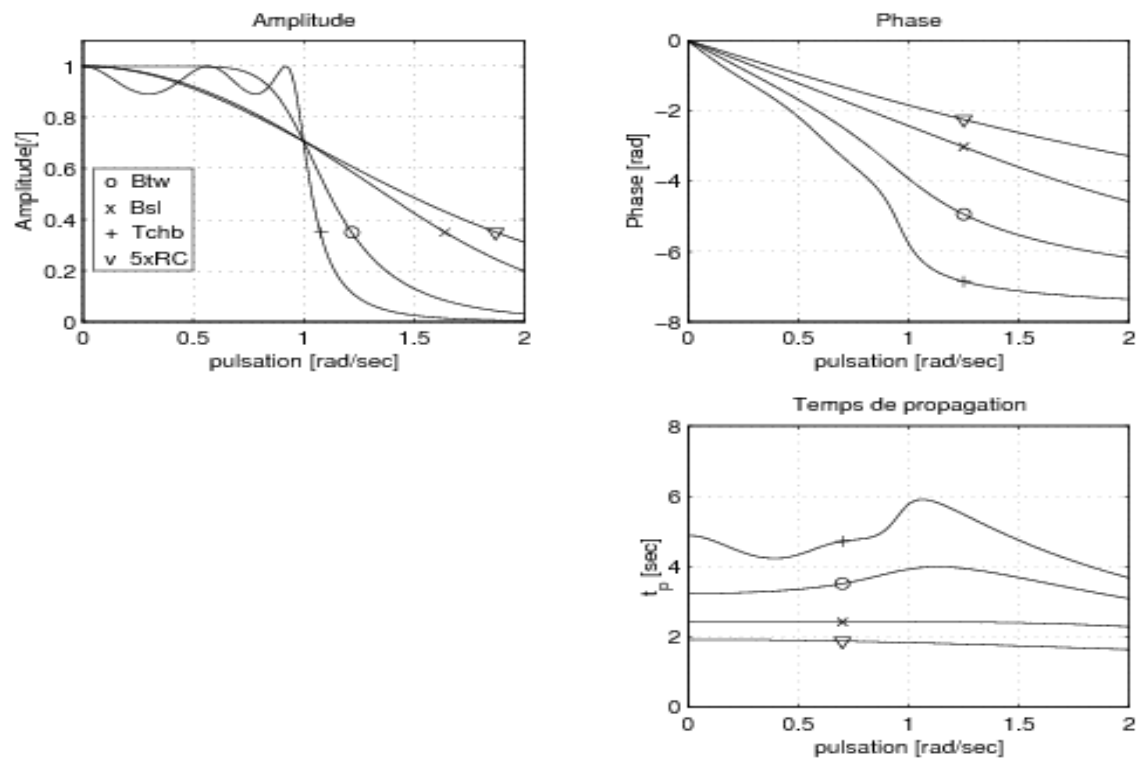


FIG. 11.10: Diagrammes linéaires et temps de propagation

11.3 Filtres de Butterworth

Les filtres de Butterworth sont caractérisés par une réponse en amplitude extrêmement plate dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (11.15)$$

On notera que cette réponse est normalisée par rapport à la pulsation de coupure ω_c pour laquelle le filtre possède une atténuation de $\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$.

En écrivant la fonction de transfert avec la variable de Laplace et en choisissant $\omega_c = 1$, on obtient une description équivalente :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (11.16)$$

On voit ainsi que le dénominateur de cette description est un polynôme d'ordre $2n$

$$D(s) = 1 + (-s^2)^n = 0 \quad (11.17)$$

dont les racines sont uniformément réparties sur un cercle de rayon unité. L'angle entre chaque racine vaut π/n et, suivant que l'ordre est pair ou impair, on aura les situations illustrées par la figure 11.11.

On notera que les pôles à parties réelles positives sont instables. Ils sont dus à $H(-s)$, la partie non réalisable de la fonction de transfert utilisée pour décrire le module de la réponse fréquentielle. Les pôles restant représentent la fonction de transfert $H(s)$ du filtre que l'on désire réaliser.

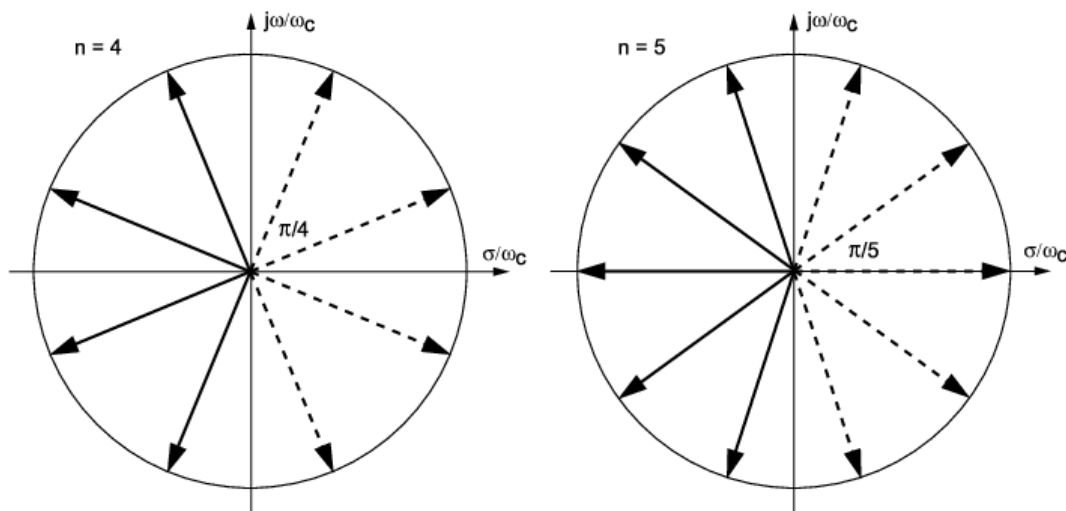


FIG. 11.11: Position des pôles pour un filtre de Butterworth

Comme on l'a dit plus haut, les filtres passe-bas étudiés ici sont des filtres tout pôles décrits de manière générale par :

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (11.18)$$

Pour calculer le polynôme $A(s)$, il suffit de connaître les coordonnées de chacun des pôles correspondant aux trinômes constitutifs du polynôme. En effet, si l'on a $p_{1,2} = -a \pm jb$, il vient :

$$A(s) = \begin{cases} (s + a + jb)(s + a - jb) \\ s^2 + 2a s + a^2 + b^2 \\ s^2 + 2a s + 1 \end{cases} \quad (11.19)$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ car les racines normalisées par rapport à ω_c se situent sur un cercle de rayon unité.

Dans le cas d'un polynôme d'ordre 5, ce dernier sera décomposé en 3 polynômes de base provenant du pôle réel et des 2 paires de pôles complexes :

Pôles	Polynômes
$p_1 = -1$	$P_1(s) = 1 + s$
$p_{2,3} = -0.809 \pm j0.588$	$P_2(s) = 1 + 1.618 s + s^2$
$p_{4,5} = -0.309 \pm j0.951$	$P_3(s) = 1 + 0.618 s + s^2$

On notera que pour chaque cellule d'ordre 2, le facteur de qualité correspondant Q_{0k} est donné par l'inverse du deuxième coefficient. Ainsi, pour le polynôme d'ordre 5, on aura $Q_{02} = 1/1.618$ et $Q_{03} = 1/0.618$.

11.3.1 Tableau des polynômes de Butterworth

Connaissant la position des pôles d'un polynôme d'ordre n quelconque, il est aisé d'en calculer les trinômes constitutifs. Ceux-ci sont donnés dans le tableau 11.2.

11.3.2 Ordre et pulsation caractéristique d'un filtre

Dans l'analyse des filtres, il est fréquent d'exprimer la réponse fréquentielle à l'aide de l'atténuation $A(j\omega)$ définie comme l'inverse de $H(j\omega)$:

$$A(j\omega) \equiv \frac{1}{H(j\omega)} \quad (11.20)$$

n	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.414s + s^2)$
3	$(1 + s)(1 + 1.000s + s^2)$
4	$(1 + 1.848s + s^2)(1 + 0.765s + s^2)$
5	$(1 + s)(1 + 1.618s + s^2)(1 + 0.618s + s^2)$
6	$(1 + 1.932s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.518s + s^2)$
7	$(1 + s)(1 + 1.802s + s^2)(1 + 1.247s + s^2)(1 + 0.445s + s^2)$
8	$(1 + 1.962s + s^2)(1 + 1.663s + s^2)(1 + 1.111s + s^2)(1 + 0.390s + s^2)$
9	$(1 + s)(1 + 1.879s + s^2)(1 + 1.532s + s^2)(1 + 1.000s + s^2)(1 + 0.347s + s^2)$
10	$(1 + 1.975s + s^2)(1 + 1.782s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.908s + s^2)(1 + 0.313s + s^2)$

TAB. 11.2: Quelques polynômes de Butterworth

L'atténuation d'un filtre de Butterworth est alors décrite par

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.21)$$

Comme la connaissance des 2 paramètres n et ω_c suffit à caractériser la réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth, la donnée d'un gabarit passe-bas à l'aide de 2 coordonnées suffit pour déterminer complètement le filtre (figure 11.12).

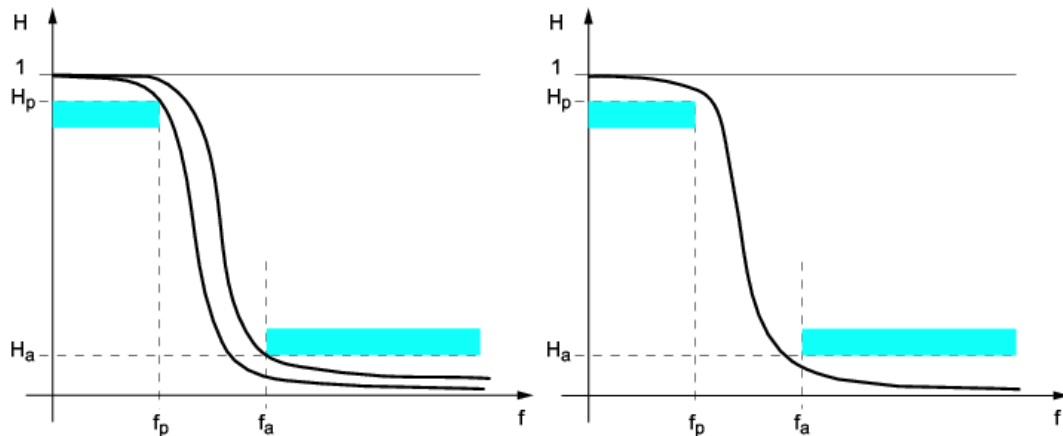


FIG. 11.12: Gabarit et réalisation d'un filtre de Butterworth

En effet, sachant que les atténuations aux points P (fin de la bande passante) et A (début de la bande d'arrêt) s'écrivent :

$$|A(j\omega_p)|^2 \equiv A_p^2 = 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.22)$$

$$|A(j\omega_a)|^2 \equiv A_a^2 = 1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2n} \quad (11.23)$$

On résout aisément ce système de 2 équations à 2 inconnues en effectuant le rapport des deux équations après avoir passé la valeur 1 dans le membre de gauche. Prenant le logarithme des deux membres de l'équation, on obtient finalement :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log \left[\frac{(A_p^2 - 1)}{(A_a^2 - 1)} \right]}{\log(\omega_p/\omega_a)} \quad (11.24)$$

Une fois l'ordre connu, on peut calculer la pulsation de coupure à partir d'une des deux équations d'atténuation. Ce qui donne

$$\omega_c = \frac{\omega_m}{(A^2(\omega_m) - 1)^{1/(2n)}} \quad (11.25)$$

avec

$$\omega_m = \omega_p \text{ ou } \omega_a$$

Comme la valeur trouvée pour l'ordre n du filtre n'est généralement pas un entier, on l'arrondit à une valeur entière supérieure. On peut ainsi calculer deux valeurs différentes pour ω_c : l'une avec la pulsation ω_p et l'autre avec la pulsation ω_a .

En choisissant l'une ou l'autre de ces deux pulsations caractéristiques, la courbe de réponse fréquentielle touchera l'une ou l'autre partie du gabarit (figure 11.12a); ce qui n'est pas satisfaisant. Par contre, en prenant pour ω_c la moyenne géométrique des deux valeurs ainsi trouvées, on permettra à la courbe de réponse fréquentielle de ne pas toucher le gabarit (figure 11.12b).

11.3.3 Synthèse d'un filtre de Butterworth

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité ne comportant pas d'oscillations dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned} H_p &= -1 \text{ dB} & f_p &= 1 \text{ kHz} \\ H_a &= -40 \text{ dB} & f_a &= 3 \text{ kHz} \end{aligned}$$

Pour ce faire on demande de :

1. trouver l'ordre n et la fréquence de coupure f_c du filtre ;
2. calculer les facteurs de qualité et le polynôme de réalisation ;
3. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

Solution :

1. On a :

$$A_p = 1/H_p = +1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad A_p^2 - 1 = 0.2589$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \Rightarrow \quad A_a^2 - 1 \simeq 10^4$$

d'où l'on tire :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log \left[(A_p^2 - 1) / (A_a^2 - 1) \right]}{\log (\omega_p / \omega_a)} = \frac{1}{2} \frac{\log (0.2589 / 10^4)}{\log (1/3)} = 4.80 \simeq 5$$

$$f_{c,p} = \frac{f_p}{(A_p^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{1 \text{ kHz}}{0.2589^{1/10}} = 1.145 \text{ kHz}$$

$$f_{c,a} = \frac{f_a}{(A_a^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{3 \text{ kHz}}{10^{4/10}} = 1.194 \text{ kHz}$$

On peut ainsi calculer la fréquence de coupure

$$f_c = \sqrt{f_{c,p} \cdot f_{c,a}} = 1.17 \text{ kHz}$$

2. D'après le tableau 11.2, le polynôme normalisé d'ordre 5 vaut :

$$P_{5,n}(s) = (1 + s) (1 + 1.618s + s^2) (1 + 0.618s + s^2)$$

On en déduit immédiatement les facteurs de qualité en prenant l'inverse des coefficients d'ordre 1 des deux trinômes :

$$Q_{02} = \frac{1}{1.618} = 0.618 = -4.18 \text{ dB}$$

$$Q_{03} = \frac{1}{0.618} = 1.618 = +4.18 \text{ dB}$$

En remplaçant la variable s par $s/(2\pi f_c) = 1.36 \cdot 10^{-4} s$, on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_5(s) = (1 + 1.36 \cdot 10^{-4} s) \cdot (1 + 2.20 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2) \cdot (1 + 0.84 \cdot 10^{-4} s + 1.85 \cdot 10^{-8} s^2)$$

3. Partant du polynôme $P_5(s)$, on en déduit $H(s) = 1/P_5(s)$ et on peut calculer puis tracer les réponses fréquentielles de chaque cellule (figure 11.13). La somme (en dB) de ces 3 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Butterworth d'ordre 5 (figure 11.14). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont également présentées dans la figure 11.15.

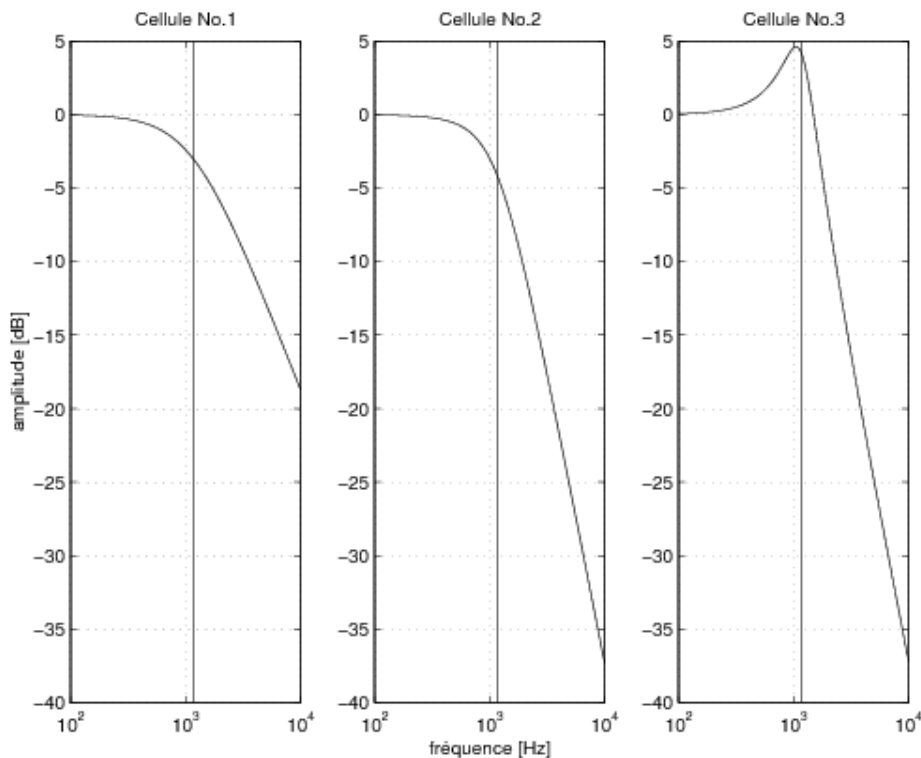


FIG. 11.13: Réponses fréquentielles de chaque cellule

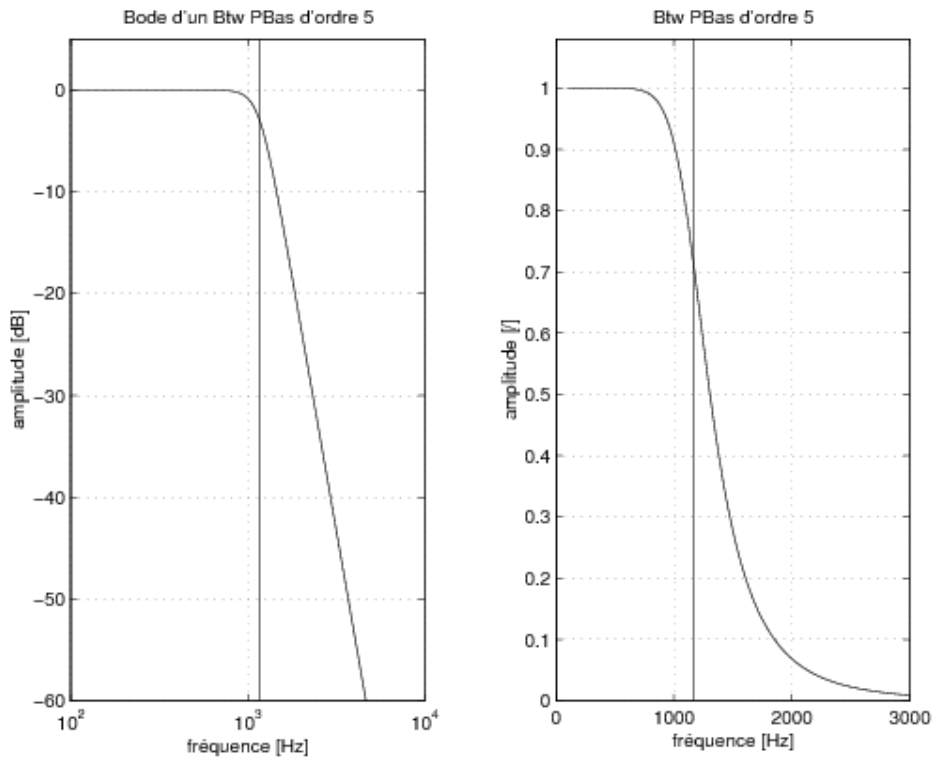


FIG. 11.14: Réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

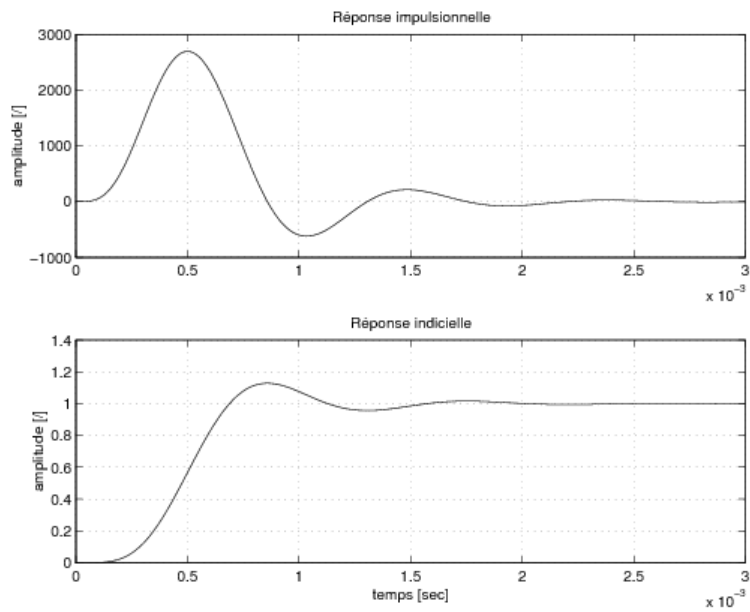


FIG. 11.15: Réponses temporelles d'un filtre de Butterworth d'ordre 5

11.4 Filtres de Tchebycheff

Lorsque les spécifications du gabarit permettent une ondulation dans la bande passante du filtre, on utilise fréquemment un filtre de Tchebycheff de type I dont la réponse fréquentielle est décrite par :

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega/\omega_r)} \quad (11.26)$$

avec ω_r délimitant la bande dans laquelle on accepte une ondulation r , généralement exprimée en dB. On voit donc que pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation n'est plus la pulsation de coupure mais la pulsation d'ondulation ω_r .

La fonction C_n décrivant la réponse fréquentielle du filtre est oscillante dans la bande passante et croissante dans la bande d'arrêt. Elle est décrite par :

$$C_n(\omega/\omega_r) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{acosh}(\omega/\omega_r)) & \text{si } \omega/\omega_r > 1 \end{cases} \quad (11.27)$$

L'amplitude ϵ de la fonction C_n est liée à l'ondulation r acceptée dans la bande passante au travers de la relation suivante :

$$1 + \epsilon^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^2 = 10^{r_{dB}/10} - 1 \quad (11.28)$$

11.4.1 Caractéristique des filtres de Tchebycheff

La réponse fréquentielle des filtres de Tchebycheff est illustrée par la figure 11.16 pour laquelle on a pris $r = 1 \text{ dB}$. On constate que le nombre d'extrêmes présents dans la bande d'ondulation est égal à l'ordre du filtre et que les ondulations se situent au-dessus ou au-dessous de 1 suivant que le filtre est d'ordre pair ou impair.

On se souviendra que la pulsation de la bande d'ondulation ω_r sert de pulsation de normalisation et qu'elle est reliée à la pulsation de coupure ω_c par la relation :

$$\omega_c = \omega_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \quad (11.29)$$

11.4.2 Calcul de l'ordre d'un filtre de Tchebycheff

Comme la donnée de la largeur de la bande d'ondulation fixe la pulsation de normalisation ω_r , il suffit de connaître un point de la bande d'arrêt et l'amplitude ϵ de l'ondulation admise pour déterminer l'ordre n du filtre [1] :

$$n \geq \frac{\log\left(\sqrt{A_a^2 - 1} + \sqrt{A_a^2 - 1 - \epsilon^2}\right) - \log(\epsilon)}{\log\left((\omega_a/\omega_r) + \sqrt{(\omega_a/\omega_r)^2 - 1}\right)} \quad (11.30)$$

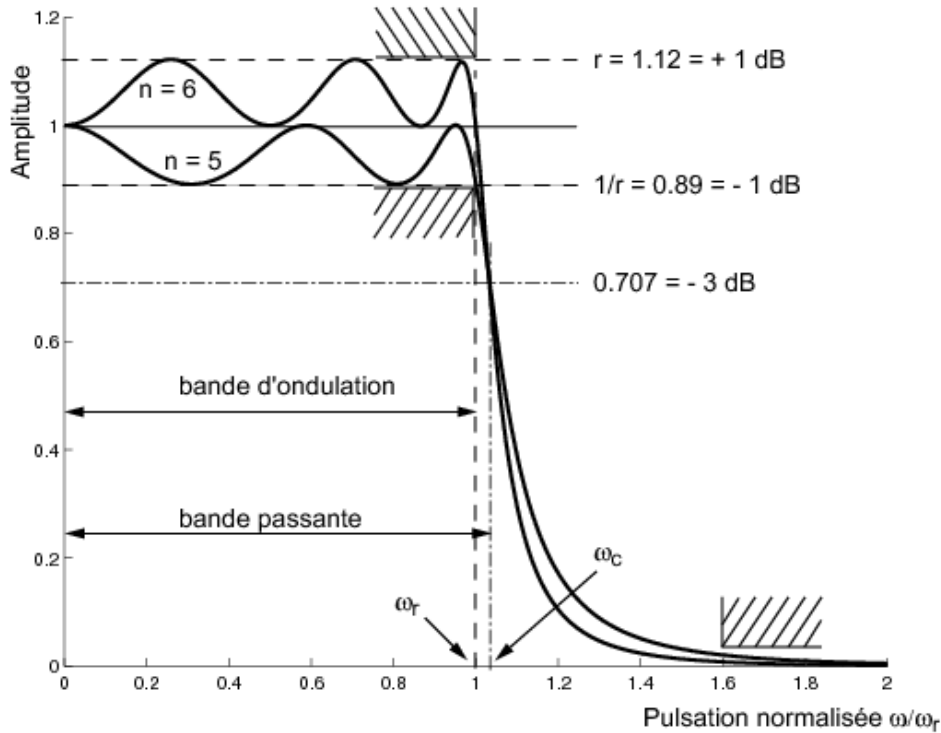


FIG. 11.16: Réponse fréquentielle des filtres Tchebycheff

Dans la situation fréquente où l'atténuation A_a est plus grande que 10, cette expression peut être simplifiée pour donner :

$$n \geq \frac{\log(2 A_a / \epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a / \omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a / \omega_r\right)^2 - 1}\right)} \quad (11.31)$$

11.4.3 Tableau des polynômes de Tchebycheff

On peut montrer que les racines des polynômes réalisant la réponse fréquentielle décrite par l'équation (11.26) se situent sur une ellipse dont le petit diamètre dépend de l'ondulation r . A partir de cette ellipse, on peut calculer les polynômes de Tchebycheff dont quelques uns sont données dans le tableau 11.3 pour $r = 0.5$ et 1.0 dB.

11.4.4 Synthèse d'un filtre de Tchebycheff

Dans l'exemple qui suit, on souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité pour lequel on accepte une ondulation de ± 1 dB dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant :

$$H(f_r) = H_r = |r| = 1 \text{ dB} \quad f_r = 1 \text{ kHz}$$

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

n	$P(s)$ pour $r = 0.5 \text{ dB} = 1.059$ ou $\epsilon = 0.3493$
1	$(1 + 0.349s)$
2	$(1 + 0.940s + 0.659s^2)$
3	$(1 + 1.596s)(1 + 0.548s + 0.875s^2)$
4	$(1 + 2.376s + 2.806s^2)(1 + 0.330s + 0.940s^2)$
5	$(1 + 2.760s)(1 + 1.230s + 2.097s^2)(1 + 0.216s + 0.965s^2)$
6	$(1 + 3.692s + 6.370s^2)(1 + 0.719s + 1.695s^2)(1 + 0.152s + 0.977s^2)$
7	$(1 + 3.904s)(1 + 1.818s + 3.939s^2)(1 + 0.472s + 1.477s^2)(1 + 0.112s + 0.984s^2)$
8	$(1 + 4.981s + 11.36s^2)(1 + 1.037s + 2.788s^2)(1 + 0.335s + 1.349s^2)(1 + 0.086s + 0.988s^2)$
n	$P(s)$ pour $r = 1.0 \text{ dB} = 1.122$ ou $\epsilon = 0.5089$
1	$(1 + 0.509s)$
2	$(1 + 0.996s + 0.907s^2)$
3	$(1 + 2.024s)(1 + 0.497s + 1.006s^2)$
4	$(1 + 2.411s + 3.579s^2)(1 + 0.283s + 1.014s^2)$
5	$(1 + 3.454s)(1 + 1.091s + 2.329s^2)(1 + 0.181s + 1.012s^2)$
6	$(1 + 3.722s + 8.019s^2)(1 + 0.609s + 1.793s^2)(1 + 0.126s + 1.009s^2)$
7	$(1 + 4.868s)(1 + 1.606s + 4.339s^2)(1 + 0.392s + 1.530s^2)(1 + 0.092s + 1.007s^2)$
8	$(1 + 5.010s + 14.23s^2)(1 + 0.876s + 2.934s^2)(1 + 0.276s + 1.382s^2)(1 + 0.070s + 1.006s^2)$

TAB. 11.3: Quelques polynômes de Tchebycheff

$$H(f_a) = H_a = -40 \text{ dB} \quad f_a = 3 \text{ kHz}$$

Pour ce faire on demande de :

1. calculer l'ordre n du filtre et sa fréquence de coupure f_c ;
2. calculer les fréquence caractéristique et facteur de qualité de chaque cellule ;
3. calculer le polynôme de réalisation ;
4. tracer les réponses fréquentielle et temporelle.

Solution :

1. On a :

$$A_p[\text{dB}] = -H_r[\text{dB}] = |r| = 1 \text{ dB} = 1.122 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \sqrt{r^2 - 1} = 0.5089$$

$$A_a = 1/H_a = +40 \text{ dB} = 100 \quad \text{et} \quad u_a = f_a/f_r = 3$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{\log(2 A_a/\epsilon)}{\log\left(\left(\omega_a/\omega_r\right) + \sqrt{\left(\omega_a/\omega_r\right)^2 - 1}\right)} \\ &\geq \frac{\log(200/0.5089)}{\log\left(3 + \sqrt{3^2 - 1}\right)} = 3.39 \simeq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_c &= f_r \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{acosh}(1/\epsilon)\right) \\ &= 1 \text{ kHz} \cdot \cosh\left(\frac{1}{4} \operatorname{acosh}(1/0.5089)\right) = 1053 \text{ Hz} \end{aligned}$$

2. Du tableau 11.3, on tire le polynôme normalisé pour une ondulation de 1 dB

$$P_{4,n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

On en déduit immédiatement les 2 facteurs de qualité

$$Q_{01} = \frac{\sqrt{3.579}}{2.411} = 0.785 = -2 \text{ dB} \quad Q_{02} = \frac{\sqrt{1.014}}{0.283} = 3.56 = +11 \text{ dB}$$

et les 2 fréquences caractéristiques

$$f_{01} = \frac{f_r}{\sqrt{3.579}} = 528 \text{ Hz} \quad f_{02} = \frac{f_r}{\sqrt{1.014}} = 993 \text{ Hz}$$

3. Effectuant le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{2\pi f_r} = 1.59 \cdot 10^{-4} s$$

sur le polynôme normalisé

$$P_{4n}(s) = (1 + 2.411s + 3.579s^2) (1 + 0.283s + 1.014s^2)$$

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

on obtient le polynôme de réalisation :

$$P_4(s) = (1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)$$

À ce polynôme correspond la fonction de transfert suivante :

$$H_4(s) = \frac{1}{(1 + 3.84 \cdot 10^{-4} s + 9.066 \cdot 10^{-8} s^2) (1 + 0.45 \cdot 10^{-4} s + 2.568 \cdot 10^{-8} s^2)}$$

dont les pulsations caractéristiques, facteurs d'amortissement et de qualité valent :

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{9.066 \cdot 10^{-8}}} = 3321 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{2.568 \cdot 10^{-8}}} = 6240 \text{ rad/sec}$$

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = 528 \text{ Hz}$$

$$f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = 993 \text{ Hz}$$

$$\zeta_1 = \frac{3.84 \cdot 10^{-4} \omega_{01}}{2} = 0.637$$

$$\zeta_2 = \frac{0.45 \cdot 10^{-4} \omega_{02}}{2} = 0.1405$$

$$Q_{01} = \frac{1}{2\zeta_1} = 0.785 = -2 \text{ dB}$$

$$Q_{02} = \frac{1}{2\zeta_2} = 3.56 = 11 \text{ dB}$$

Les réponses fréquentielles des deux cellules sont tracées à la figure 11.17. La somme (en dB) de ces 2 réponses donne la réponse fréquentielle du filtre de Tchebycheff d'ordre 4 (figure 11.18). Les réponses impulsionnelle et indicielle sont présentées dans la figure 11.19.

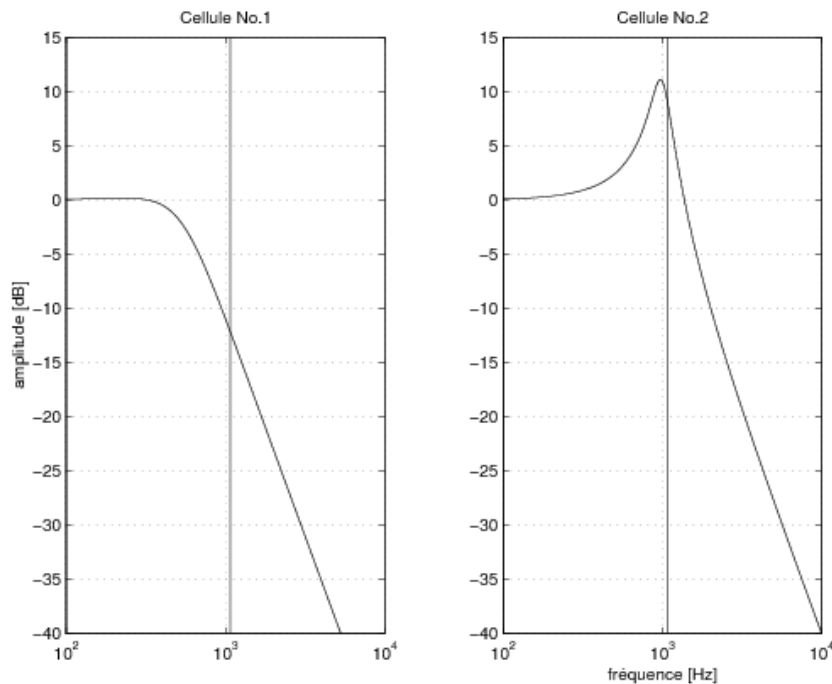


FIG. 11.17: Réponses fréquentielles des 2 cellules

11.4 Filtres de Tchebycheff

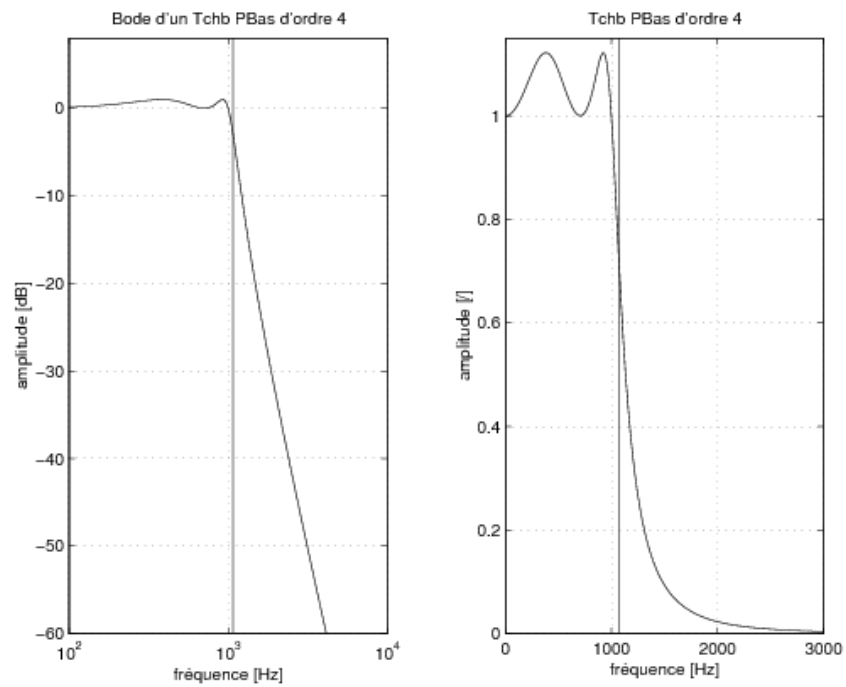


FIG. 11.18: Réponse fréquentielle d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

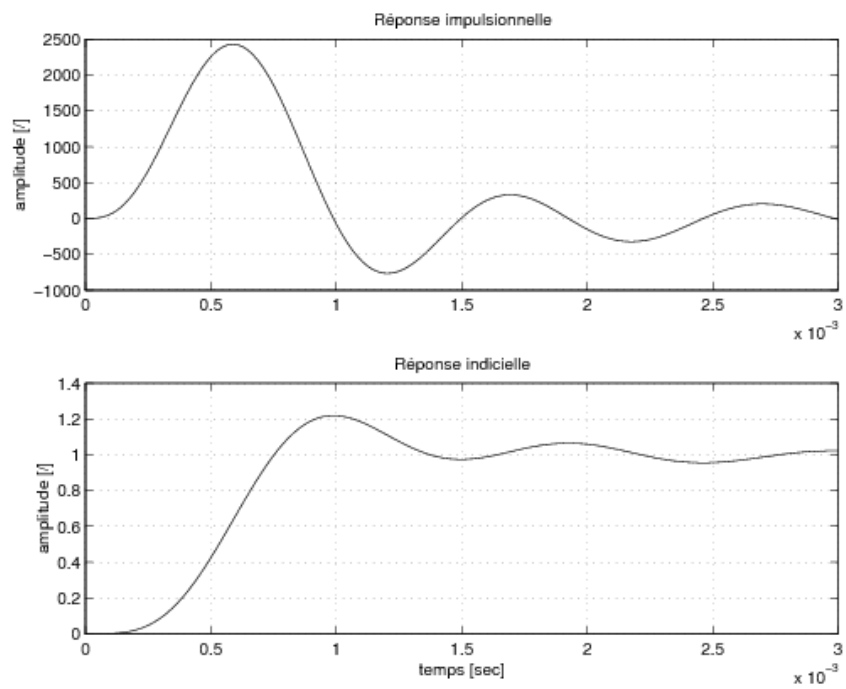


FIG. 11.19: Réponses temporelles d'un filtre de Tchebycheff d'ordre 4

11.5 Filtres de Bessel

Comme on vient de le voir, les filtres de Butterworth et Tchebycheff conduisent à des réponses indicielles ayant un fort dépassement malgré le fait que les amplitudes des composantes spectrales soient pratiquement maintenues à leurs valeurs dans la bande passante. Ce phénomène provient du fait que le déphasage de chacune de ces composantes n'est pas proportionnel à sa fréquence.

Avec les filtres de Bessel (dits également de Thomson), on obtient des réponses indicielles presque sans dépassement grâce au temps de propagation qui, dans la bande passante, est pratiquement indépendant de la fréquence. Cela se paye naturellement par une réponse fréquentielle en amplitude moins abrupte dans la bande de transition que les filtres précédents (le filtre idéal n'existe pas encore!).

Un temps de propagation constant (indépendant de la fréquence) signifie que toutes les composantes spectrales d'un signal sont transmises avec le même décalage temporel. L'intégrité de la forme du signal est ainsi respectée sauf pour les composantes spectrales que l'on désire supprimer par filtrage des amplitudes.

11.5.1 Phase linéaire et temps de propagation

On a vu au paragraphe 11.2.3 que le temps de propagation t_p est défini comme suit

$$t_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (11.32)$$

et que sa valeur est généralement donnée pour les basses fréquences

$$t_p = -\left. \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \rightarrow 0} \quad (11.33)$$

Dans le cas où le temps de propagation est constant (indépendant de la fréquence du signal), on dit que l'on a affaire à des filtres à phase linéaire car, dans ce cas, on a bien évidemment

$$\varphi(\omega) = -\omega t_p \quad (11.34)$$

C'est la propriété essentielle des filtres de Bessel.

11.5.2 Temps de propagation des filtres passe-bas

On montre aisément que la phase de cellules d'ordre 1 ou 2

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1} \quad (11.35)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + (1/Q_0) j\omega/\omega_0 + (j\omega/\omega_0)^2} \quad (11.36)$$

valent respectivement

$$\varphi_1(\omega) = -\text{atan}(\omega/\omega_1) \quad (11.37)$$

$$\varphi_2(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right) \quad (11.38)$$

Les temps de propagation valent alors

$$t_{p,1}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_1(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}(\omega/\omega_1)}{\omega}$$

$$t_{p,2}(\omega) \equiv -\frac{\varphi_2(\omega)}{\omega} = \frac{\text{atan}\left(\frac{\omega/(Q_0\omega_0)}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right)}{\omega}$$

La valeur du temps de propagation est généralement donnée pour les basses-fréquences ($\omega \rightarrow 0$) ; on obtient alors pour les cellules d'ordre 1 et 2, respectivement

$$t_{p,1} = \frac{1}{\omega_1}, \quad t_{p,2} = \frac{1}{Q_0 \omega_0} \quad (11.39)$$

Comme un filtre d'ordre quelconque est constitué de cellules d'ordre 1 et 2, les temps de propagation s'ajoutent pour donner

$$t_p = \sum_k \frac{1}{Q_{0,k} \omega_{0,k}} \quad (11.40)$$

avec $Q_{0,k} = 1$ pour les cellules d'ordre 1.

11.5.3 Fonctions de transfert

Les fonctions de transfert conduisant à un temps de propagation constant dans la bande passante possèdent un dénominateur décrit par des polynômes de Bessel

$$P(s) = \frac{1}{H(s)} = 1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n \quad (11.41)$$

dont les coefficients se calculent de manière itérative

$$b_k = \frac{2(n-k+1)}{k(2n-k+1)} b_{k-1} \quad \text{avec} \quad b_1 = 1 \quad (11.42)$$

Le tableau 11.4 donne quelques polynômes de Bessel décomposés en produits de binômes et trinômes normalisés par rapport à la pulsation de coupure du filtre. Le tableau a été construit en recherchant numériquement les racines des polynômes originaux et les pulsations de coupure.

n	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.3614s + 0.6178s^2)$
3	$(1 + 1.3225s)(1 + 0.9998s + 0.4773s^2)$
4	$(1 + 1.3389s + 0.4883s^2)(1 + 0.7738s + 0.3885s^2)$
5	$(1 + 1.5015s)(1 + 1.1408s + 0.4133s^2)(1 + 0.6219s + 0.3249s^2)$
6	$(1 + 1.2224s + 0.3891s^2)(1 + 0.9691s + 0.3509s^2)(1 + 0.5133s + 0.2759s^2)$
7	$(1 + 1.6840s)(1 + 1.0946s + 0.3396s^2)(1 + 0.8305s + 0.3012s^2)(1 + 0.4333s + 0.2382s^2)$
8	$(1 + 1.112s + 0.3166s^2)(1 + 0.976s + 0.2984s^2)(1 + 0.721s + 0.2625s^2)(1 + 0.373s + 0.209s^2)$

TAB. 11.4: Quelques polynômes de Bessel-Thomson

11.5.4 Synthèse d'un filtre de Bessel

D'un point de vue analytique, il n'existe malheureusement pas d'approche simple pour trouver les pôles de $H(s)$. On ne peut donc pas déterminer analytiquement la valeur de la pulsation de coupure et trouver l'ordre du filtre à partir d'un gabarit. On se contente alors d'une approche itérative conduisant à vérifier si un filtre donné (ordre et pulsation de coupure) entre bien dans le gabarit requis. La synthèse se résume donc à définir la bande passante (-3 dB) désirée et à choisir un ordre du filtre suffisamment élevé pour atteindre l'atténuation souhaitée.

À titre illustratif, considérons le cas d'un filtre de Bessel d'ordre 6 et de pulsation de coupure $\omega_c = 1$ [rad/sec]. Du tableau 11.4, on tire le polynôme normalisé par rapport à la pulsation de coupure ω_c . Comme nous avons choisi de prendre $\omega_c = 1$ [rad/sec], ce polynôme n'a pas besoin d'être modifié et l'on a

$$H(s) = \frac{1}{(1 + 1.2224s + 0.3891s^2)(1 + 0.9691s + 0.3509s^2)(1 + 0.5133s + 0.2759s^2)}$$

De cette fonction de transfert, nous déduisons que le filtre est réalisé à l'aide de trois cellules d'ordre 2 caractérisées par :

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{0.3891}} = 1.60 \left[\frac{rad}{sec} \right] \quad Q_{01} = \frac{1}{1.2224 \cdot \omega_{01}} = 0.51$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{0.3509}} = 1.69 \left[\frac{rad}{sec} \right] \quad Q_{02} = \frac{1}{0.9691 \cdot \omega_{02}} = 0.61$$

11.6 Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

$$\omega_{03} = \frac{1}{\sqrt{0.2759}} = 1.90 \left[\frac{rad}{sec} \right] \quad Q_{03} = \frac{1}{0.5133 \cdot \omega_{03}} = 1.02$$

Comme le temps de propagation total est égal à la somme des temps de propagation de chaque cellule, on a

$$t_p = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{Q_{0k} \cdot \omega_{0k}} = 1.22 + 0.97 + 0.51 = 2.70 [sec]$$

La figure 11.20 montre la réponse fréquentielle de ce filtre d'ordre 6 dont la pulsation de coupure vaut 1 rad/sec. La figure 11.21 illustre la réponse indicielle du filtre. Il est intéressant de relever que le temps nécessaire pour atteindre le 50% de la réponse indicielle correspond au temps de propagation du filtre. Enfin, la figure 11.22 montre comment la phase et le temps de propagation changent avec la pulsation. On voit bien que, dans la bande passante, la phase varie linéairement et que le temps de propagation est pratiquement indépendant de la pulsation.

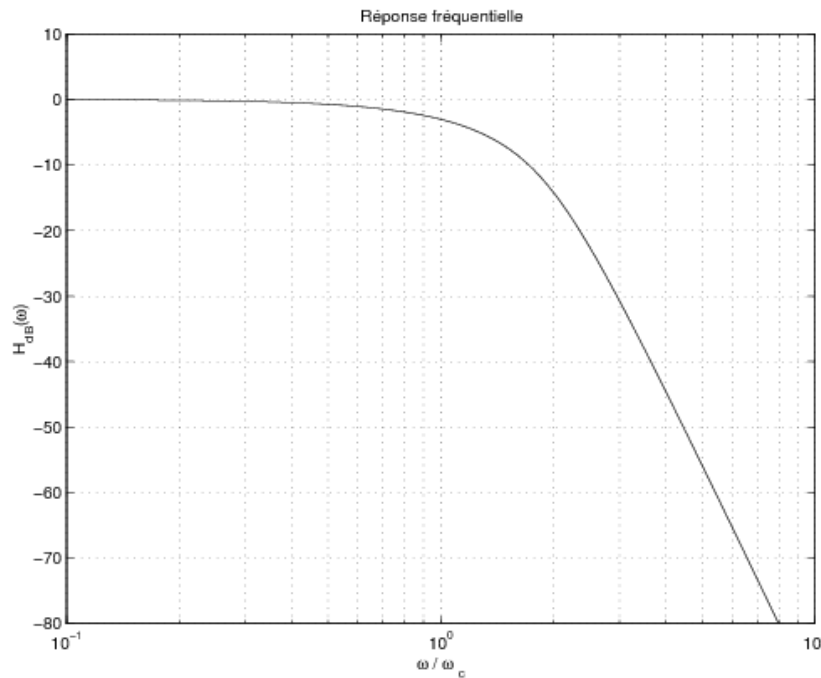


FIG. 11.20: Réponse fréquentielle d'un filtre de Bessel d'ordre 6

11.6 Largeur de bande et durée de la réponse temporelle

Lors de l'utilisation des filtres, on souhaite souvent avoir simultanément une bande passante étroite et un régime transitoire rapide. Or, cela est inconciliable. Pour le voir, considérons un filtre passe-bande dont la fonction de transfert est décrite par

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

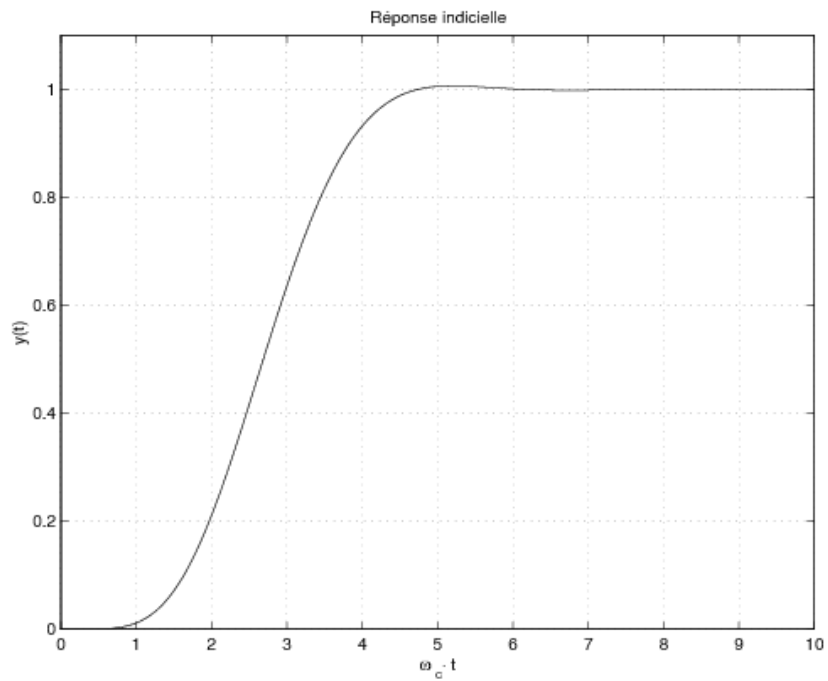


FIG. 11.21: Réponse indicielle d'un filtre de Bessel d'ordre 6

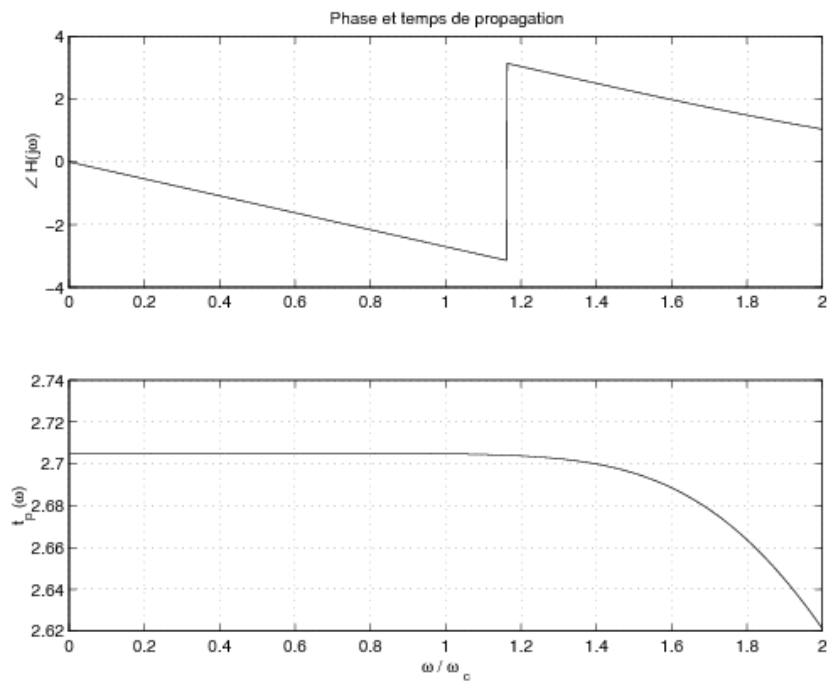


FIG. 11.22: Phase et temps de propagation d'un filtre de Bessel d'ordre 6

sa pulsation caractéristique ω_0 et son facteur de qualité Q_0 :

$$H(s) = \frac{(1/Q_0)(s/\omega_0)}{1 + (1/Q_0)(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad (11.43)$$

Sachant que le facteur de qualité et la largeur de bande sont reliés entre eux par

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (11.44)$$

la fonction de transfert du filtre passe-bande peut également s'écrire sous la forme

$$H(s) = \frac{\Delta\omega s}{s^2 + \Delta\omega s + \omega_0^2} \quad (11.45)$$

Les pôles de cette fonction de transfert valent :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{\Delta\omega}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q_0^2}\right) \end{aligned}$$

Si le filtre passe-bande est sélectif, le facteur de qualité est élevé et l'expression des pôles se simplifient pour donner :

$$p_{1,2} \simeq -\frac{\Delta\omega}{2} \pm j\omega_0 \quad (11.46)$$

La réponse transitoire du filtre est alors décrite par :

$$y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A \exp\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (11.47)$$

Ceci est une réponse oscillante amortie dont la constante de temps τ vaut $2/\Delta\omega = 1/\pi\Delta f$. Considérant que la durée du régime transitoire vaut environ 3 constantes de temps, on en tire la relation importante suivante :

$$\Delta t \simeq 3\tau = \frac{3}{\pi\Delta f} \simeq \frac{1}{\Delta f} \quad (11.48)$$

Cette relation montre que l'on ne peut pas avoir simultanément une grande sélectivité (Δf petit) et un régime transitoire court (Δt petit). Une conclusion similaire est vérifiée pour les filtres autres que passe-bande pour lesquels on ne peut pas avoir simultanément une bande de transition étroite et un temps d'établissement rapide.

11.7 Réalisations des filtres analogiques

11.7.1 Filtres normalisés

Comme on l'a déjà dit, les filtres sont représentés par des fonctions de transfert dont les numérateurs et dénominateurs sont des polynômes $P(s)$ décomposés en facteurs

simples d'ordre 1 ou 2 :

$$P_1(s) = 1 + s/\omega_1 \quad (11.49)$$

$$P_2(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (11.50)$$

Aussi, pour caractériser un filtre d'ordre quelconque, suffit-il de donner les pulsations caractéristiques et les facteurs de qualité de chaque cellule. C'est ce qui est fait pour les filtres passe-bas dans le tableau 11.5.

On notera que pour les filtres de Butterworth et Bessel, la pulsation de normalisation est la pulsation de coupure ω_c (3 dB d'atténuation). Alors que, pour les filtres de Tchebycheff, la pulsation de normalisation est celle correspondant à la bande dans laquelle on accepte une ondulation. L'amplitude r de l'ondulation admise s'exprime généralement en dB et les valeurs les plus souvent proposées sont 0.5 dB (5.9% d'ondulation) et 1.0 dB (12.2% d'ondulation).

11.7.2 Transformations d'un filtre normalisé

L'étude des filtres est basée sur la connaissance approfondie des filtres passe-bas. C'est donc à partir des caractéristiques des filtres passe-bas que l'on construit celles des filtres de type passe-haut, passe-bande ou réjecteur de bande.

On vérifie aisément que le passage d'une cellule passe-bas d'ordre 1 à une cellule de nature différente se fait par les changements de variable donnés dans le tableau 11.6.

La transformation passe-bas vers passe-haut est aisée alors que les deux autres sont fastidieuses et source d'erreurs. Aussi, dans le cas de filtres passe-bande et coupe-bande, vaut-il mieux utiliser un outil tel que Matlab qui permet d'obtenir directement les polynômes de réalisation.

Il est important de noter que, partant d'un passe-bas d'ordre n , le filtre équivalent passe-bande ou coupe-bande sera d'ordre $2n$. La démarche permettant de passer d'un filtre à un autre est présentée en détail dans [3].

11.7.3 Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Comme tout filtre peut être réalisé à partir de cellules d'ordre 1 ou 2 décrites par leur facteur de qualité et pulsation caractéristique, on voit qu'il suffit de connaître les circuits de base d'ordre 1 ou 2 pour réaliser n'importe quel filtre d'ordre n .

Ces circuits utilisent un amplificateur suiveur (à gain unité) et une réaction positive. Ils permettent ainsi de réaliser des filtres à gain fixe de type passe-bas, passe-haut et passe-bande. Leurs schémas sont présentés dans la figure 11.23.

11.7 Réalisations des filtres analogiques

Ordre	Cellules	Btw ⁽¹⁾	Bessel		Tchb. 0.5 dB		Tchb. 1 dB	
		Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_c}$	Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_{0.5dB}}$	Q_k	$\frac{\omega_k}{\omega_{1dB}}$	Q_k
1	1		1.000		2.8628		1.9652	
2	1	0.7071	1.2723	0.5774	1.2313	0.8637	1.0500	0.9565
3	1		1.3225		0.6265		0.4942	
	2	1.0000	1.4474	0.6910	1.0689	1.7062	0.9971	2.0177
4	1	0.5412	1.4310	0.5219	0.5970	0.7051	0.5286	0.7845
	2	1.3066	1.6043	0.8055	1.0313	2.9406	0.9932	3.5590
5	1		1.5015		0.3623		0.2895	
	2	0.6180	1.5555	0.5635	0.6905	1.1778	0.6552	1.3988
	3	1.6180	1.7545	0.9165	1.0177	4.5450	0.9941	5.5564
6	1	0.5176	1.6030	0.5103	0.3962	0.6836	0.3531	0.7609
	2	0.7071	1.6882	0.6112	0.7681	1.8104	0.7468	2.1980
	3	1.9319	1.9037	1.0233	1.0114	6.5128	0.9954	8.0037
7	1		1.6840		0.2562		0.2054	
	2	0.5550	1.7160	0.5324	0.5039	1.0916	0.4801	1.2969
	3	0.8019	1.8221	0.6608	0.8227	2.5755	0.8084	3.1559
	4	2.2470	2.0491	1.1263	1.0080	8.8418	0.9963	10.8987
8	1	0.5098	1.7772	0.5060	0.2967	0.6766	0.2651	0.7530
	2	0.6013	1.8308	0.5596	0.5989	1.6107	0.5828	1.9565
	3	0.8999	1.9518	0.7109	0.8610	3.4657	0.8506	4.2661
	4	2.5629	2.1872	1.2257	1.0059	11.5308	0.9971	14.2405
9	1		1.8570		0.1984		0.1593	
	2	0.5321	1.8788	0.5197	0.3954	1.0664	0.3773	1.2600
	3	0.6527	1.9483	0.5895	0.6727	2.2131	0.6622	2.7129
	4	1.000	2.0808	0.7606	0.8885	4.4780	0.8806	5.5266
	5	2.8794	2.3228	1.3219	1.0046	14.5793	0.9976	18.0286
10	1	0.5062	1.9412	0.5039	0.2372	0.6734	0.2121	0.7495
	2	0.5612	1.9790	0.5376	0.4878	1.5347	0.4761	1.8645
	3	0.7071	2.0606	0.6205	0.7293	2.8913	0.7215	3.5605
	4	1.1013	2.2021	0.8098	0.9087	5.6114	0.9025	6.9367
	5	3.1962	2.4487	1.4153	1.0037	17.9871	0.9980	22.2630
⁽¹⁾ Pour toutes les cellules des filtres de Butterworth, on a $\omega_k/\omega_c = 1$								

TAB. 11.5: Pulsations et facteurs de qualité des filtres normalisés

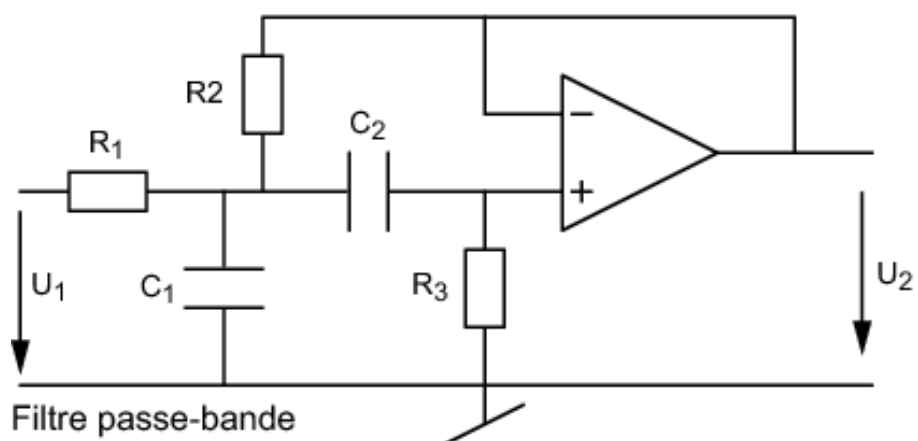
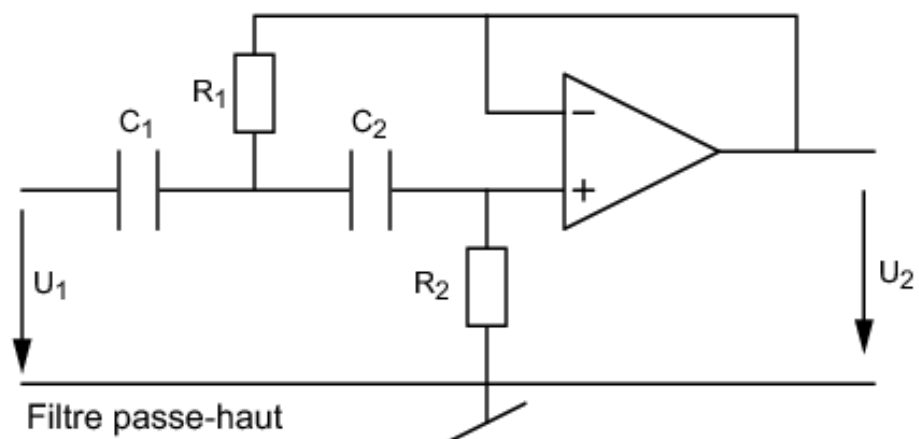
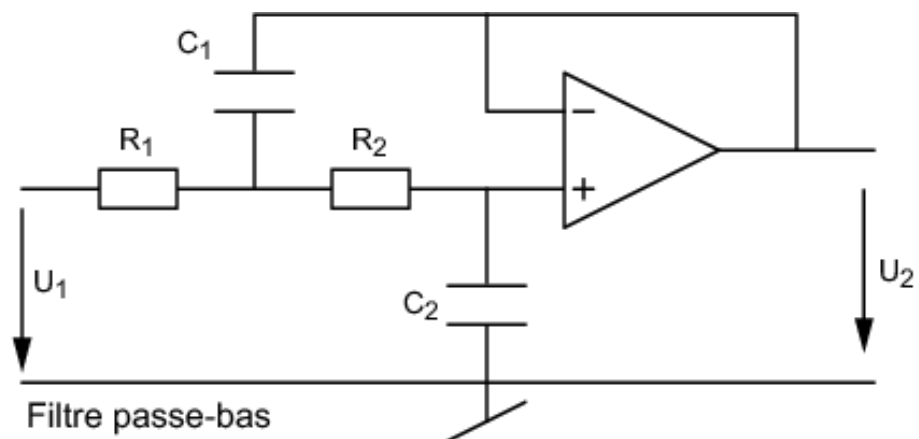


FIG. 11.23: Circuits de Sallen et Key à gain fixe

Filtre désiré	Caractéristiques	Variable
passé-bas	ω_k	s/ω_k
passé-haut	ω_k	ω_k/s
passé-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i \omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{s/\omega_0 + \omega_0/s}{B_0}$
coupe-bande	$\omega_0 = \sqrt{\omega_i \omega_s}$ $B_0 = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0}$	$\frac{B_0}{s/\omega_0 + \omega_0/s}$

TAB. 11.6: Transformations d'un filtre normalisé

Filtres passe-bas et passe-haut

Les fonctions de transfert des filtres passe-bas et passe-haut sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{1 + C_2(R_1 + R_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (11.51)$$

$$H_{PH}(s) = \frac{C_1C_2R_1R_2s^2}{1 + R_1(C_1 + C_2)s + C_1C_2R_1R_2s^2} \quad (11.52)$$

Par identification des termes de la forme canonique avec ceux des fonctions de transfert, on montre aisément les résultats suivants :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2} \quad (11.53)$$

$$Q_{0,PB} = \sqrt{\frac{C_1R_1R_2}{C_2(R_1 + R_2)^2}} \quad (11.54)$$

$$Q_{0,PH} = \sqrt{\frac{R_2C_1C_2}{R_1(C_1 + C_2)^2}} \quad (11.55)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Afin que le facteur de qualité puisse être supérieur à 0.5, on prendra :

1. pour le filtre passe-bas :

$$R_1 = R_2 = R \quad (11.56)$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (11.57)$$

$$C_2 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 R} \quad C_1 = 4Q_0^2 C_2 \quad (11.58)$$

2. pour le filtre passe-haut :

$$C_1 = C_2 = C \quad (11.59)$$

d'où

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \quad (11.60)$$

$$R_1 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 C} \quad R_2 = 4Q_0^2 R_1 \quad (11.61)$$

Filtre passe-bande

La fonction de transfert du filtre passe-bande de la figure 11.23 est décrite par :

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{C_2 R_3 s}{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1(C_1 + C_2) + R_3 C_2) s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} C_1 C_2 R_1 R_3 s^2} \quad (11.62)$$

En choisissant $C_1 = C_2 = C$ et $R_1 = R_3 = R$, on obtient

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{R_2}{R + R_2} \frac{CRs}{1 + 3\frac{R_2}{R+R_2}CRs + \frac{R_2}{R+R_2}C^2R^2s^2} \quad (11.63)$$

En identifiant les termes de $H_{P\Delta}(s)$ avec ceux de la forme canonique

$$H_{P\Delta}(s) = A_0 \frac{\frac{1}{Q_0\omega_0} s}{1 + \frac{1}{Q_0\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$$

on montre aisément les résultats suivants :

$$A_0 \equiv H_{P\Delta}(j\omega_0) = \frac{1}{3} \quad (11.64)$$

$$\omega_0^2 = \left(1 + \frac{R}{R_2}\right) \frac{1}{C^2 R^2} \quad (11.65)$$

$$Q_0 = \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \quad (11.66)$$

Après avoir librement choisi la valeur de R_2 , on voit que les équations ci-dessus nous permettent de calculer la valeur des éléments nécessaires à la réalisation d'un filtre passe-bande :

$$R = R_2 (9Q_0^2 - 1) \quad (11.67)$$

$$C = \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \frac{1}{\omega_0 R} = \frac{3Q_0}{\omega_0 R} \quad (11.68)$$

On notera qu'à la pulsation caractéristique du filtre, le gain vaut $1/3$ et que, si nécessaire, il faudra corriger le gain global.

Remarque

Les circuits à gain fixe offrent un moyen simple de réaliser des filtres d'ordre 2. Cependant, si l'on observe les équations donnant la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q_0 , on voit que l'on ne peut pas varier l'un sans changer l'autre. De plus, le choix des valeurs normalisées pour les composants R ou C n'est pas possible. On préfère donc parfois, lorsqu'il s'agit de filtres passe-bas ou passe-haut, utiliser les circuits à gain variable.

11.7.4 Circuits de Sallen et Key à gain variable

Leurs schémas sont présentés dans la figure 11.24. On voit qu'ils ont la même structure que les circuits précédents sauf que l'amplificateur suiveur est remplacé par un amplificateur gain variable valant

$$K = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

On montre aisément que les fonctions de transfert de ces filtres sont décrites par :

$$H_{PB}(s) = K \frac{1}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.69)$$

$$H_{PH}(s) = K \frac{(sRC)^2}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.70)$$

$$H_{P\Delta}(s) = \frac{K}{3 - K} \frac{(3 - K) sRC}{1 + (3 - K) sRC + (sRC)^2} \quad (11.71)$$

L'identification des coefficients des dénominateurs avec ceux de la forme canonique

$$D(s) = 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (11.72)$$

permet de voir que l'on a les relations suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (11.73)$$

$$\frac{1}{Q_0} = 3 - K = 2 - \frac{R_4}{R_3} \quad (11.74)$$

Comme le nombre d'éléments indéterminés (4) est plus grand que le nombre d'équations (2), on doit en choisir 2 au préalable. Si, par exemple, on se donne C et R_3 , on a alors

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (11.75)$$

$$R_4 = R_3 \left(2 - \frac{1}{Q_0}\right) \quad (11.76)$$

Remarque On notera que le gain en tension des cellules passe-bas et passe-haut vaut

$$A_{U,PB} = A_{U,PH} = K = 3 - \frac{1}{Q_0} \simeq 3 \quad (11.77)$$

alors que celui du filtre passe-bande

$$A_{U,P\Delta} = \frac{K}{3 - K} = 3Q_0 - 1 \simeq 3Q_0 \quad (11.78)$$

est proportionnel au facteur de qualité ; il peut ainsi atteindre des valeurs très importantes. On préfère alors, pour ce type de filtre, utiliser la cellule à gain fixe.

11.7.5 Réalisation d'un filtre passe-bande

Donnée

On souhaite réaliser un filtre passe-bande d'ordre $n = 6$ pour lequel on accepte une ondulation $r = 1 \text{ dB}$ entre les pulsations $\omega_1 = 500 \text{ [rad/sec]}$ et $\omega_2 = 2000 \text{ [rad/sec]}$.

Solution

Ce filtre sera réalisé par 3 cellules d'ordre 2 provenant chacune de la transformation d'une cellule passe-bas d'ordre 1 en une cellule passe-bande. Cette transformation se fait par le changement de variable suivant (tableau 11.6) :

$$s \longrightarrow \frac{s/\omega_{0k} + \omega_{0k}/s}{B_k} \quad (11.79)$$

avec

$$\omega_{0k} = \sqrt{\omega_i \omega_s} \quad B_k = \frac{\omega_s - \omega_i}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{0k}} \quad (11.80)$$

On comprend bien que le calcul de cette transformation à partir du tableau des polynômes normalisés n'est pas aisée et qu'il vaut mieux utiliser un programme permettant d'obtenir directement les paramètres de chaque cellule. Le logiciel Matlab se prête particulièrement bien à cela.

Le contenu du fichier permettant de calculer le filtre désiré est donné dans la section 11.7.5. On y trouve en particulier la fonction `zpk` (zero-pole-gain) de Matlab qui affiche les résultats dans la forme de Laplace :

$$\frac{1658160052.054 \text{ s}^3}{(\text{s}^2 + 151.6\text{s} + 2.57\text{e}005)(\text{s}^2 + 741.3\text{s} + 1\text{e}006)(\text{s}^2 + 589.7\text{s} + 3.891\text{e}006)}$$

Dans la forme de Bode, la fonction de transfert du filtre passe-bande à gain unité s'écrit alors :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{01}} \frac{s}{\omega_{01}} + \left(\frac{s}{\omega_{01}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{02}} \frac{s}{\omega_{02}} + \left(\frac{s}{\omega_{02}}\right)^2\right)} \frac{\frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}}}{\left(1 + \frac{1}{Q_{03}} \frac{s}{\omega_{03}} + \left(\frac{s}{\omega_{03}}\right)^2\right)}$$

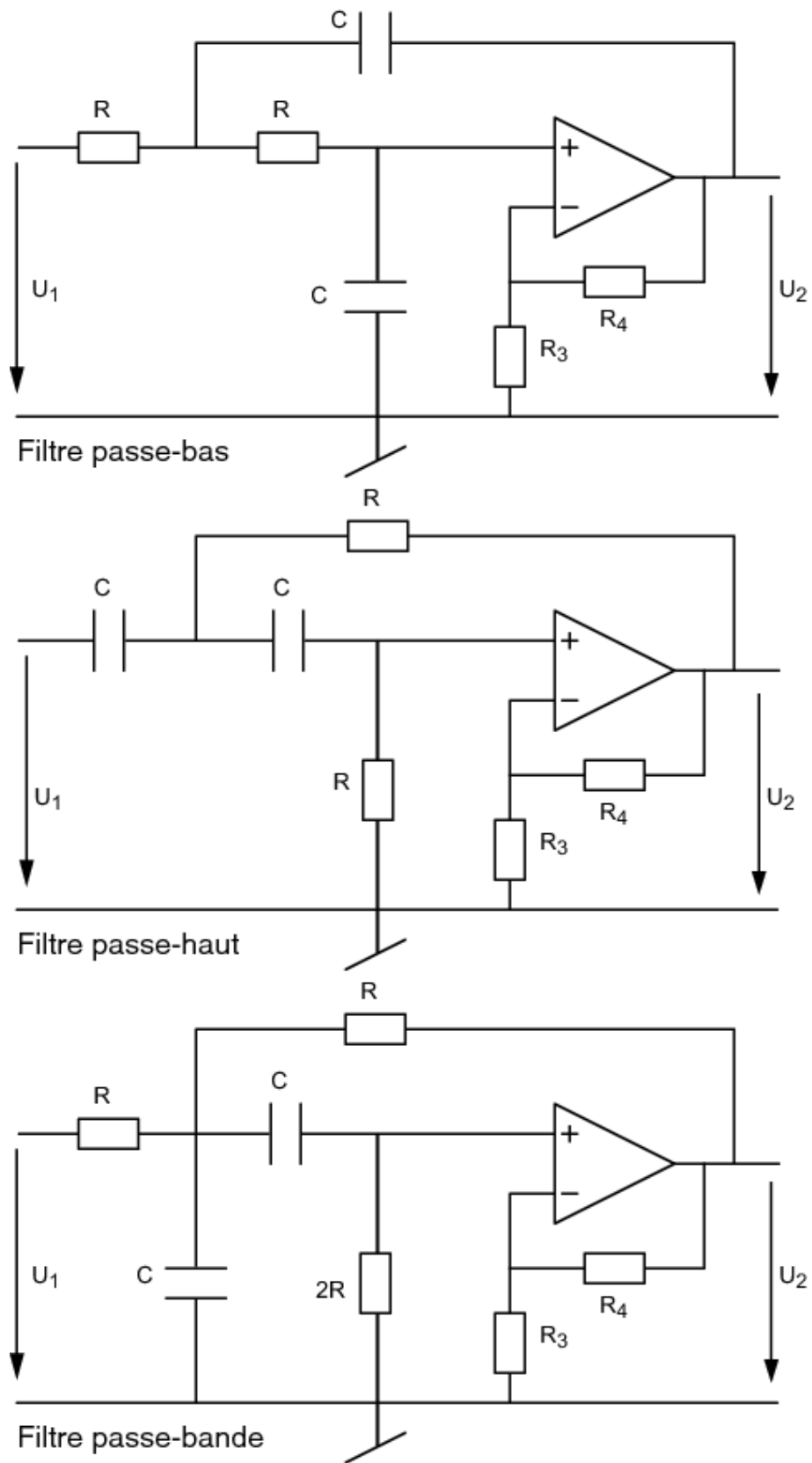


FIG. 11.24: Cellules à gain variable

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

Les paramètres de chaque cellule se calculent aisément avec la fonction `damp` qui fournit les pulsations caractéristiques et facteur d'amortissement de chaque cellule (voir fichier Matlab). On obtient alors :

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= 507 \text{ [rad/sec]} & Q_{01} &= 3.35 \\ \omega_{02} &= 1000 \text{ [rad/sec]} & Q_{02} &= 1.35 \\ \omega_{03} &= 1972 \text{ [rad/sec]} & Q_{03} &= 3.35\end{aligned}$$

À partir de ces paramètres et du choix du schéma de réalisation, on calcule aisément les valeurs des composants. Adoptant le schéma de Sallen et Key à gain fixe (figure 11.23), et, après avoir choisi $R_2 = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$, on peut calculer les valeurs des résistances et capacités de chaque cellule passe-bande (équ. (11.67) et (11.68)) :

$$R = R_2 (9 Q_0^2 - 1) = \begin{cases} 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 15.4 \text{ [k}\Omega\text{]} \\ 99.7 \text{ [k}\Omega\text{]} \end{cases}$$

$$C = \frac{3 Q_0}{\omega_0 R} = \begin{cases} 198 \text{ [nF]} \\ 263 \text{ [nF]} \\ 51 \text{ [nF]} \end{cases}$$

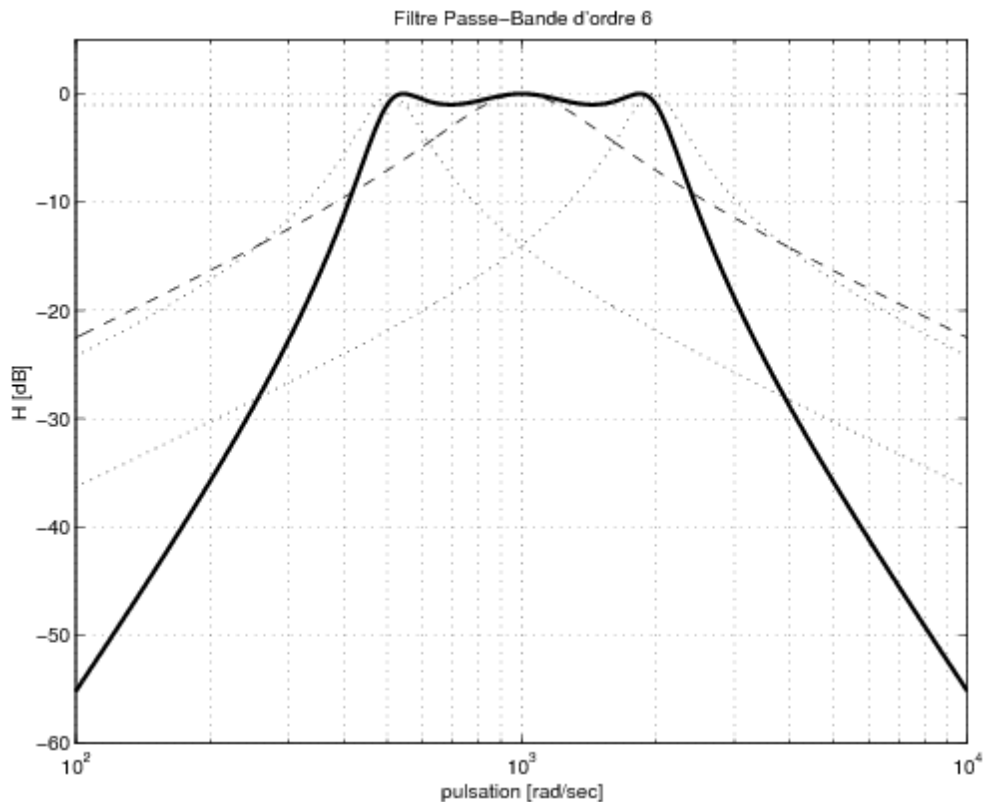


FIG. 11.25: Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande de Tchebycheff

Fichier Matlab

```

% calcul d'un filtre passe-bande
% fmy / novembre 2003
close all; clear all; format compact; format short g;

% initialisation
wdeb = 100; wfin = 10e3;
w = logspace(log10(wdeb),log10(wfin),500); % 500 points repartis logar.
wdf = [wdeb wfin];

% calcul du filtre passe-bande Tchb
w1 = 500; w2 = 2000; r = 1; n = 6;
[num den] = cheby1 (n/2, r, [w1 w2], 's');

% fonction de transfert du filtre
Gw = tf (num, den);

% calcul des facteurs de qualité et pulsation caractéristiques
zpk(Gw) % affichage de G(jw)
[wk zk] = damp(Gw); % pulsation caract. et coeff. d'amortissement
Qk = 1./(2*zk); % calcul des facteurs de qualite
Qk_wk = [Qk, wk]
Q0 = Qk(1:2:n);
w0 = wk(1:2:n);
Q0_w0 = [Q0, w0] % Q0 et w0 de chaque cellule

% affichage des resultats
% Zero/pole/gain:
%
% 1658160052.054 s^3
% -----
% (s^2 + 151.6s + 2.57e005) (s^2 + 741.3s + 1e006) (s^2 + 589.7s + 3.891e006)
%
% Qk_wk =
% 3.3449 506.98
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4
% 3.3449 1972.4
% Q0_w0 =
% 3.3449 506.98
% 1.3491 1000
% 3.3449 1972.4

% fonctions de transfert à gain unité
G1 = tf([1/Q0(1)/w0(1) 0], [1/w0(1)^2 1/Q0(1)/w0(1) 1]);
G2 = tf([1/Q0(2)/w0(2) 0], [1/w0(2)^2 1/Q0(2)/w0(2) 1]);
G3 = tf([1/Q0(3)/w0(3) 0], [1/w0(3)^2 1/Q0(3)/w0(3) 1]);
Gw = G1 * G2 * G3;

% calcul des reponses frequenielles de chaque cellule
[ampl1 phi1] = bode(G1,w);
[ampl2 phi2] = bode(G2,w);
[ampl3 phi3] = bode(G3,w);
[ampl phi] = bode(Gw,w);

```

11 ÉLÉMENTS DE FILTRAGE ANALOGIQUE

```
% transformation de l'objet ampl en un vecteur
ampl1 = ampl1(:);    ampl2 = ampl2(:);
ampl3 = ampl3(:);    ampl  = ampl(:);

% normalisation pour avoir un gain unité du filtre global
ampl = ampl/max(ampl);

% tracage
figure;
h = semilogx(w,20*log10(ampl));           % tracage de G(jw)
set(h,'LineWidth',2);                    % ligne plus epaisse
hold on;                                  % maintien de la figure courante
semilogx(wdf,-[r, r],':');               % ligne en -r [dB]
semilogx(w,20*log10(ampl1),':');         % tracage de G1(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl2), '--');      % tracage de G2(jw)
semilogx(w,20*log10(ampl3), ':');       % tracage de G3(jw)
axis([wdeb, wfin,-60, 5]); grid;         % definition des axes
title('Filtre Passe-Bande d''ordre 6'); % titre du graphe
xlabel('pulsation [rad/sec]');           % information pour l'abscisse
ylabel('H [dB]'); grid on;              % information pour l'ordonnee
hold off;                                 % liberation de la figure courante
print pbande_tch6.eps -deps              % sauvegarde dans un fichier .eps

% calcul des composants avec ampli à gain unité
% R1 = R3 = R et C1 = C2 = C, R2 libre
R2 = 1000
R = R2*(9*Q0.^2 - 1);
C = 3*Q0./R./w0;
Rk_Ck = [R, C]

% affichage des valeurs des composants
% R2 =
%    1000
% Rk_Ck =
%      99696  1.9853e-007
%      15380  2.6315e-007
%      99696  5.103e-008
```

11.8 Exercices

FA 1 On souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas de Butterworth satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned} 0 \text{ dB} \geq H_p(3 \text{ kHz}) &\geq -0.2 \text{ dB} \\ H_a(10 \text{ kHz}) &\leq -40 \text{ dB} \end{aligned}$$

Pour ce faire :

1. calculez l'ordre du filtre et la fréquence de coupure du filtre ;
2. que valent le facteur de qualité et la fréquence de coupure de chaque cellule ;

3. calculez la fonction de transfert $H(s)$ du filtre ;
4. pour chaque cellule, esquissez $H_{dB}(f)$ puis, justifiez l'allure de H_{tot} ;
5. pourquoi recommande-t-on de placer les cellules dans l'ordre croissant des facteurs de qualité ?

FA 2 Réalisez le filtre que vous venez de calculer. Pour ce faire :

1. choisissez le schéma de réalisation du filtre permettant d'utiliser des valeurs normalisées pour les capacités ;
2. calculez les éléments constitutifs du filtre ;
3. que faites-vous pour obtenir un gain global unité ?

FA 3 Vérifiez que pour les filtres de Butterworth le produit des facteurs de qualité vaut 1 si l'ordre est impair et $\sqrt{2}$ si l'ordre est pair. Comment justifiez-vous ce résultat ?

FA 4 Calculez le temps de propagation d'un filtre de Bessel d'ordre 5 dont la fréquence de coupure vaut $f_c = 1 [kHz]$. Réponse : $t_p = 386 \mu s$

FA 5 On veut réaliser un filtre passe-bas de Tchebicheff satisfaisant au gabarit suivant :

$$\begin{aligned} H_r(1 kHz) &= 0.5 dB \\ H_a(2 kHz) &\leq -50 dB \end{aligned}$$

1. calculez l'ordre du filtre et sa fréquence de coupure ;
2. calculez le facteur de qualité et la fréquence caractéristique de chaque cellule ;
3. l'ondulation de la réponse fréquentielle du filtre sera-t-elle au-dessus ou au-dessous du niveau 0 dB ?
4. pour chaque cellule, esquissez $H_{dB}(f)$; justifiez l'allure de H_{tot} .

FA 6 On vous remet le schéma d'un filtre passe-bas constitué de trois cellules de Sallen et Key à gain unité dans lequel toutes les résistances valent $10 k\Omega$ alors que les capacités des 3 cellules valent respectivement

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0.41 \mu F & C_{12} &= 0.38 \mu F \\ C_{21} &= 0.56 \mu F & C_{22} &= 0.28 \mu F \\ C_{31} &= 1.54 \mu F & C_{32} &= 0.10 \mu F \end{aligned}$$

Trouvez le type de filtre ainsi réalisé et sa fréquence de coupure.

FA 7

1. Considérant un filtre passe-bas d'ordre 2

$$H_b(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta (s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta = 0.1 \\ \omega_0 = 10^3 [\text{rad/sec}] \end{cases}$$

- calculez son équivalent passe-haut ;
- tracez les diagrammes de Bode asymptotiques des deux filtres ;
- répétez les points 1) et 2) pour un filtre passe-bande ;
- vérifiez vos résultats avec Matlab.

FA 8 Partant d'un polynôme normalisé d'ordre 1, utilisez les transformations correspondantes pour trouver les fonctions de transfert

1. d'un filtre passe-haut de pulsation $\omega_c = 10^3 [\text{rad/sec}]$;
2. d'un filtre passe-bande tel que $Q_0 = 1$ et $\omega_0 = 10^3 [\text{rad/sec}]$; que vaudra la largeur de bande d'un tel filtre ?
3. d'un filtre réjecteur de bande tel que $Q_0 = 10$ et $\omega_0 = 10^3 [\text{rad/sec}]$; que vaudront la largeur de bande d'un tel filtre et l'atténuation obtenue pour $\omega = \omega_0$?

Bibliographie

- [1] J.G. Proakis, D.G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, Maxwell MacMillan, 1992
- [2] M.E. van Valkenburg, *Analog Filter Design*, Saunders College Publishing, 1982
- [3] B.P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Berkeley Cambridge Press, 1998
- [4] P. Bildstein, *Filtres actifs*, Editions Radio, 1976.