

12 Synthèse des filtres récursifs

12.1 Classification des systèmes numériques

Les systèmes numériques linéaires sont généralement décrits par une équation aux différences qui peut être récursive ou non. Dans l'étude des filtres numériques linéaires, on distingue donc deux approches : la synthèse des filtres non récursifs et celle des filtres récursifs.

12.1.1 Systèmes non récursifs (dits RIF, FIR ou MA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal non récursif d'ordre N se calcule uniquement à partir du signal d'entrée $x[n]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1a.

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_N x[n-N] \quad (12.1)$$

On peut remarquer que sa réponse impulsionnelle correspond aux coefficients b_k ; elle est donc de longueur finie N . Ainsi le calcul de $y[n]$ revient-il à convoluer le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle $h[k] \equiv b_k$ du système linéaire. On peut également observer que ce système effectue une pondération des valeurs du signal d'entrée et que cela correspond à une moyenne glissante (moving average).

Ces systèmes sont donc désignés avec l'acronyme *RIF* (Réponse Impulsionnelle Finie) ou *FIR* (Finite Impulse Response) ou *MA* (Moving Average) et leur fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N} \quad (12.2)$$

De par leur structure, les systèmes FIR sont toujours stables, mais ils demandent passablement de temps de calcul car la longueur de la réponse impulsionnelle d'un tel système est généralement très élevée ($N > 100$).

12.1.2 Systèmes récursifs (dits RII, IIR ou ARMA)

La réponse $y[n]$ d'un système causal récursif d'ordre N se calcule à partir du signal d'entrée $x[n]$ et des valeurs précédentes de la sortie $y[n-k]$. Son équation aux différences est rappelée ci-dessous et sa représentation fonctionnelle est donnée à la figure 12.1b.

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (12.3)$$

On peut remarquer que ces systèmes ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leur fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (12.4)$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette fonction de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie *RII* ou *IIR* (Infinite Impulse Response) ou Auto Régressive (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (Moving Average MA). D'où l'appellation *ARMA* (Auto Regressive and Moving Average).

Généralement, l'ordre d'un système IIR est peu élevé ($N = 1 \dots 10$) et il est réalisé en plaçant en série des cellules biquadratiques (cellules IIR d'ordre 2). Il est donc très efficace en temps de calcul mais, de par sa structure récursive, il peut devenir instable.

12.1.3 Caractéristiques des filtres FIR et IIR

Les qualités (indiquées en gras) et les défauts des filtres FIR et IIR sont présentés dans le tableau de la figure 12.1.

12.2 Réponse fréquentielle d'un filtre numérique

Avant de considérer la synthèse d'un filtre numérique, rappelons que celui-ci est décrit par sa fonction de transfert en z qui peut s'écrire sous deux formes équivalentes

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (12.5)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (12.6)$$

La première forme sert essentiellement à l'analyse des performances du filtre (recherche des pôles et zéros), alors que de la deuxième on tire immédiatement l'équation aux différences qui servira à réaliser le filtre :

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots \\ - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots$$

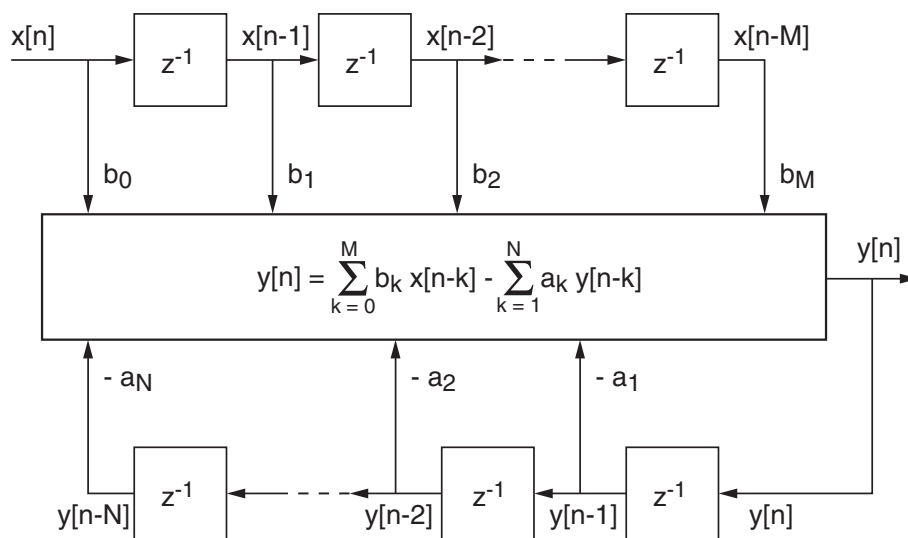
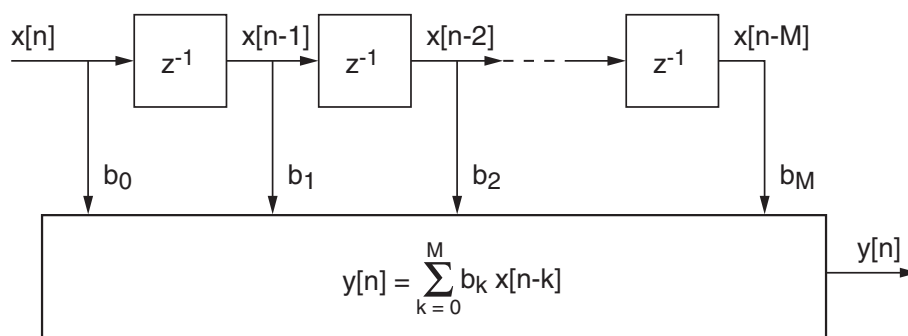
Si l'on souhaite connaître la réponse fréquentielle d'un filtre, il suffit de remplacer l'opérateur de retard z^{-1} par sa transformée de Fourier

$$z^{-1} \Leftrightarrow \exp(-j\omega T_e) \equiv \exp(-j\Omega) \quad (12.7)$$

où Ω est la pulsation numérique ou normalisée qui se mesure en [rad/échantillon]. On obtient alors

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 \exp(-j\Omega) + \dots + b_n \exp(-jn\Omega)}{1 + a_1 \exp(-j\Omega) + \dots + a_n \exp(-jn\Omega)} \quad (12.8)$$

12.2 Réponse fréquentielle d'un filtre numérique



Caractéristiques	Filtres FIR ou MA	Filtres IIR ou ARMA
sélectivité	faible	élevée
ordre	élevé	faible
nombre d'opérations	élevé	faible
mémoire nécessaire	élevée	faible
temps de propagation constant (phase linéaire)	naturel	impossible au sens strict
stabilité	absolue	limitée
nombre de bits nécessaires	raisonnable	élevé
précision des coefficients	raisonnable	élevée
cycles limites	aucun	présents mais éliminables
filtres adaptatifs	possibles	difficiles

FIG. 12.1: Schémas fonctionnels et caractéristiques des filtres FIR et IIR

Comme l'exponentielle imaginaire est périodique, la réponse fréquentielle d'un filtre numérique est également périodique de période f_e et sa représentation se fait dans le domaine de fréquences allant de 0 à $f_e/2$ (ou f_e). Si l'on considère la pulsation numérique Ω , la représentation se fait alors de 0 à π (ou 2π).

On notera que les valeurs particulières de $H(0)$ (composante DC) ou $H(\pi)$ (fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2$) se calculent aisément et qu'elles valent :

$$H(j0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}{1 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

$$H(j\pi) = \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots + b_n}{1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n}$$

Exemple Considérons un filtre passe-bas résonant d'ordre 2 décrit par

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.81z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - 1.7z + 0.81}$$

On en tire immédiatement deux valeurs particulières de la réponse fréquentielle : la composante DC ($z = 1$) et celle à la fréquence de Nyquist $f_e/2$ ($z = -1$) :

$$H(j0) = \frac{1}{1 - 1.7 + 0.81} = +9.091$$

$$H(j\pi) = \frac{-1}{1 + 1.7 + 0.81} = -0.285$$

En remplaçant l'opérateur de retard z^{-1} par son équivalent fréquentiel $\exp(-j\Omega)$, on peut calculer la réponse fréquentielle du filtre $H(j\Omega)$ qui s'écrit

$$H(j\Omega) = \frac{\exp(-j\Omega)}{1 - 1.7 \exp(-j\Omega) + 0.81 \exp(-j2\Omega)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{\cos(\Omega) - j \sin(\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + j 1.7 \sin(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega) - j 0.81 \sin(2\Omega)}$$

De cette fonction complexe, on tire facilement le module et l'argument de $H(j\Omega)$:

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega))^2 + (1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega))^2}}$$

$$\angle H(j\Omega) = -\Omega - \arctan\left(\frac{1.7 \sin(\Omega) - 0.81 \sin(2\Omega)}{1 - 1.7 \cos(\Omega) + 0.81 \cos(2\Omega)}\right)$$

La figure 12.2 présente les réponses temporelles (impulsionnelle et indicielle) et fréquentielles (module et argument) de ce filtre.

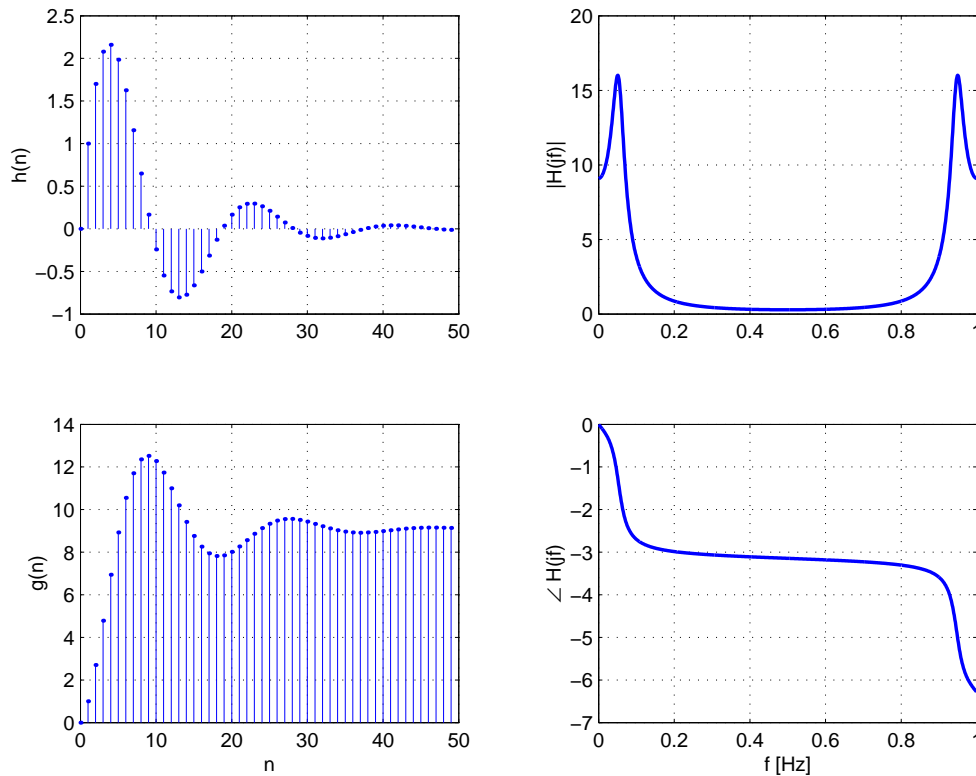


FIG. 12.2: Réponses temporelles et fréquentielles d'un filtre numérique passe-bas

12.3 Le problème de l'approximation

La synthèse des filtres numériques consiste à rechercher les coefficients a_k et b_k de la fonction de transfert $H(z)$ de manière à ce que la réponse harmonique du filtre satisfasse au cahier des charges fixé au préalable. Cette synthèse peut être basée sur les connaissances que l'on a de la réponse des filtres analogiques ou sur des méthodes spécifiques aux filtres numériques. Dans ce qui suit, on se contentera, partant des filtres analogiques, de rechercher des filtres numériques au comportement similaire.

Sachant que le comportement fréquentiel des filtres analogiques est complètement déterminé par la donnée de la fonction de transfert $H(s)$,

$$H(s) = \frac{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_ns^n}{c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ns^n} \quad (12.9)$$

on cherche à obtenir le même type de réponse fréquentielle avec des filtres numériques décrits par

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (12.10)$$

Comme les correspondances que l'on établira entre s et z conduisent toutes à des approximations des réponses temporelle et fréquentielle analogiques, on peut imaginer un grand nombre de transformations possibles. Parmi celles-ci, il en est deux que l'on rencontre fréquemment et qui seules sont présentées ici : la *transformation associée* et la *transformation bilinéaire*.

12.4 La transformation associée

Cette transformation associe les pôles et zéros de $H(z)$ à ceux de $H(s)$. Autrement dit, connaissant la position des pôles et zéros du filtre analogique situés dans le demi-plan complexe, on construit un filtre numérique ayant les pôles et zéros correspondants situés dans un cercle de rayon unité (figure 12.3).

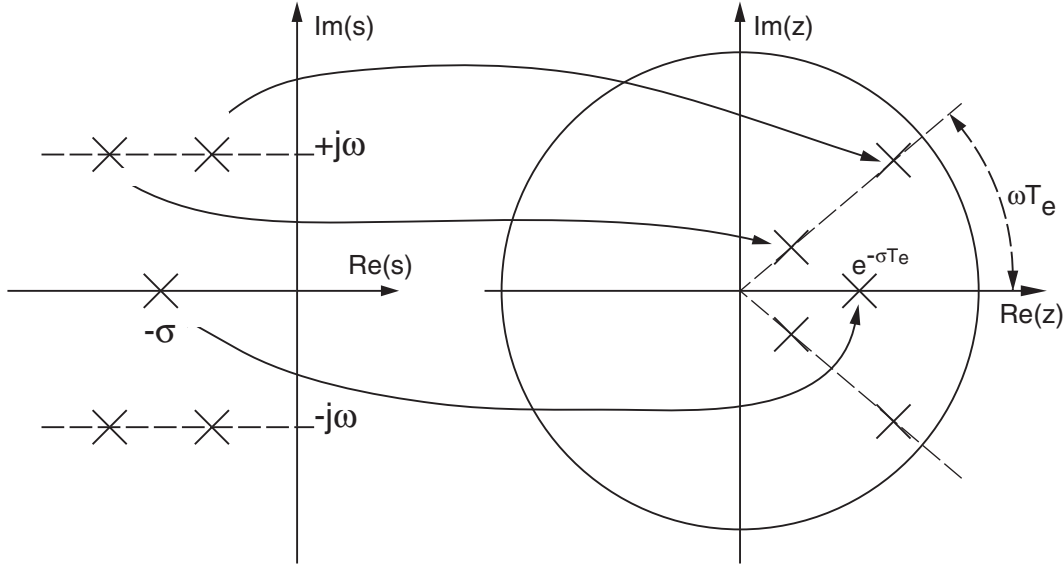


FIG. 12.3: Position des pôles analogiques et des pôles numériques

Sachant que la variable z représente un décalage temporel d'une période d'échantillonnage T_e , on a

$$z = \exp(s T_e) \quad (12.11)$$

On en déduit alors que la variable s peut simplement être remplacée par la fonction

$$s = \frac{1}{T_e} \ln(z) \quad (12.12)$$

qui, à une racine analogique r_a , fait correspondre une racine numérique r_n telle que

$$r_n = \exp(r_a T_e) \quad (12.13)$$

De manière équivalente, cette approche revient à relier les polynômes analogiques $P_a(s)$ aux polynômes numériques $P_n(z)$.

Considérant que tout filtre est représenté fondamentalement par des polynômes d'ordre 1 et 2, on peut se contenter d'analyser les deux situations suivantes.

1. À un polynôme analogique d'ordre 1 et sa racine r_a

$$P_{a1}(s) = 1 + s/\omega_c \quad \Rightarrow \quad r_a = -\omega_c \quad (12.14)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 1

$$P_{n1}(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec} \quad (12.15)$$

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) \quad (12.16)$$

2. À un polynôme analogique d'ordre 2 et ses racines $r_{a1,2}$

$$P_{c2}(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 \quad \Rightarrow \quad r_{a1,2} = -\sigma \pm j\omega_0 \quad (12.17)$$

correspond un polynôme numérique d'ordre 2

$$P_{n2}(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0)z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec} \quad (12.18)$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e \quad (12.19)$$

Une fois les correspondances polynomiales obtenues, il reste à ajuster le gain de $H(z)$ afin que, pour une fréquence donnée, on ait la même amplitude de la réponse fréquentielle en numérique qu'en analogique.

12.4.1 Exemple de transformation associée

Considérant un filtre analogique passe-bas de Butterworth d'ordre 3 ayant sa fréquence de coupure en $f_c = 1 \text{ kHz}$ (figure 12.4), on désire réaliser un filtre numérique au comportement similaire sachant que l'on a choisi une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ de 10 kHz.

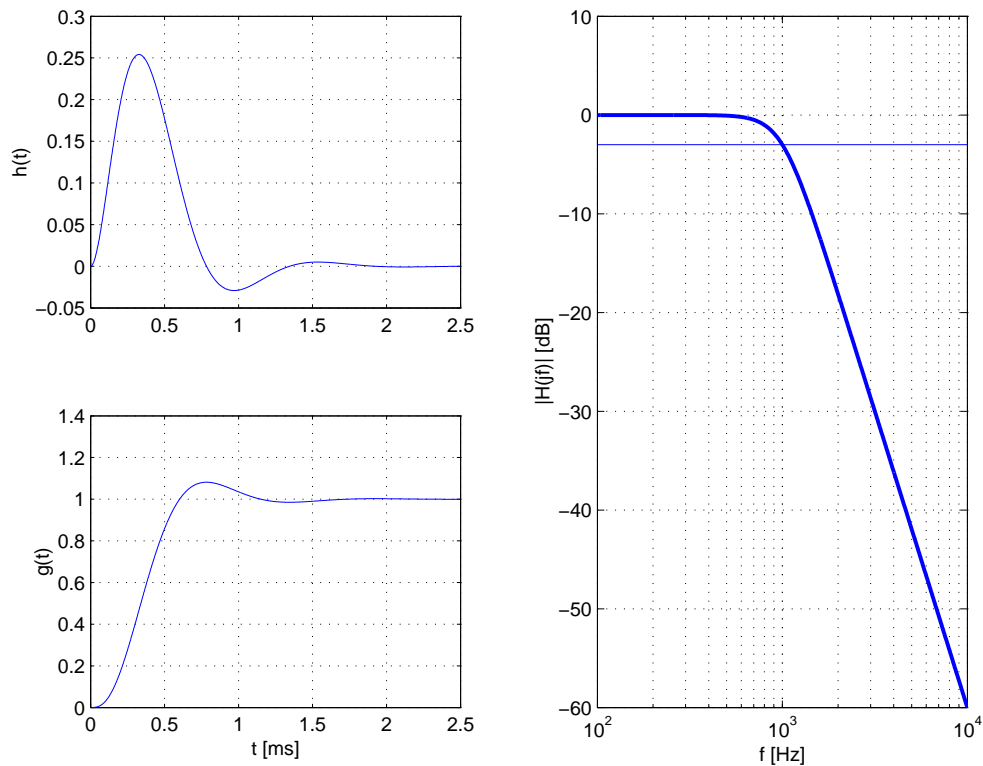


FIG. 12.4: Réponses d'un filtre analogique passe-bas de Butterworth

Solution On sait qu'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3 est décrit par une cellule d'ordre 1 suivie d'une cellule d'ordre 2 telles que

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c) (1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)} \quad (12.20)$$

On en déduit que les pôles de ce filtre analogique valent

$$p_{a1} = -\omega_c = -2000 \pi$$

$$p_{a2,3} = -\omega_c \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) / 2 = -1000 \pi \left(1 \pm j\sqrt{3}\right) \equiv -\sigma \pm j\omega_0$$

Tenant compte des équations (12.16) et (12.19), il vient :

1. un polynôme numérique d'ordre 1 :

$$P_1(z) = 1 + a_1 z^{-1} \quad \text{avec}$$

$$a_1 = -\exp(-\omega_c T_e) = -0.5335$$

d'où

$$P_1(z) = 1 - 0.5335 z^{-1} \quad (12.21)$$

2. un polynôme numérique d'ordre 2 :

$$P_2(z) = 1 - 2R \cos(\Omega_0) z^{-1} + R^2 z^{-2} \quad \text{avec}$$

$$R = \exp(-\sigma T_e) = \exp(-\pi/10) = 0.730 \quad \Omega_0 = \omega_0 T_e = \pi\sqrt{3}/10 = 0.544$$

d'où

$$P_2(z) = 1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2} \quad (12.22)$$

Ces deux polynômes décrivent la fonction de transfert du filtre passe-bas numérique dont les gains G_1 et G_2 sont inconnus :

$$H(z) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{G_2}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

Il reste donc à adapter les gains de chaque cellule du filtre de manière à ce que l'amplitude du filtre numérique soit la même que celle du filtre analogique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit ici d'un filtre passe-bas, c'est le comportement DC des filtres qui doit être identique. Sachant que les valeurs DC des réponses analogique et numérique sont obtenues pour $s = 0$ et, respectivement, $z = 1$, il vient :

$$H(s \rightarrow 0) = 1$$

$$H(z \rightarrow 1) = \frac{G_1}{(1 - 0.5335)} \frac{G_2}{(1 - 1.25 + 0.5335)} = \frac{G_1}{0.4665} \frac{G_2}{0.2835} = H(s \rightarrow 0) = 1$$

En choisissant $G_1 = 0.4665$ et $G_2 = 0.2835$, on obtient la fonction de transfert recherchée qui s'écrit dans l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})}$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z^2}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)}$$

Remarque On notera que l'égalité des ordres du numérateur et dénominateur conduit le filtre à répondre instantanément à l'excitation. Cette situation peu réaliste, en particulier pour un filtre passe-bas, nous incite à ajouter un retard unitaire z^{-1} à $H(z)$. Les fonctions de transfert s'écrivent alors dans l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$H(z) = \frac{0.4665}{(1 - 0.5335 z^{-1})} \frac{0.2835}{(1 - 1.25 z^{-1} + 0.5335 z^{-2})} z^{-1} \quad (12.23)$$

$$H(z) = \frac{0.4665 z}{(z - 0.5335)} \frac{0.2835 z}{(z^2 - 1.25 z + 0.5335)} \quad (12.24)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 12.5 où on les compare avec celles du filtre analogique.

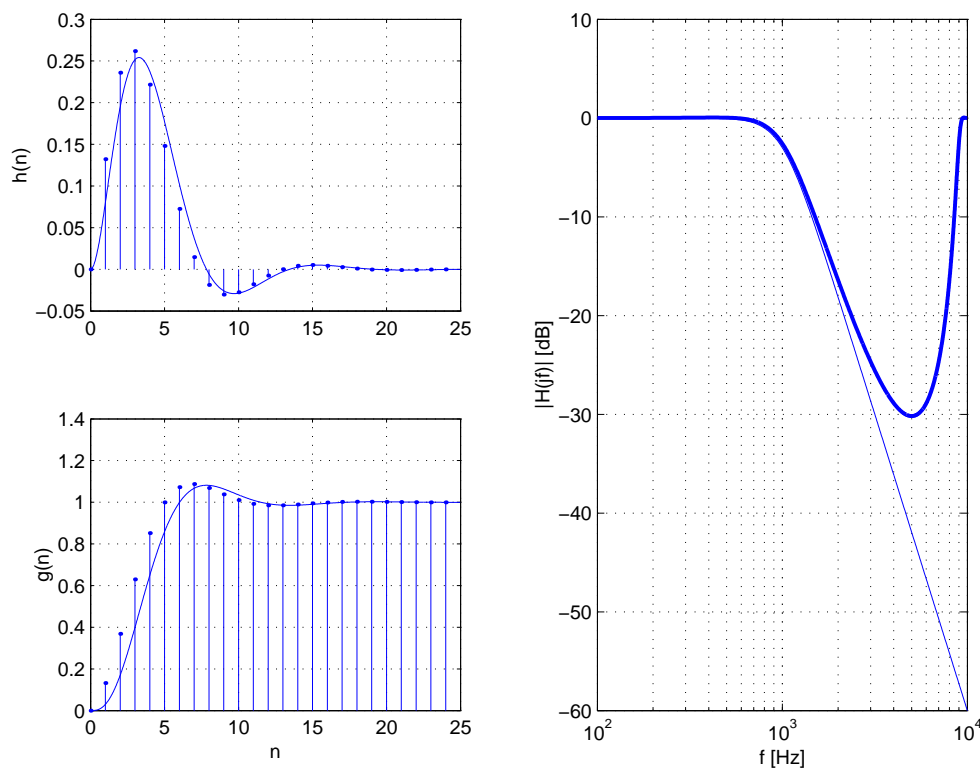


FIG. 12.5: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation associée

12.4.2 Modification de la transformation associée

En observant la réponse fréquentielle du filtre numérique, on remarquera que son atténuation à la fréquence de Nyquist ne dépasse pas 30 dB environ. Ceci représente un des inconvénients majeurs de la méthode. On peut pallier ce défaut en remplaçant les zéros de la fonction de transfert qui se situent en $z = 0$ par des zéros situés en $z = -1$. Comme le gain introduit par chaque nouveau zéro est égal à deux, il ne

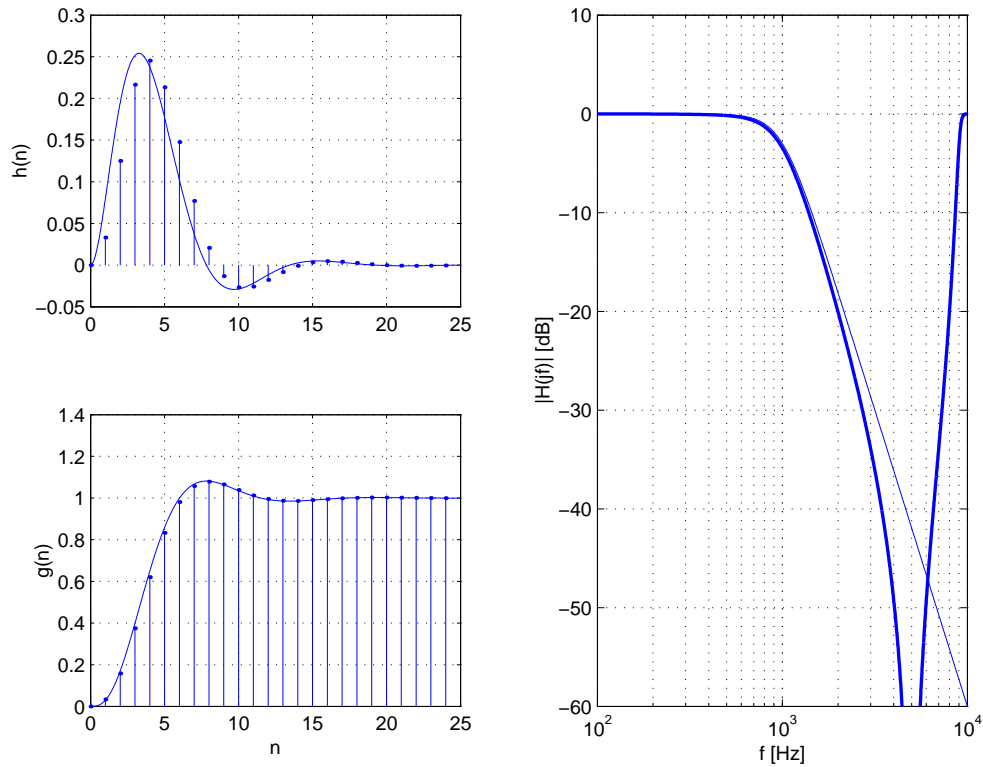


FIG. 12.6: Réponses d'un filtre numérique obtenu par modification de la transformation associée

faut pas oublier de réduire d'autant le gain global. La nouvelle fonction de transfert s'écrit alors

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665(z+1)}{(z-0.5335)} \frac{0.2835(z+1)}{(z^2 - 1.25z + 0.5335)} \quad (12.25)$$

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{0.4665(1+z^{-1})}{(1-0.5335z^{-1})} \frac{0.2835(1+z^{-1})}{(1-1.25z^{-1}+0.5335z^{-2})} z^{-1} \quad (12.26)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle du filtre obtenu par la modification de la transformation associée sont représentées dans la figure 12.6 où on les compare avec celles du filtre analogique.

12.5 La transformation bilinéaire

12.5.1 Introduction

Le but de la transformation bilinéaire est de trouver une équation aux différences du filtre $H(z)$ dont la solution est proche de celle de l'équation différentielle du filtre analogique $H(s)$, solution que l'on obtient par intégration. Parmi les différentes méthodes numériques d'intégration, il en est une qui offre un bon compromis entre la qualité des résultats et la facilité de mise en oeuvre ; il s'agit de l'intégration

trapézoïdale. Celle-ci revient à remplacer l'intégrale

$$y(t) = \int_0^t x(t)dt = \int_0^{t-T_e} x(t)dt + \int_{t-T_e}^t x(t)dt$$

par l'opération suivante

$$y[n] = y[n-1] + \frac{(x[n] + x[n-1])}{2} T_e$$

On montre alors aisément que cela revient à remplacer la variable s par une fonction bilinéaire en z

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{T_e} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (12.27)$$

Remarque Si l'on se souvient que l'on a

$$z = e^{sT_e} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T_e} \ln(z)$$

il est intéressant de relever que la transformation bilinéaire revient à ne conserver que le premier terme du développement en série de la fonction logarithme naturel

$$\ln(z) = 2 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \dots$$

12.5.2 Transformation bilinéaire d'une fonction de transfert

Comme tout filtre est représenté par des produits de polynômes d'ordre 1 et 2, on se contente d'analyser les deux situations suivantes dans lesquelles on remplacera la variable s par la fonction

$$s \rightarrow \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2}{T_e} \quad (12.28)$$

Polynôme d'ordre 1 Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a1}(s) = a_0 + a_1 s \quad (12.29)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 1

$$\begin{aligned} F_1(z) &= a_0 + a_1 \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\ &= \frac{(a_0 + a_1 \gamma) + (a_0 - a_1 \gamma) z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_1(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12.30)$$

$$\text{avec} \quad q_0 = a_0 + a_1 \gamma \quad (12.31)$$

$$q_1 = a_0 - a_1 \gamma \quad (12.32)$$

Polynôme d'ordre 2 Dans ce cas, le polynôme

$$P_{a2}(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 \quad (12.33)$$

est remplacé par une fraction d'ordre 2

$$\begin{aligned} F_2(z) &= a_0 + a_1\gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + a_2 \left(\gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 \\ &= \frac{(a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2) + 2(a_0 - a_2\gamma^2)z^{-1} + (a_0 - a_1\gamma + a_2\gamma^2)z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

d'où

$$F_2(z) = \frac{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} \quad (12.34)$$

$$\text{avec } q_0 = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 \quad (12.35)$$

$$q_1 = 2(a_0 - a_2\gamma^2) \quad (12.36)$$

$$q_2 = a_0 - a_1\gamma + a_2\gamma^2 \quad (12.37)$$

12.5.3 Exemple de transformation bilinéaire

Reprenons l'exemple du filtre de Butterworth d'ordre 3 vu précédemment

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s/\omega_c)(1 + s/\omega_c + (s/\omega_c)^2)}$$

avec $\omega_c = 2\pi f_c = 2000\pi \text{ rad/sec}$ et $f_e = 10 \text{ kHz}$.

Solution Prenant en compte les valeurs numériques, on a $\gamma = 2/T_e = 2 \cdot 10^4 [\text{sec}^{-1}]$. La transformation des polynômes donne alors les résultats suivants :

$$1. \text{ Polynôme d'ordre 1 : } P_{a1}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s$$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= +4.1831 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= a_0 - a_1\gamma = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \\ &= -2.1831 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{F_1(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{q_0 + q_1z^{-1}} = \frac{1 + z^{-1}}{4.1831 - 2.1831z^{-1}} \\ &= \frac{0.239(1 + z^{-1})}{1 - 0.5219z^{-1}} \end{aligned}$$

2. Polynôme d'ordre 2 : $P_{a2}(s) = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} s + 2.533 \cdot 10^{-8} s^2$

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 + 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +14.315 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 2(a_0 - a_2\gamma^2) = 2(1 - 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8) \\ &= -18.264 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= a_0 - a_1\gamma + a_2\gamma^2 = 1 - 1.5915 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 + 2.533 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^8 \\ &= +7.949 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1}{F_{n2}(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}} \\ &= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{14.315 - 18.264 z^{-1} + 7.949 z^{-2}} \\ &= \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \end{aligned}$$

La fonction de transfert globale est ainsi égale au produit de ces deux fonctions de transfert partielles qui correspondent à deux cellules passe-bas à gain unité. La fonction de transfert globale s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes

$$H(z) = \frac{0.239 (1 + z^{-1})}{1 - 0.5219 z^{-1}} \frac{0.06986 (1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.2759 z^{-1} + 0.5553 z^{-2}} \quad (12.38)$$

$$H(z) = \frac{0.239 (z + 1)}{z - 0.5219} \frac{0.06986 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.2759 z + 0.5553} \quad (12.39)$$

Les réponses temporelle et fréquentielle de ce filtre sont représentées dans la figure 12.7 où elles sont comparées avec celles du filtre analogique.

12.6 Compensation de la distorsion des fréquences

Si l'on analyse plus en détail les effets de la transformation bilinéaire, on remarque que celle-ci entraîne une relation non-linéaire entre les pulsations analogique ω et numérique Ω . En effet, partant de la définition de la transformation bilinéaire

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (12.40)$$

on obtient dans le domaine fréquentiel

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\omega T_e)}{1 + \exp(-j\omega T_e)} \quad (12.41)$$

Sachant que ωT_e représente la pulsation numérique Ω , on a

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{1 - \exp(-j\Omega)}{1 + \exp(-j\Omega)}$$

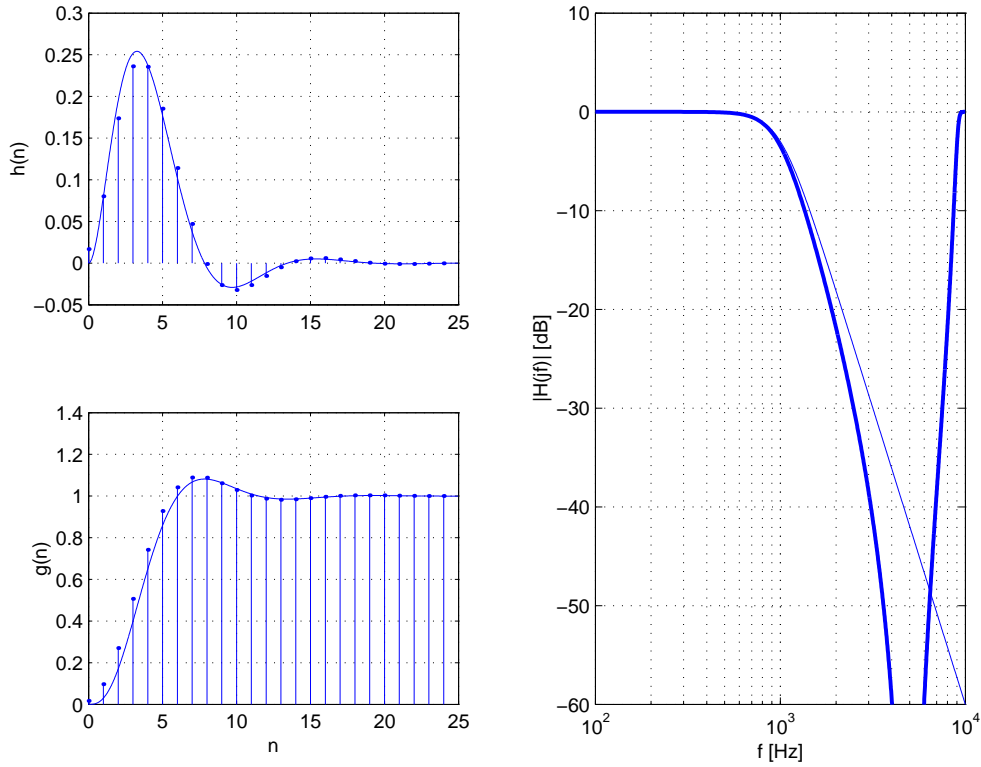


FIG. 12.7: Réponses d'un filtre numérique obtenu par transformation bilinéaire

En multipliant numérateur et dénominateur par $\exp(+j\Omega/2)$, il vient

$$j\omega = \frac{2}{T_e} \frac{\exp(+j\Omega/2) - \exp(-j\Omega/2)}{\exp(+j\Omega/2) + \exp(-j\Omega/2)} = \frac{2}{T_e} \frac{2j \sin(\Omega/2)}{2 \cos(\Omega/2)}$$

On en déduit alors que les pulsations analogique ω et numérique Ω sont reliées entre elles par la relation

$$\omega = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = 2f_e \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (12.42)$$

On voit ainsi que le domaine des fréquences analogiques variant de 0 à $+\infty$ est reporté sur un domaine de pulsation numérique allant de 0 à $+\pi$ (figure 12.8). On notera que c'est seulement pour les basses fréquences ($\Omega \ll 1$) que $\tan(\Omega/2)$ peut être assimilé à $\Omega/2$. Ce qui fait que l'effet de la distorsion est particulièrement marqué lorsque la fréquence d'échantillonnage n'est pas beaucoup plus élevée que la fréquence caractéristique du filtre.

Cette distorsion des fréquences peut être corrigée en remplaçant la pulsation caractéristique ω_c par une pulsation ω_d prenant en compte l'effet de la distorsion avant d'entreprendre le calcul des coefficients du filtre numérique.

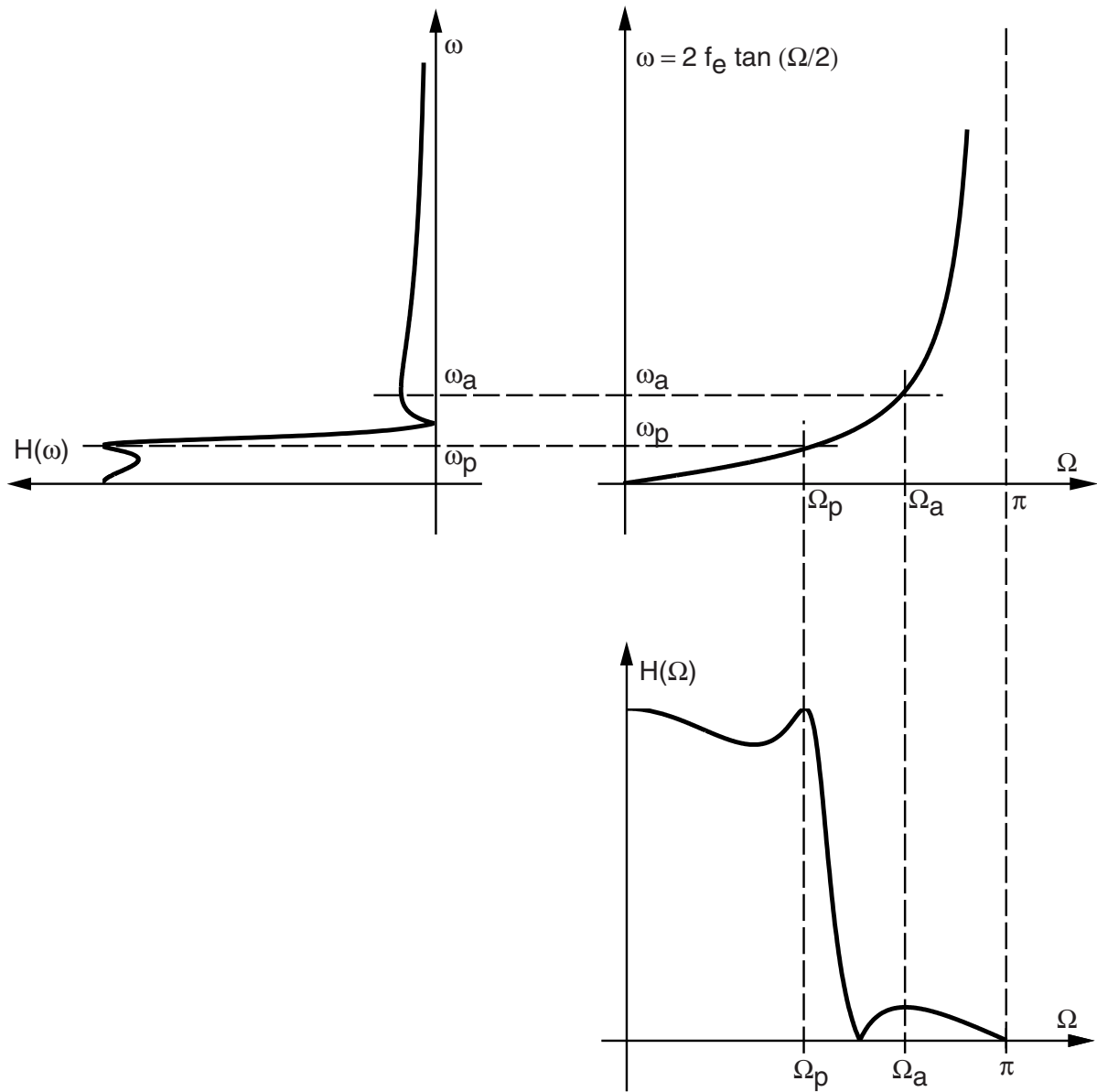


FIG. 12.8: Relation entre pulsations analogique et numérique

12.7 Synthèse d'un filtre numérique récursif

Considérons comme exemple la réalisation d'un filtre numérique de Tchebicheff d'ordre 2, d'ondulation $r = 1 \text{ dB}$, de bande passante $f_r = 3 \text{ kHz}$ et de fréquence d'échantillonnage $f_e = 10 \text{ kHz}$.

On notera que, dans un but illustratif, on a choisi la fréquence de Nyquist $f_N = f_e/2 = 5 \text{ kHz}$ très proche de la fréquence caractéristique du filtre $f_r = 3 \text{ kHz}$ et que cela conduira à une forte distorsion fréquentielle si l'on n'effectue pas sa compensation.

La synthèse d'un filtre numérique récursif se fait en quatre étapes :

1. *Calcul de la pulsation caractéristique Ω_r et celle de prédistorsion ω_d :*

$$\Omega_r = 2\pi \frac{f_r}{f_e} = 2\pi \frac{3 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.6 \pi$$

$$\omega_d = 2 f_e \tan\left(\frac{\Omega_r}{2}\right) = 20 \cdot 10^3 \tan(0.3 \pi) = 27 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$$

On notera que l'on a toujours $\omega_d > \omega_r = 2\pi f_r = 18.8 \cdot 10^3 [\text{rad/sec}]$.

2. *Recherche du filtre analogique normalisé satisfaisant au gabarit :*

Dans cet exemple, le filtre est un passe-bas de Tchebicheff d'ordre 2 et d'ondulation 1 dB. Les tables nous fournissent le polynôme normalisé qui vaut

$$P_{n,2}(s) = \frac{1}{H_n(s)} = 1 + 0.996 s + 0.907 s^2$$

3. *Calcul du polynôme de réalisation avec prédistorsion :*

On effectue le changement de variable

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_d} = 3.63 \cdot 10^{-5} s$$

et on obtient le polynôme de réalisation avec prédistorsion

$$P_{2,d}(s) = 1 + 3.617 \cdot 10^{-5} s + 1.197 \cdot 10^{-9} s^2$$

4. *Calcul de la fonction de transfert du filtre numérique :*

En appliquant la transformation bilinéaire au polynôme de réalisation $P_{2,d}(s)$ avec $\gamma = 2 f_e = 2 \cdot 10^4 [\text{sec}^{-1}]$, on obtient les coefficients

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +2.202 \\ q_1 &= 2 (a_0 - a_2 \gamma^2) = +1.043 \\ q_2 &= a_0 - a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 = +0.755 \end{aligned}$$

permettant d'écrire la fonction de transfert numérique suivante

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 + 2 z^{-1} + z^{-2}}{2.202 + 1.043 z^{-1} + 0.755 z^{-2}} \\ &= 0.454 \frac{(1 + 2 z^{-1} + z^{-2})}{1 + 0.473 z^{-1} + 0.343 z^{-2}} \end{aligned}$$

Les réponses fréquentielles des filtres analogique et numérique sont présentées dans la figure 12.9a. Dans un but de comparaison, on a également calculé la fonction de transfert sans prédistorsion en effectuant directement la transformation bilinéaire de $H(s)$. Ce qui a donné

$$H_{spd}(z) = 0.325 \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0.0137z^{-1} + 0.313z^{-2}}$$

Sa réponse fréquentielle est présentée dans la figure 12.9b. On remarquera combien la correction de distorsion est nécessaire pour avoir, comme demandé, un gain unité à la fréquence caractéristique $f_r = 3 \text{ kHz}$.

Remarque Tout le travail effectué dans les points 1) à 4) ci-dessus pour obtenir la fonction de transfert $H(z)$ se fait beaucoup plus simplement dans Matlab avec les commandes suivantes :

```
n = 2 ; r = 1 ; fr = 3e3 ;
fe = 10e3 ; fn = fe/2 ;
[num,den] = cheby1(n,r,fr/fn) ;
num = num/sum(num)*sum(den) ; % gain DC = 1
```

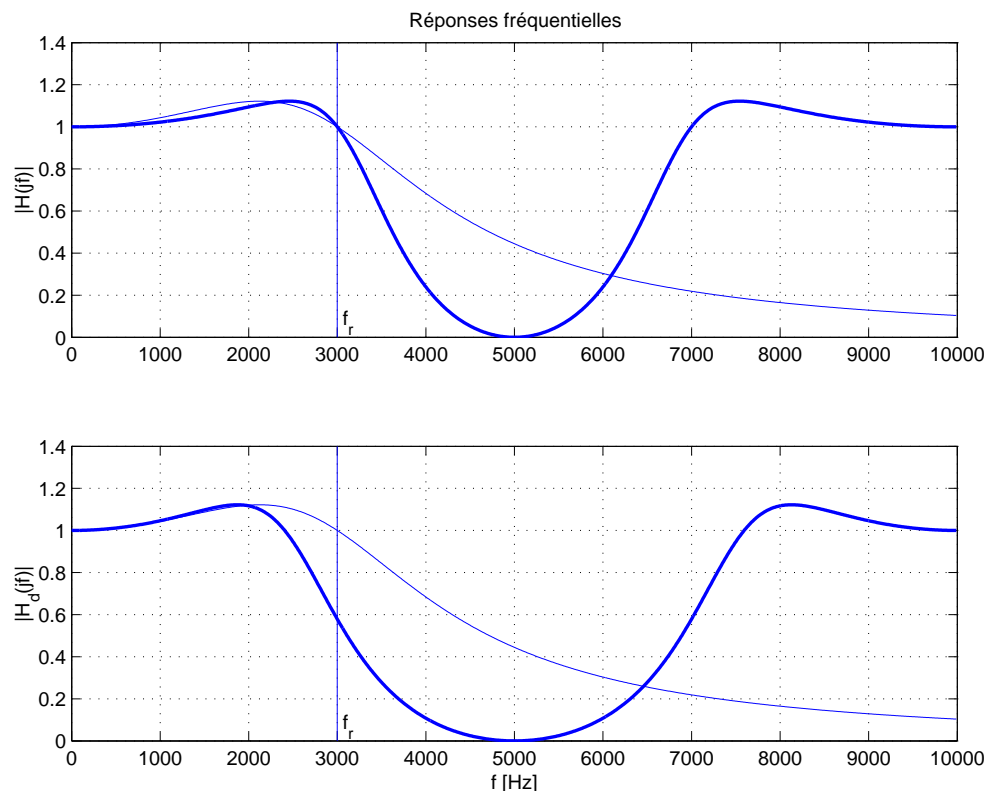


FIG. 12.9: Réponses fréquentielles des filtres analogiques et numériques avec et sans prédistorsion

12.8 Exercices

RII 1 Partant d'un filtre passe-bas RC, trouvez son équivalent numérique $H(z)$. Pour ce faire :

1. écrivez l'équation différentielle du circuit RC ;
2. discrétisez cette équation ;
3. écrivez l'équation aux différences du filtre et dessinez son schéma fonctionnel ;
4. calculez sa fonction de transfert $H(z)$;

RII 2 Dans l'exercice précédent, on choisit pour le filtre numérique une période d'échantillonnage égale au dixième de la constante de temps RC du filtre analogique.

1. calculez numériquement sa fonction de transfert $H(z)$;
2. que vaut l'instant caractéristique K_c ? quelle sera la durée du régime transitoire ?
3. si $x[n] = \epsilon[n]$, calculez $Y(z)$; que valent $y[0]$ et $y[\infty]$? esquissez $y[n]$;
4. que vaut la réponse fréquentielle $H(j\Omega)$ du filtre numérique ;
5. calculez $H(j\Omega)$ lorsque la fréquence du signal d'entrée vaut $f = 0, 1/(2\pi RC), f_e/2$? esquissez le module de $H(j\Omega)$;
6. comparez à la réponse fréquentielle du filtre analogique.

RII 3 Calculez les équivalents numériques $H_a(z)$ et $H_b(z)$ d'un filtre RC obtenus par les transformations associée et bilinéaire lorsque $T_e = RC/10$. Comparez ces deux résultats entre eux et avec celui de l'exercice précédent.

RII 4 On souhaite réaliser l'équivalent numérique $H(z)$ d'un filtre analogique passe-haut de type Butterworth devant travailler jusqu'à 10 kHz dont la fonction de transfert est décrite par

$$H(s) = \frac{(s/\omega_c)^2}{1 + 1.414 \cdot (s/\omega_c) + (s/\omega_c)^2} \quad \text{avec} \quad f_c = 1 \text{ kHz}$$

Pour ce faire :

1. esquissez le Bode d'amplitude du filtre analogique ;
2. choisissez la fréquence d'échantillonnage ;
3. calculez son équivalent $H_a(z)$ à partir de la transformation associée ;
4. calculez son équivalent $H_b(z)$ à partir de la transformation bilinéaire ;
5. écrivez les équations aux différences correspondantes permettant ces deux réalisations ;
6. dessinez leur schéma fonctionnel ;
7. que valent $H(\Omega = 0)$ et $H(\Omega = \pi)$ pour les 2 filtres ?

R11 5 On désire réaliser un filtre numérique à partir du filtre analogique décrit par

$$H(s) = \frac{5 \cdot 10^{-3} s}{1 + 5 \cdot 10^{-3} s + s^2}$$

1. dessinez les pôles et zéros de $H(s)$ dans le plan complexe ; esquissez son diagramme de Bode ; de quel type de filtre s'agit-il ?
2. après avoir choisi une fréquence d'échantillonnage qui vous paraît raisonnable, calculez son équivalent numérique $H(z)$ à l'aide de la transformation bilinéaire ;
3. dessinez les pôles et zéros de $H(z)$ dans le plan complexe ; où se situent-ils par rapport au cercle de rayon unité ?

R11 6 Considérant une cellule analogique biquadratique décrite par

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

écrivez un programme (en pseudo-langage) permettant de passer du filtre analogique à sa réalisation numérique. Pour cela :

1. écrivez une procédure ou une fonction permettant de transformer $H(s)$ en $H(z)$ à l'aide de la transformation bilinéaire ; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
2. écrivez une procédure ou une fonction calculant $y[n]$ à partir des paramètres de la cellule biquadratique et de son signal d'entrée $x[n]$; précisez quels sont ses paramètres d'entrée-sortie ;
3. tenant compte de ce qui vient d'être fait, écrivez un programme permettant de réaliser le filtre suivant

$$H(s) = \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \frac{\omega_2}{s^2 + 2\zeta\omega_2 s + \omega_2^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 = 1000 \text{ rad/sec} \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

Pour relier votre filtre au monde extérieur, utilisez les procédures `AnalogIn` (`var Value : real`) et `AnalogOut` (`Value : real`) .

4. votre programme peut être testé de manière simple à partir des instants caractéristiques et des valeurs initiale et finale de la réponse indicielle du filtre ; calculez ces valeurs.

N.B. : Les entrées (`AnalogIn`) se font sur la base d'interruptions commandées par l'horloge interne ; les sorties (`AnalogOut`) sont restituées immédiatement après les calculs.