

13 Synthèse des filtres non récursifs

13.1 Introduction

Les filtres non récursifs que l'on appelle également filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) se distinguent des filtres récursifs étudiés dans le chapitre précédent par les points suivants :

- ils sont toujours stables ;
- ils peuvent être conçus pour avoir une phase linéaire exacte ;
- ils nécessitent généralement plus de matériel et de temps de calcul.

Un filtre non récursif d'ordre N comporte $N + 1$ coefficients et peut être décrit de manière équivalente par :

1. sa réponse impulsionnelle de longueur $L = N + 1$

$$h[n] = \{h[0], h[1], h[2], \dots, h[N]\} = \sum_{k=0}^N h[k] \delta[n - k] \quad (13.1)$$

2. son équation aux différences

$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k] x[n - k] \quad (13.2)$$

3. sa fonction de transfert d'ordre N

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \quad (13.3)$$

4. sa réponse fréquentielle que l'on évalue en remplaçant z^{-1} par $e^{-j\Omega}$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \sum_{n=0}^N h[n] e^{-jn\Omega} \quad (13.4)$$

13.2 Spécifications

Les spécifications d'un filtre se donnent sous la forme d'un gabarit en valeurs réelles ou relatives (dB). Un exemple de gabarit pour un filtre passe-bas est illustré dans la figure 13.1. On y trouve :

1. la bande passante $[0, \Omega_p]$;
2. les bandes de transition (Ω_p, Ω_a) et d'arrêt $[\Omega_a, \pi]$;
3. l'ondulation acceptée dans la bande passante, exprimée par δ_1 ou R_p [dB] ;
4. l'atténuation souhaitée dans la bande d'arrêt, exprimée par δ_2 ou A_a [dB].

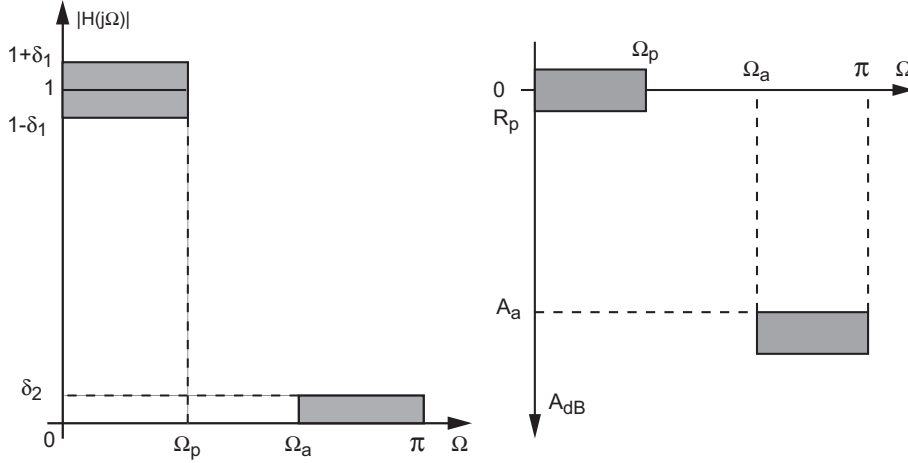


FIG. 13.1: Gabarit d'un filtre

Le gain du filtre passe-bas valant 1 lorsque $\Omega \rightarrow 0$, les relations entre les valeurs réelles ou relatives du gabarit sont alors définies comme suit :

$$R_p = |20 \log(1 \pm \delta_1)| > 0 \quad (13.5)$$

$$A_a = -20 \log(\delta_2) > 0 \quad (13.6)$$

ou inversement :

$$\delta_1 = \pm (10^{+R_p/20} - 1) \quad (13.7)$$

$$\delta_2 = 10^{-A_a/20} \quad (13.8)$$

13.3 Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

De manière générale, un filtre RIF ne possède aucune propriété particulière concernant le module ou la phase de la réponse fréquentielle mis à part que c'est le seul type de filtres pouvant offrir une phase linéaire exacte (qui est une des propriétés du filtre idéal). C'est donc essentiellement pour cette propriété que l'on utilise les filtres à réponse impulsionnelle finie.

13.3.1 Réponses impulsionnelle et fréquentielle

Dans le cas où on désire avoir une phase linéaire, la réponse impulsionnelle doit posséder une symétrie paire ou une symétrie impaire ou, de manière équivalente, une symétrie axiale ou ponctuelle. La justification en est donnée ci-dessous.

Symétrie paire

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie paire par rapport à $N_s = 3$ (figure 13.2a). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle paire $h_p[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est réelle.

Le décalage temporel (ici, un retard) nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_p(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_p| \\ \angle H = \{0, \pm\pi\} - N_s\Omega \end{cases} \quad (13.9)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_p(j\Omega)$ et la phase varie linéairement avec la pulsation. Le cas échéant, on devra, ajouter $\pm\pi$ à cette phase linéaire pour tenir compte de la valeur négative éventuelle de $H_p(j\Omega)$.

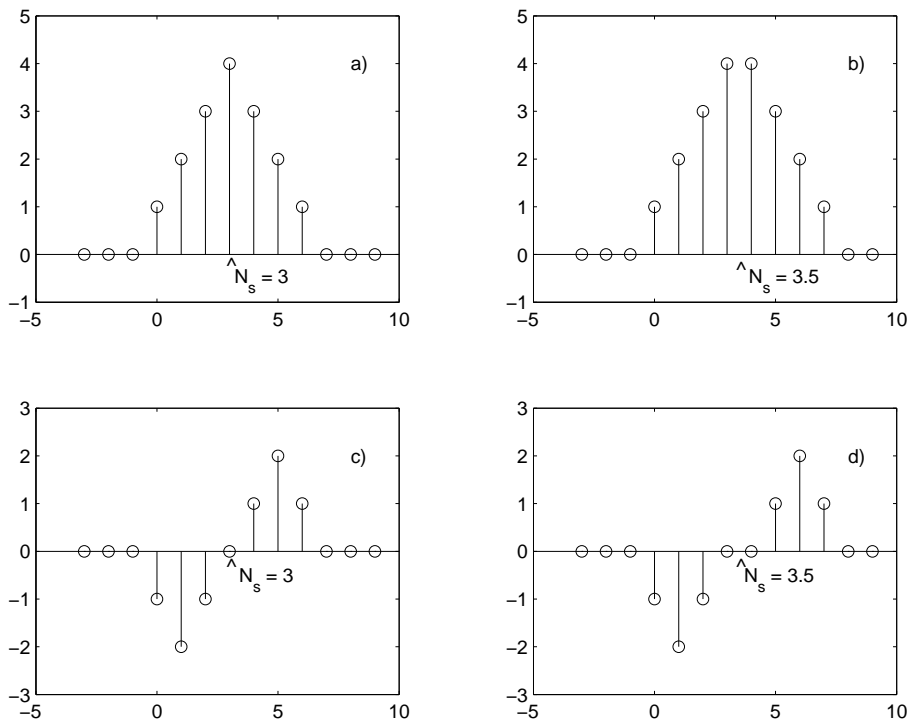


FIG. 13.2: Réponses impulsionnelles à symétrie paire ou impaire

Symétrie impaire

Considérons un filtre RIF d'ordre $N = 6$ représenté par une séquence $h[n]$ à symétrie impaire par rapport à $N_s = 3$ (figure 13.2b). Cette séquence provient d'une réponse impulsionnelle impaire $h_i[n]$ non causale dont la réponse fréquentielle est purement imaginaire.

Le décalage temporel nécessaire pour rendre le filtre causal entraîne le déphasage linéaire souhaité. On a donc

$$H(j\Omega) = \exp(-jN_s\Omega) H_i(j\Omega) \Rightarrow \begin{cases} |H| = |H_i| \\ \angle H = \pm\pi/2 - N_s\Omega \end{cases} \quad (13.10)$$

Le module de $H(j\Omega)$ est égal à celui du filtre non causal $H_i(j\Omega)$ et sa phase varie linéairement avec la pulsation à partir de $\pm\pi/2$ suivant le signe de la valeur imaginaire.

Remarque

On peut bien sûr considérer des filtres d'ordre N impair (figures 13.2c et 13.2d). Dans ce cas, l'axe ou le point de symétrie se situe entre 2 valeurs de la réponse impulsionnelle $h[n]$ et le déphasage linéaire s'écrira $-(N_s + \frac{1}{2})\Omega$. Dans le cadre de ce cours, on n'analysera que des filtres d'ordre N pair (c'est-à-dire de longueur $L = N + 1$ impaire) dont le point ou axe de symétrie se situe obligatoirement sur une valeur entière de l'axe n .

Exemple

Considérons comme exemple un filtre causal dont la réponse impulsionnelle finie (figure 13.3a) est décrite par une séquence non-nulle de longueur $L = 9$ à symétrie paire

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, +5, +4, +3, +2, +1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

Par transformation en z de cette réponse impulsionnelle, on obtient la fonction de transfert du filtre RIF :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} + 3z^{-6} + 2z^{-7} + 1z^{-8} \\ &= z^{-8} (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 3z^6 + 2z^7 + 1z^8) \end{aligned}$$

On en conclut que ce filtre RIF, décrit par un polynôme d'ordre $N = 8$, possède 8 pôles situés en $z = 0$ et 8 zéros dont les positions dans le plan complexe sont présentées dans la figure 13.3b.

En remplaçant l'opérateur de retard z^{-1} par sa transformée de Fourier $e^{-j\Omega}$, on obtient la réponse fréquentielle du filtre

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= \sum_{k=0}^N h[k] e^{-j\Omega k} \\ &= 1 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 4e^{-j3\Omega} + 5e^{-j4\Omega} + 4e^{-j5\Omega} + 3e^{-j6\Omega} + 2e^{-j7\Omega} + 1e^{-j8\Omega} \end{aligned}$$

En mettant en évidence le phaseur central $e^{-j4\Omega}$, on obtient une forme illustrant clairement la symétrie paire du filtre

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 5 + 4e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} + 2e^{-j3\Omega} + 1e^{-j4\Omega})$$

13.3 Propriétés des filtres RIF à phase linéaire

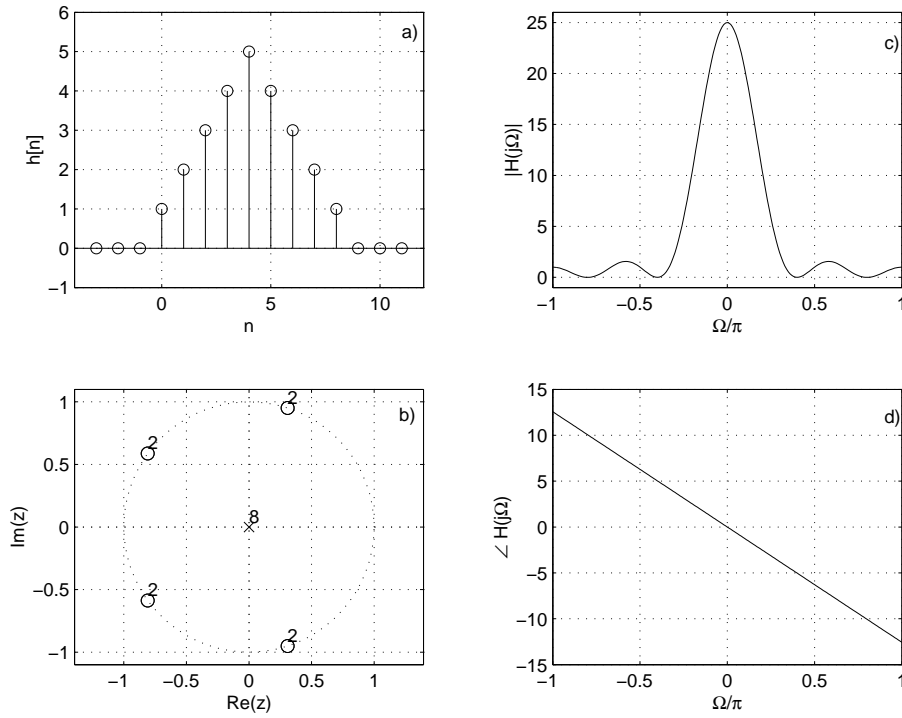


FIG. 13.3: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie paire

Utilisant la formule d'Euler $2 \cos \varphi = \exp(+j\varphi) + \exp(-j\varphi)$, on obtient finalement

$$H(j\Omega) = e^{-j4\Omega} (5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega))$$

Ce résultat montre à l'évidence que l'on a affaire à un filtre à phase linéaire puisque le seul terme complexe de l'expression est le phaseur $e^{-j4\Omega}$. Ce filtre RIF possède donc une réponse fréquentielle en amplitude (figure 13.3c) qui vaut

$$|H(j\Omega)| = |5 + 8 \cos(\Omega) + 6 \cos(2\Omega) + 4 \cos(3\Omega) + 2 \cos(4\Omega)|$$

et une phase (figure 13.3d) décrite par

$$\angle H(j\Omega) = -4\Omega$$

À titre de comparaison, il est intéressant de tracer les mêmes graphes (figure 13.4) pour un filtre réalisé avec une réponse impulsionnelle similaire à la précédente mais avec une symétrie impaire cette fois-ci :

$$h[n] = \{+1, +2, +3, +4, 0, -4, -3, -2, -1, 0, 0, \dots\} \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots$$

dont la réponse fréquentielle vaut

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= e^{-j4\Omega} (1e^{+j4\Omega} + 2e^{j3\Omega} + 3e^{j2\Omega} + 4e^{j\Omega} + 0 - 4e^{-j\Omega} - 3e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega} - 1e^{-j4\Omega}) \\ &= 2j e^{-j4\Omega} (4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega)) \\ &= 2 | (4 \sin(\Omega) + 3 \sin(2\Omega) + 2 \sin(3\Omega) + \sin(4\Omega)) | \angle + \pi/2 - 4\Omega \end{aligned}$$

On peut relever que la symétrie paire conduit à un filtre passe-bas alors que la symétrie impaire fournit un filtre passe-haut ou passe-bande. Plus généralement, pour obtenir passe-haut ou passe-bande, il suffit que la somme des coefficients soient nulle

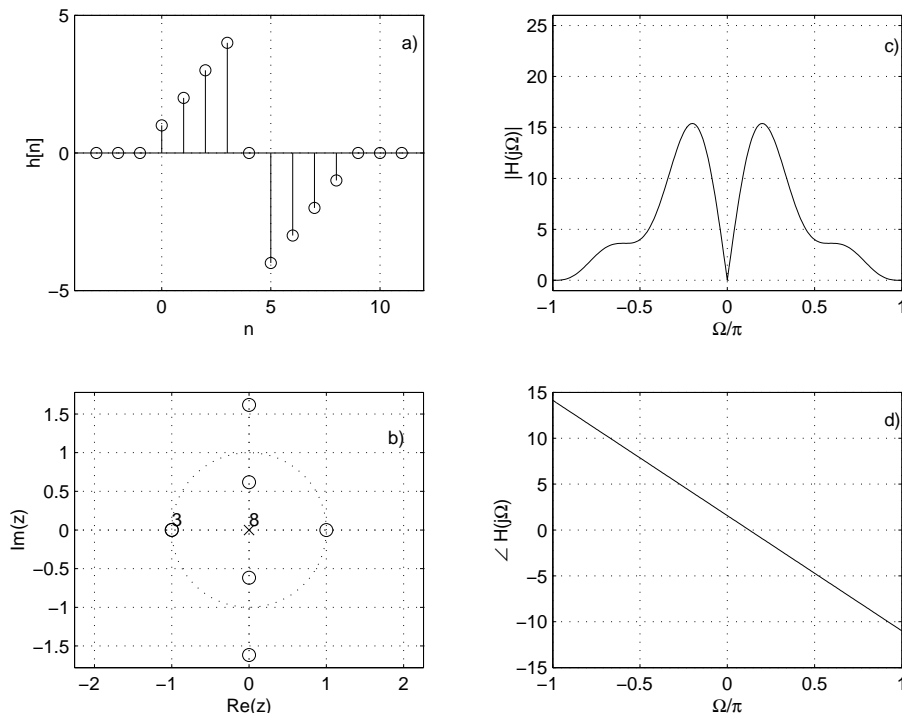


FIG. 13.4: Réponse impulsionnelle, pôles et zéros, amplitude et phase d'un filtre RIF à symétrie impaire

13.4 Synthèse par fenêtrage

13.4.1 Principe du fenêtrage

Le point de départ de la synthèse des filtres RIF est donné par la considération des réponses impulsionnelles des filtres idéaux. Comme celles-ci sont infiniment longues et non causales, on voit immédiatement que les filtres idéaux ne sont pas réalisables. On doit donc manifestement se contenter d'une approximation de leurs réponses en les tronquant avant de les rendre causales.

Pour voir plus précisément comment cela se passe, considérons la réponse fréquentielle $H_d(j\omega)$ d'un filtre analogique passe-bas idéal (figure 13.5a). Sa réponse impulsionnelle $h_d(t)$ se calcule par transformation de Fourier inverse. On obtient ainsi une réponse temporelle en forme de sinus cardinal et de longueur infinie (figure 13.5b).

De manière à ce que ce filtre soit réalisable, il faut tronquer cette réponse en respectant sa symétrie paire (figure 13.5d). On obtient alors un filtre à réponse impulsionnelle de durée finie, mais non causale puisque $h(t)$ n'est pas nulle pour $t < 0$.

Un décalage de cette réponse à symétrie paire suffit à rendre le filtre causal (figure 13.5f), donc à phase linéaire (figure 13.5e). Bien entendu, le module de sa réponse fréquentielle ne sera plus qu'une approximation de l'idéal (figure 13.5c).

D'un point de vue mathématique, le fait de tronquer la réponse impulsionnelle $h_d(t)$ revient à multiplier celle-ci par une fenêtre rectangulaire $w_r(t)$ et la réponse impulsionnelle s'écrit alors :

$$h(t) = h_d(t) \cdot w_r(t) \quad (13.11)$$

Pour un filtre numérique, on aura de manière équivalente :

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_r[n] \quad (13.12)$$

13.4.2 Effet de la troncation

L'opération de troncation qui, dans une première approche peut sembler anodine, modifie sensiblement la réponse fréquentielle et entraîne des ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt. Ceci provient de la convolution entre la réponse fréquentielle du filtre idéal et le spectre en sinus cardinal de la fenêtre rectangulaire :

$$H(j\Omega) = H_d(j\Omega) \otimes W(j\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(j\theta) W(j\Omega - j\theta) d\theta \quad (13.13)$$

La figure 13.6 montre à l'évidence que l'ondulation caractérisant la réponse obtenue $H(j\Omega)$ provient du spectre $W(j\Omega)$ de la fenêtre choisie, ici rectangulaire.

Afin d'obtenir le meilleur compromis possible entre une faible ondulation et une bande de transition étroite, on sera donc amené par la suite à choisir une fenêtre $w[n]$ dont le comportement fréquentiel est satisfaisant du point de vue du filtre à réaliser. C'est-à-dire que l'on cherchera un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur des bandes de transition.

13 SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

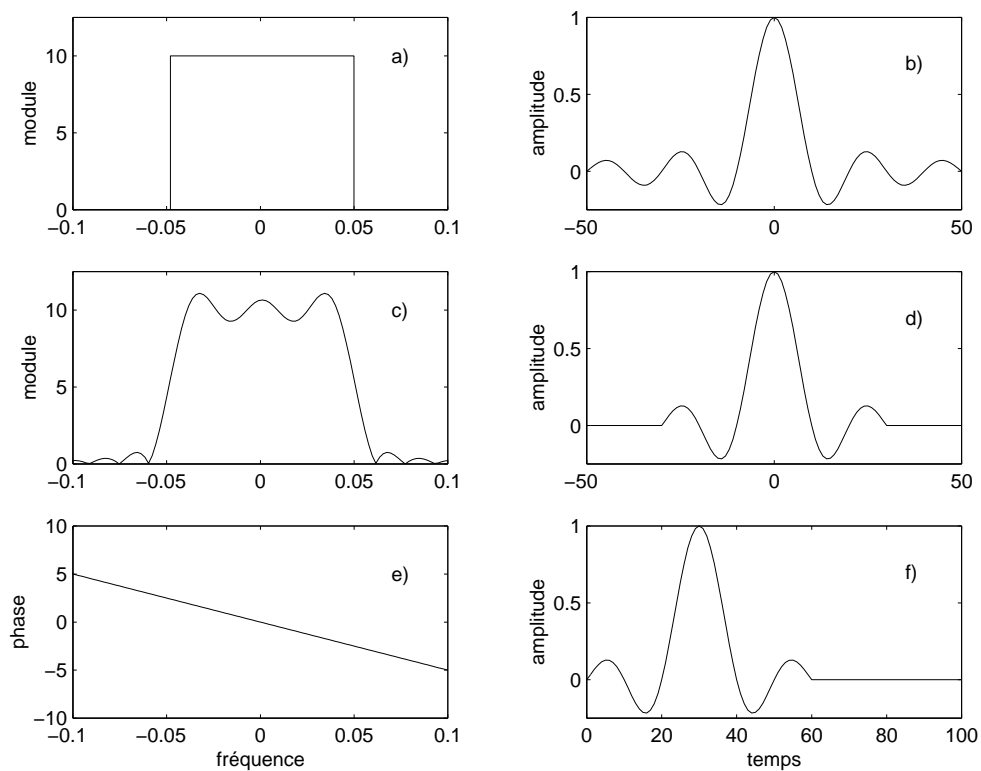


FIG. 13.5: Passage du filtre idéal au filtre réalisable

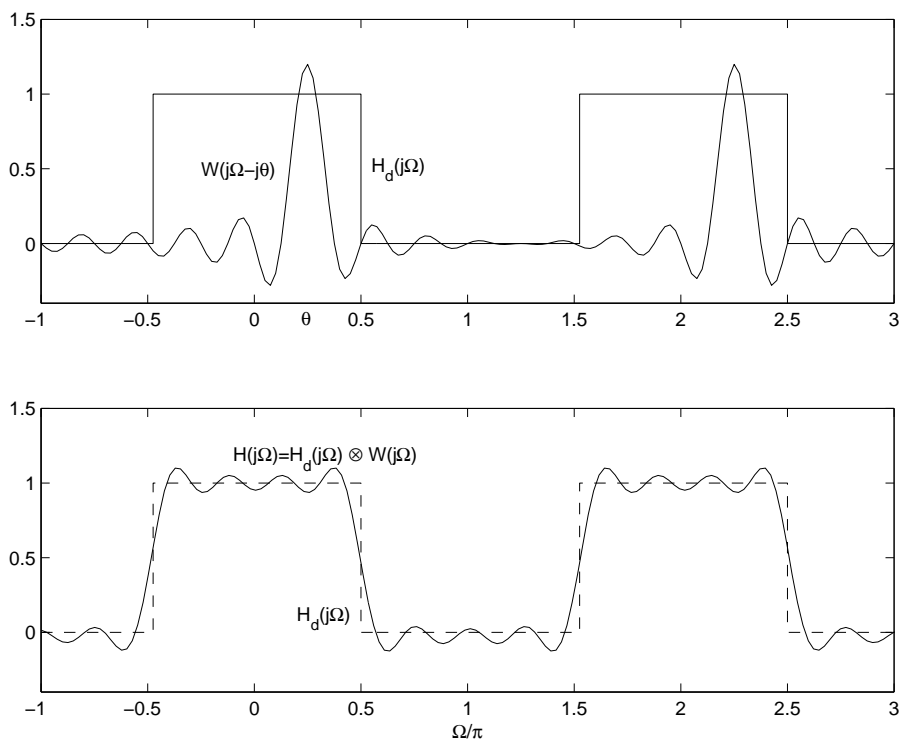


FIG. 13.6: Convolution circulaire dans le domaine des fréquences

13.5 Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

Comme la synthèse par fenêtrage utilise les réponses impulsionnelles des filtres idéaux, il est nécessaire de les connaître. Ces réponses impulsionnelles sont calculées en partant des réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base passe-bas, passe-haut, passe-bande et réjecteur de bande (figure 13.7).

13.5.1 Filtre passe-bas

Avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_b(j\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{si } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (13.14)$$

Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

$$h_b[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_b(j\Omega) \exp(+jn\Omega) d\Omega \quad (13.15)$$

Tenant compte de la réponse fréquentielle idéale du filtre passe-bas, il vient :

$$\begin{aligned} h_b[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} \exp(+jn\Omega) d\Omega \\ &= \frac{\exp(+jn\Omega_c) - \exp(-jn\Omega_c)}{j2\pi n} \end{aligned}$$

Utilisant les relations d'Euler, on obtient finalement :

$$h_b[n] = \frac{\Omega_c \sin(n\Omega_c)}{\pi n\Omega_c} \quad -\infty < n < +\infty \quad (13.16)$$

Cette réponse temporelle est infiniment longue et non causale. Afin de la rendre causale, il faut tout d'abord la tronquer pour avoir une réponse impulsionnelle de d'ordre N puis la décaler de la moitié de sa longueur.

En choisissant de travailler avec une réponse impulsionnelle d'ordre N pair centrée en $N_s = N/2$, il vient :

$$h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c \sin((n-N_s)\Omega_c)}{\pi (n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.17)$$

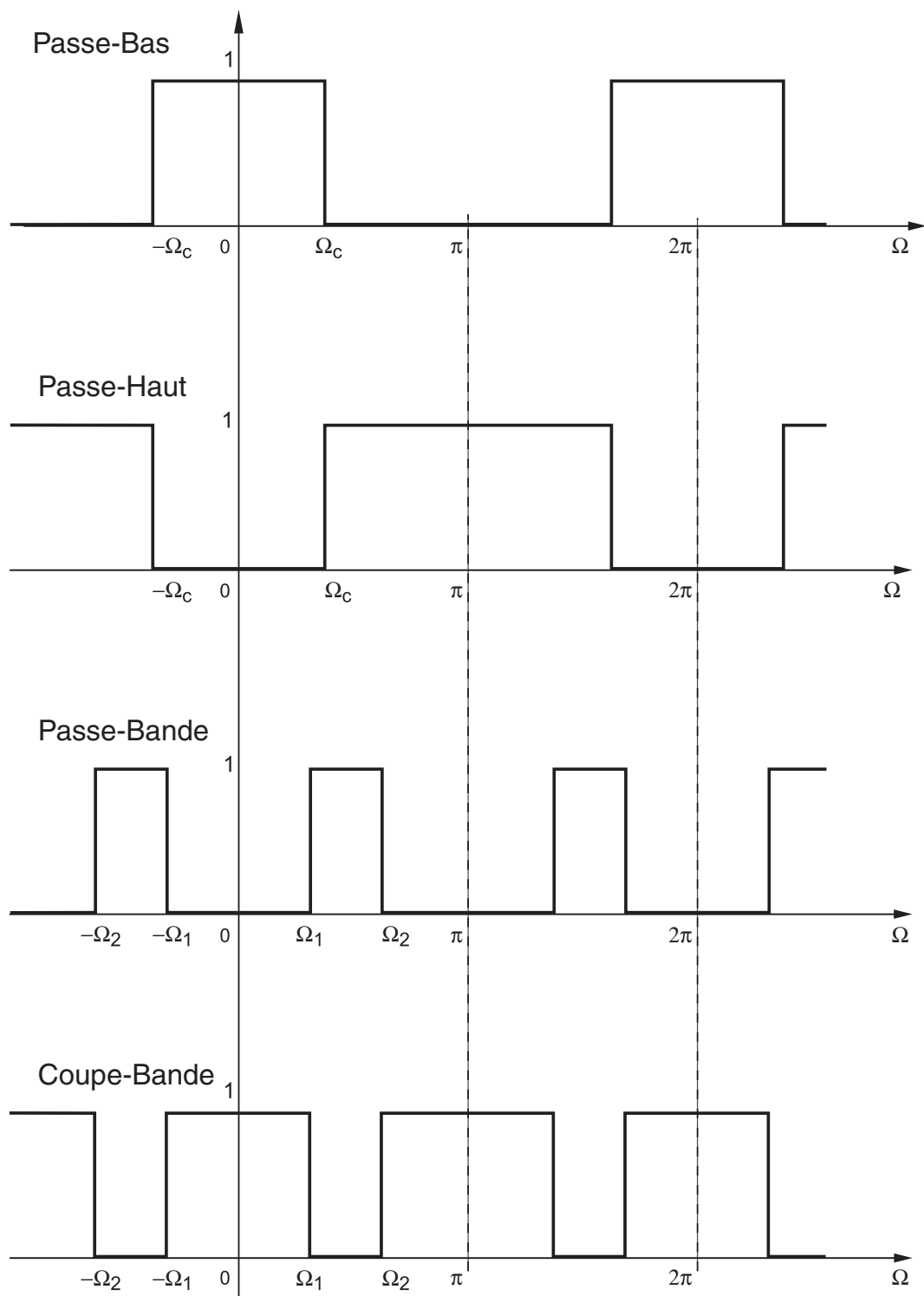


FIG. 13.7: Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres standard

13.5 Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

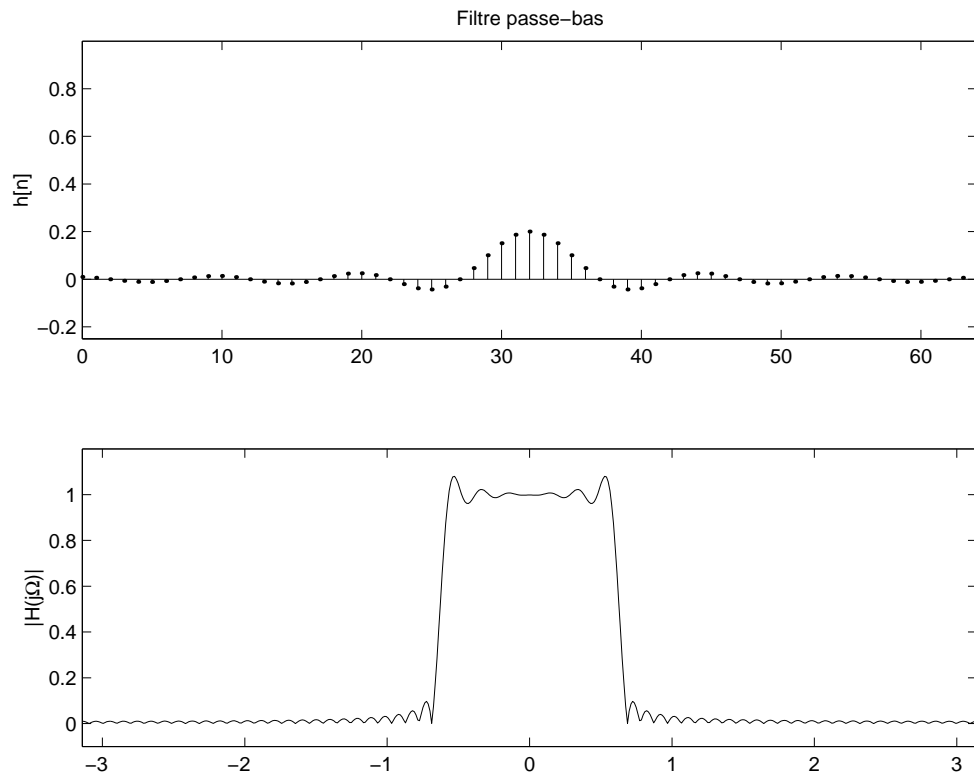


FIG. 13.8: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bas

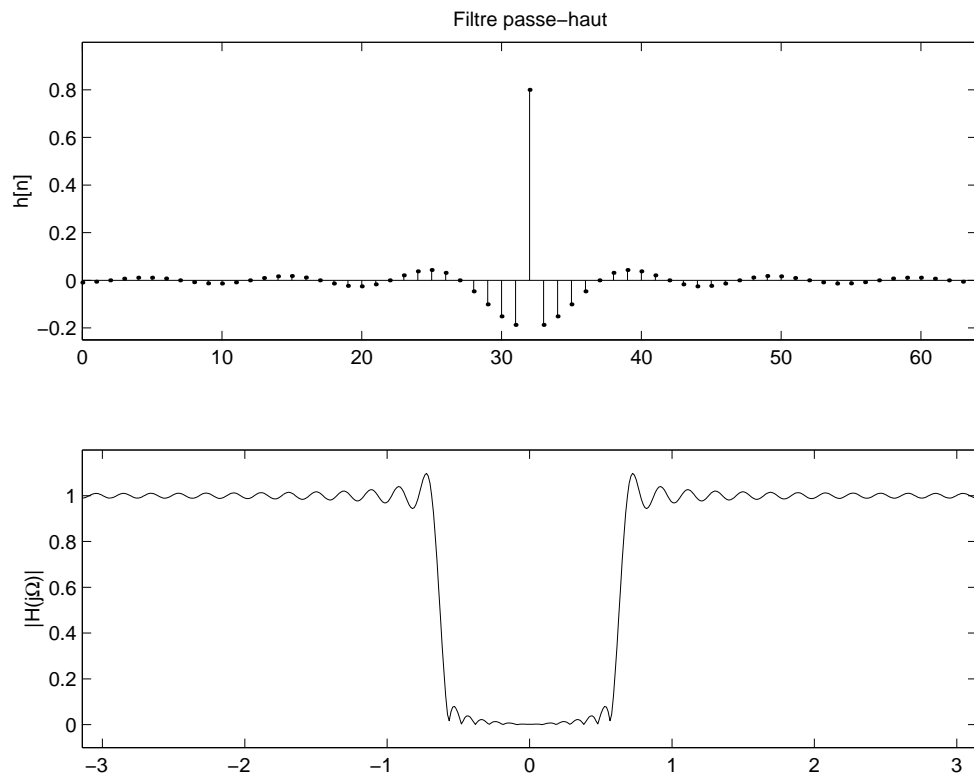


FIG. 13.9: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-haut

13.5.2 Filtre passe-haut

Dans ce cas, avec Ω_c comme pulsation de coupure, la réponse fréquentielle du filtre s'écrit :

$$H_h(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 1 & \text{si } \Omega_c < |\Omega| < \pi \end{cases} \quad (13.18)$$

On peut remarquer que les réponses fréquentielles d'un passe-bas et d'un passe-haut sont reliées entre elles par :

$$H_h(j\Omega) = 1 - H_b(j\Omega) \quad (13.19)$$

Ce qui, dans l'espace temps, correspond à :

$$h_h[n] = \delta[n] - h_b[n] \quad (13.20)$$

On en déduit donc immédiatement que :

$$h_h[n] = \begin{cases} -\frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.21)$$

13.5.3 Filtre passe-bande et réjecteur de bande

Les filtres passe-bande et réjecteur de bande possèdent 2 pulsations caractéristiques Ω_1 et Ω_2 limitant les bandes passante et d'arrêt. On montre aisément les deux résultats suivants :

1. Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bande

$$h_\Delta[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} - \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.22)$$

2. Réponse impulsionnelle d'un filtre réjecteur de bande

$$h_r[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_1}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_1)}{(n-N_s)\Omega_1} - \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_2)}{(n-N_s)\Omega_2} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ 1 - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.23)$$

Le calcul de ces réponses impulsionnelles est laissé comme exercice.

13.5 Réponses fréquentielles et impulsionnelles idéales

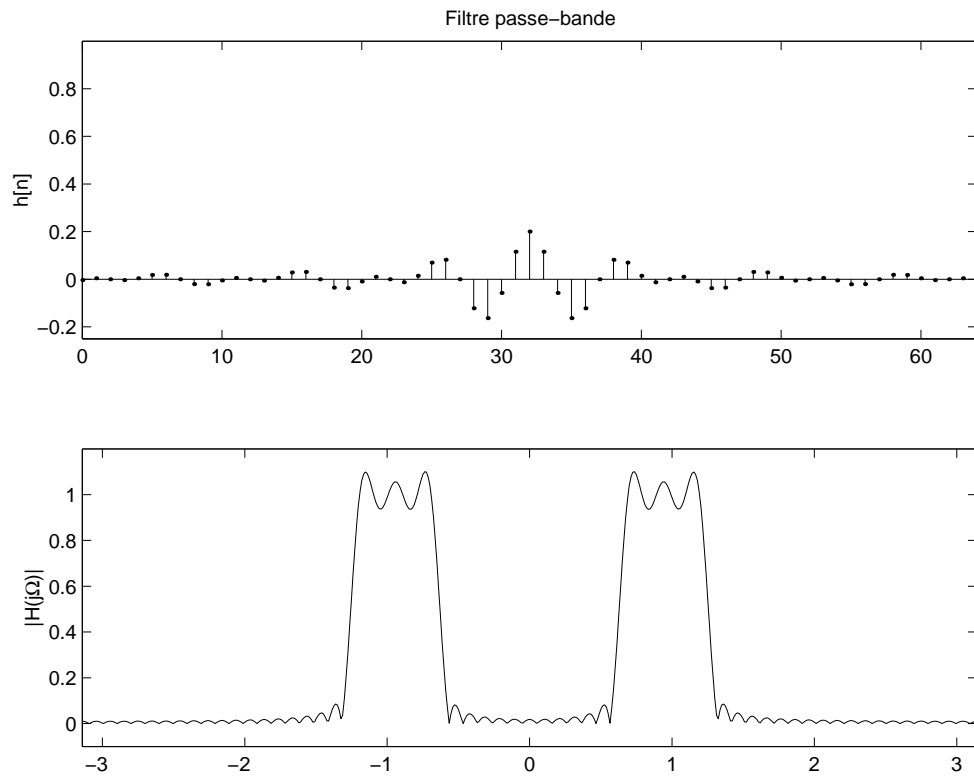


FIG. 13.10: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande

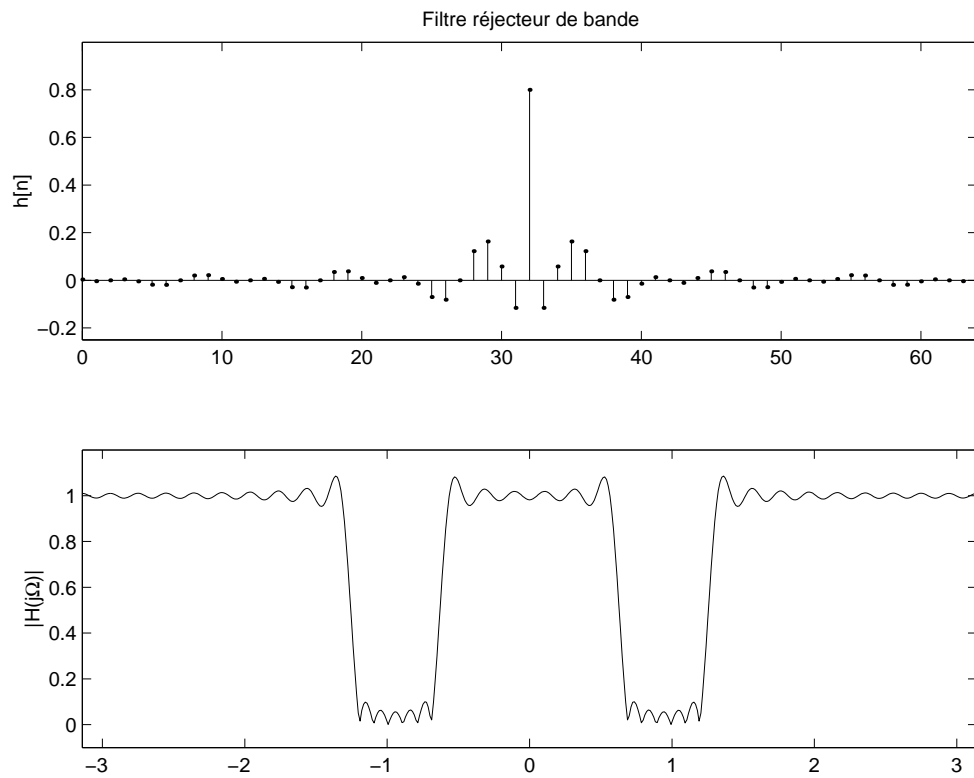


FIG. 13.11: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre réjecteur de bande

Exemple Réalisation d'un filtre non récursif élémentaire basé sur la réponse fréquentielle idéale d'un filtre passe-bas ayant une bande passante de 1 kHz alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

13.6 Caractéristiques de quelques fenêtres

Du choix de la fenêtre, dépendra la qualité de l'approximation ; il est donc nécessaire de passer en revue les caractéristiques de celles-ci. On rappellera tout d'abord que si on désire conserver la phase linéaire du filtre, il faut que les fenêtres possèdent une symétrie paire ou impaire.

Comme on l'a vu plus haut, la troncation simple de la réponse impulsionnelle de longueur infinie conduit à une réponse fréquentielle avec des ondulations importantes. Celles-ci sont dues au phénomène de Gibbs et ne peuvent être diminuées que si la fenêtre possède des transitions douces, contrairement à la troncation simple.

Les fenêtres susceptibles de satisfaire les besoins de synthèse des filtres et d'analyse spectrale ont fait l'objet d'études extensives [3]. Parmi les nombreuses fenêtres proposées, seules celles qui sont le plus souvent citées sont présentées ci-après.

13.6.1 Fenêtres analytiques

Pour chacune des fenêtres étudiées, on présentera son équation $w[n]$ et une figure comportant 4 graphes :

1. son graphe temporel $w[n]$
2. son spectre d'amplitudes $W(j\Omega) = TF \{w[n]\}$
3. son spectre d'amplitudes en dB $W_{dB} = 20 \log (|W(j\Omega)|)$
4. son spectre cumulé défini comme suit [1] :

$$W_{cum}(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\Omega} W(j\theta) d\theta \quad (13.24)$$

Cette représentation peu commune est importante car grâce à elle, on peut mesurer le niveau d'atténuation possible ainsi que la largeur de la bande de transition pour un filtre RIF. Sa définition découle de la convolution entre une réponse fréquentielle constante et le spectre de la fenêtre $w[n]$.

Fenêtre rectangulaire

$$w_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.25)$$

Fenêtre triangulaire (ou de Bartlett)

$$w_t[n] = \begin{cases} 2\frac{n}{N} & \text{si } 0 \leq n \leq N/2 \\ 2 - 2\frac{n}{N} & \text{si } N/2 < n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.26)$$

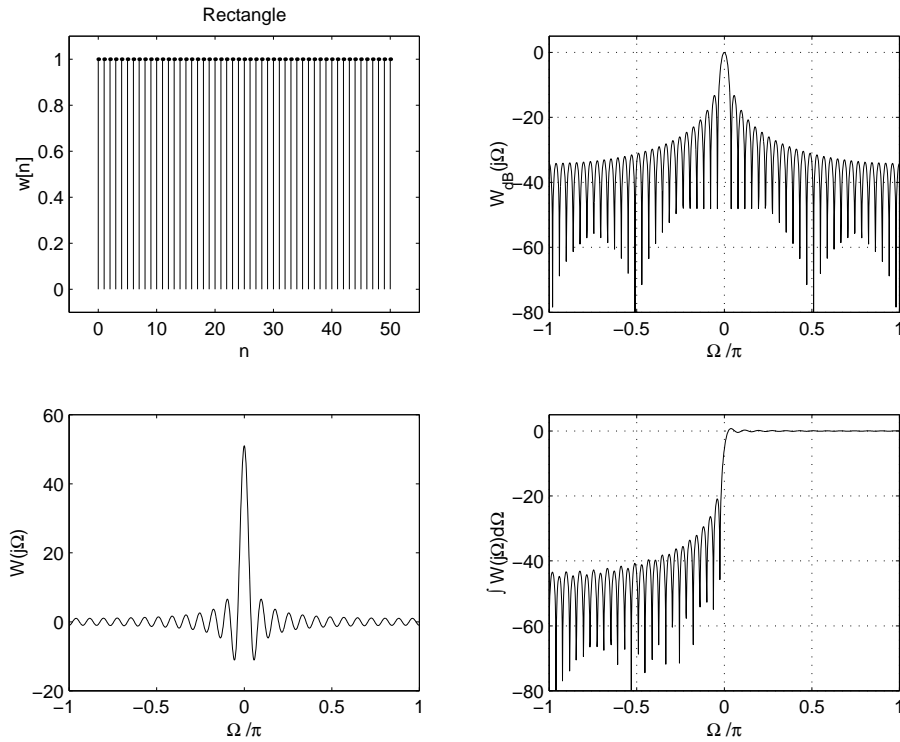


FIG. 13.12: Fenêtre rectangulaire

Fenêtre cosinoïdale (ou de Hann)

$$w_c[n] = \begin{cases} 0.5(1 - \cos(2\pi\frac{n}{N})) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.27)$$

Fenêtre de Hamming

$$w_h[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi\frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.28)$$

Fenêtre de Blackman

$$w_b[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi\frac{n}{N}) + 0.08 \cos(4\pi\frac{n}{N}) & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.29)$$

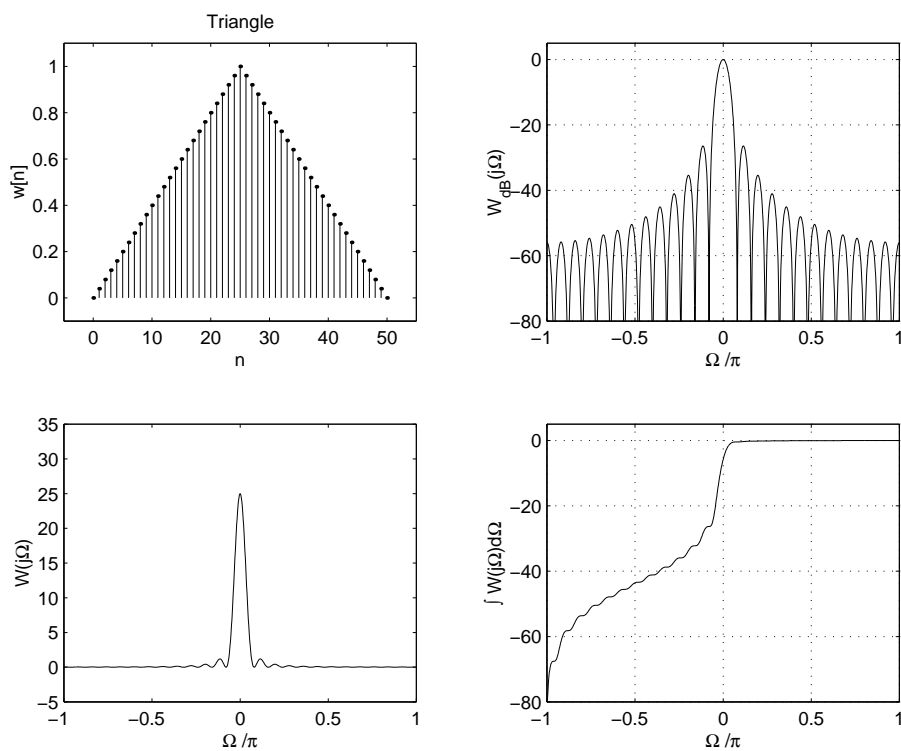


FIG. 13.13: Fenêtre triangulaire

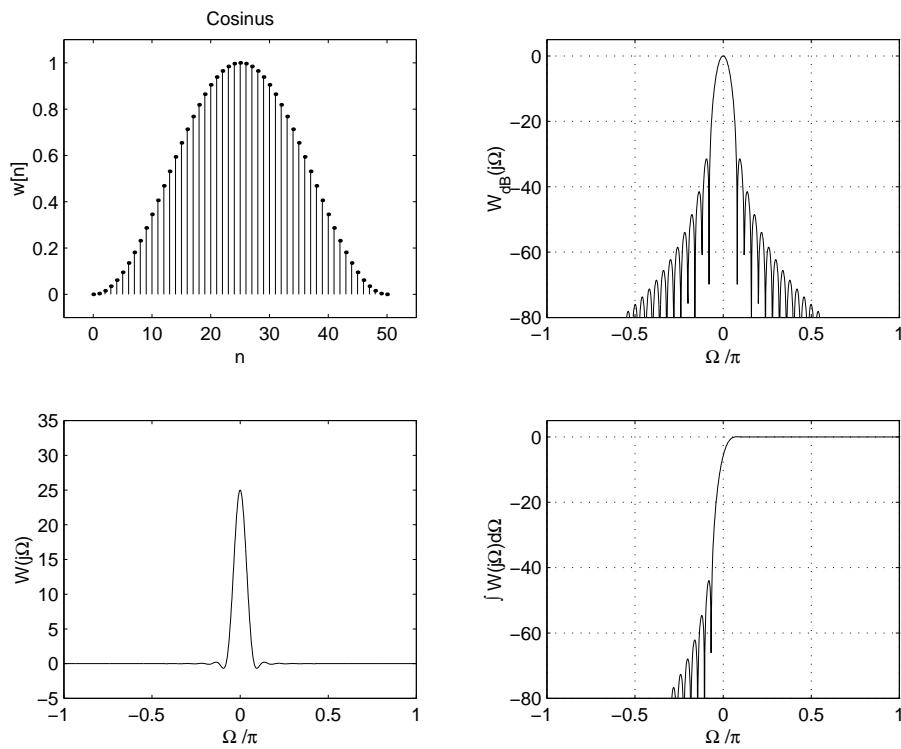


FIG. 13.14: Fenêtre cosinusoidale (ou de Hann)

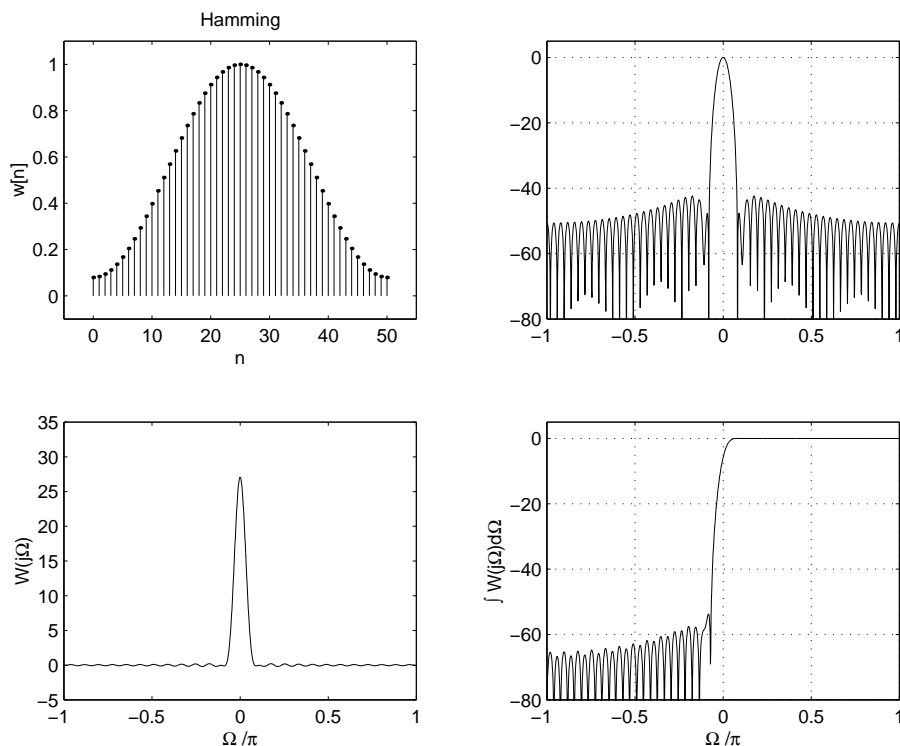


FIG. 13.15: Fenêtre de Hamming

13.6.2 Fenêtre de Kaiser-Bessel

Les fenêtres présentées ci-dessus ont des formes et des atténuations fixes apportant chacune sa largeur du lobe principal et son atténuation des lobes latéraux. La contribution de Kaiser fut de proposer une fenêtre s'adaptant à l'atténuation désirée. Cette fenêtre est définie par une fonction de Bessel :

$$w_k[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\beta\sqrt{1-(1-n/N_s)^2})}{I_0(\beta)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13.30)$$

avec :

- I_0 = fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro
- β = paramètre de forme de la fenêtre
- $N_s = N/2$ = point de symétrie de la fenêtre

Calcul de la fonction de Bessel

L'usage fréquent des fenêtres de Hann ou de Hamming est dû à ce que ces fonctions sont familières et faciles à calculer. Cependant, bien que la fonction de Bessel soit en général peu connue, il est aisé de la calculer en utilisant son développement en série :

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2} \right)^n \right]^2 \quad (13.31)$$

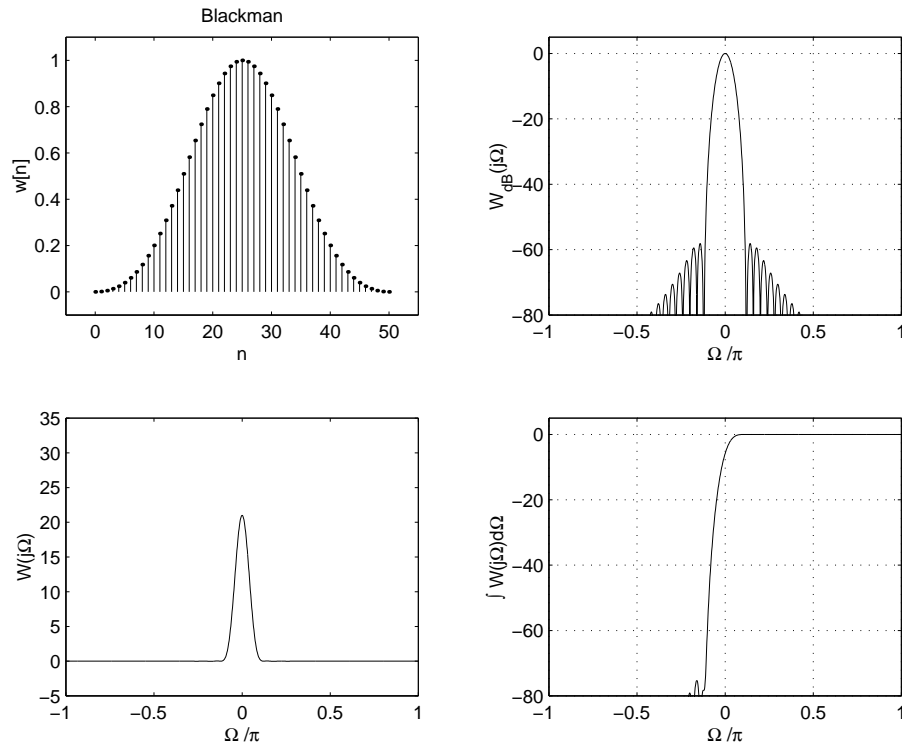


FIG. 13.16: Fenêtre de Blackman

Cette série converge rapidement et la procédure de calcul proposée par Kaiser est très simple à mettre en oeuvre :

```

function Bessel0 (x :real) :real;
  const eps = 1.0e-6;
  var d, ds, s : real;
begin
  d = 0.0;  ds = 1.0;  s = 1;
  repeat
    d = d + 2.0;
    ds = ds * (x / d) * (x / d);
    s = s + ds;
  until abs (ds/(s+eps)) < eps;
  Bessel0 = s;
end;

```

Calcul des paramètres des fenêtres de Kaiser

La figure 13.18 montre les caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser. On en tire les conclusions suivantes :

- en augmentant la longueur du filtre N , on diminue la largeur du lobe principal
- en augmentant le paramètre de forme β , on diminue l'amplitude des lobes latéraux.

13.6 Caractéristiques de quelques fenêtres

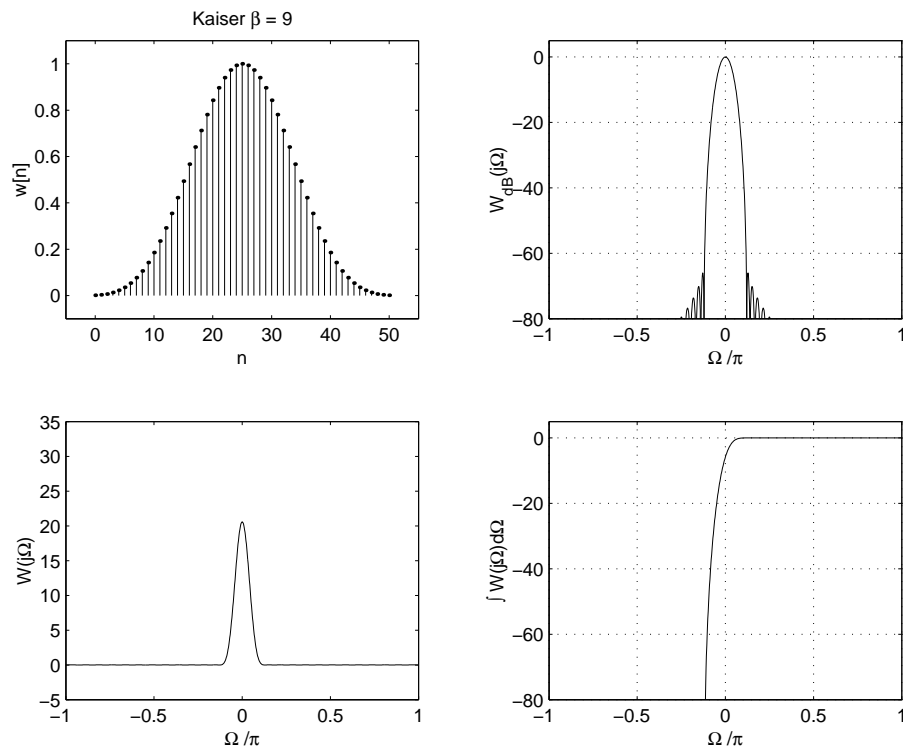


FIG. 13.17: Fenêtre de Kaiser avec $\beta = 9$

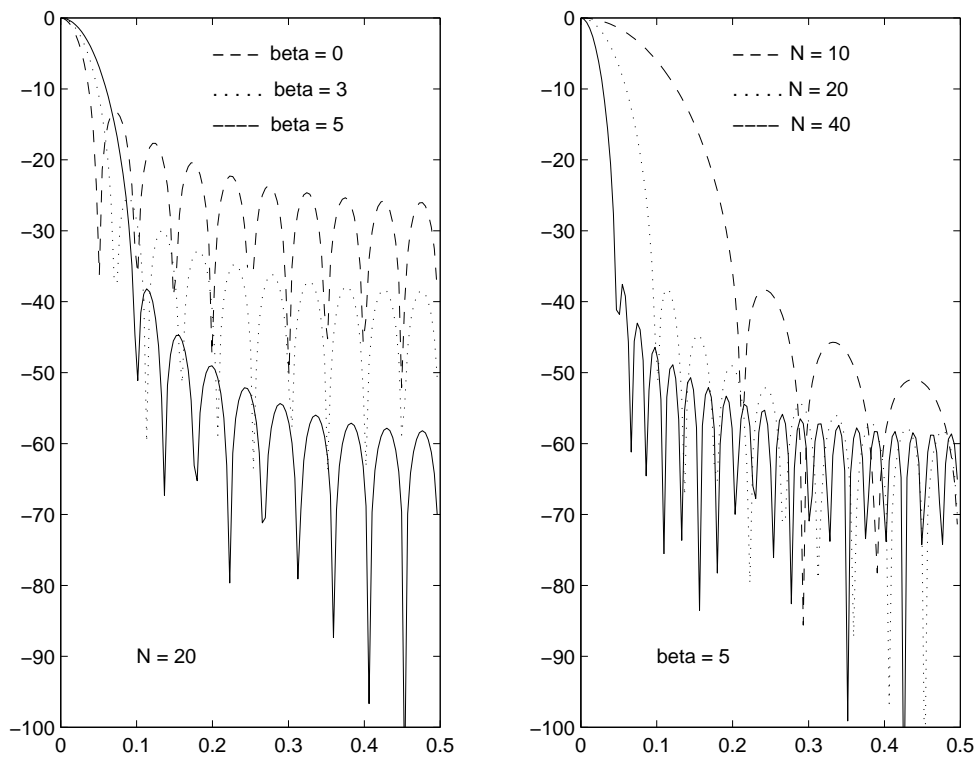


FIG. 13.18: Caractéristiques fréquentielles de quelques fenêtres de Kaiser

Après une simulation numérique extensive, Kaiser a obtenu une paire de formules qui permettent de trouver β et N à partir des spécifications demandées. Ces spécifications sont l'atténuation A_{dB} et la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$ exprimée en radians.

Le facteur de forme β dépend uniquement de l'atténuation A_{dB}

$$\beta = \begin{cases} 0.1102 (A_{dB} - 8.7) & \text{si } A_{dB} > 50 \\ 0.5842 (A_{dB} - 21)^{0.4} + 0.078862 (A_{dB} - 21) & \text{si } 21 \leq A_{dB} \leq 50 \\ 0 & \text{si } A_{dB} < 21 \end{cases} \quad (13.32)$$

La longueur du filtre est déterminée par l'atténuation A_{dB} et la bande de transition $\Delta\Omega$ souhaitée

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} \quad (13.33)$$

13.7 Conclusions sur l'usage des fenêtres

13.7.1 Propriétés et utilisation des fenêtres

L'ensemble des propriétés concernant les fenêtres et les filtres étudiés ci-dessus sont réunies dans les tableaux 13.1 à 13.3. On y trouve les caractéristiques spectrales de quelques fenêtres usuelles, les caractéristiques des filtres RIF en fonction des fenêtres utilisées, les avantages et inconvénients de ces fenêtres.

Fenêtres	Largeur du 1er lobe	Atténuation du 1er lobe [dB]	Décroissance des lobes suivants
Rectangle	$4\pi/N$	-13	20 dB/déc
Triangle (Bartlett)	$8\pi/N$	-27	40 dB/déc
Cosinus (Hann)	$8\pi/N$	-32	60 dB/déc
Hamming	$8\pi/N$	-43	20 dB/déc
Blackman	$12\pi/N$	-58	60 dB/déc
Kaiser $\beta = 4.54$	$7.2\pi/N$	-30	20 dB/déc
Kaiser $\beta = 5.66$	$8.4\pi/N$	-42	20 dB/déc

TAB. 13.1: Caractéristiques spectrales des fenêtres usuelles

Fenêtres	Ondulation R_p [dB]	Atténuation max. A_{max} [dB]	Bande de transition $\Delta\Omega$
Rectangle	0.74	21	$1.8 \pi/N$
Triangle (Bartlett)	0	25	$6.1 \pi/N$
Cosinus (Hann)	0.055	44	$6.2 \pi/N$
Hamming	0.014	53	$6.6 \pi/N$
Blackman	0.0017	74	$11 \pi/N$
Kaiser $\beta = 4.54$	0.025	50	$5.8 \pi/N$
Kaiser $\beta = 5.66$	0.009	60	$7.2 \pi/N$

TAB. 13.2: Caractéristiques des réponses fréquentielles des filtres RIF

Fenêtres	+/-	Remarques
Triangle (Bartlett)	+	simple à calculer ; pas de sinus ou cosinus
	+	bande spectrale étroite
	-	faible réjection (25 dB)
	=	décroissance spectrale moyenne (-40 dB/déc)
Cosinus (Hann)	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	=	réjection raisonnable (44 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Hamming	+	simple à calculer
	+	bande spectrale étroite
	+	bonne réjection (53 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
Blackman	+	simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	très bonne réjection (74 dB)
	+	forte décroissance spectrale (-60 dB/déc)
Kaiser	-	moins simple à calculer
	=	bande spectrale moyenne
	++	excellente réjection (100 dB)
	-	faible décroissance spectrale (-20 dB/déc)
	++	meilleur compromis atténuation / bande de transition

TAB. 13.3: Avantages et inconvénients des fenêtres utilisées dans la réalisation de filtres RIF

13.7.2 Démarche pour calculer un filtre

La démarche à suivre pour obtenir les coefficients du filtre souhaité est la suivante :

1. connaissant le gabarit du filtre désiré, choisir le filtre idéal correspondant ;
2. calculer les pulsations caractéristiques Ω_k se situant au centre des bandes de transition ;
3. rechercher la réponse impulsionnelle $h_d[n]$ du filtre idéal ; si celle-ci n'est pas connue, on peut la calculer par transformation de Fourier inverse ;
4. choisir une fenêtre $w[n]$ satisfaisante du point de vue de l'atténuation (table 13.2) ;
5. connaissant la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$, calculer l'ordre du filtre N ;
6. calculer les coefficients du filtre en multipliant la réponse impulsionnelle par la fenêtre choisie

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n]$$

13.8 Réalisation d'un filtre passe-bas

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bas satisfaisant au cahier des charges suivant :

$$f_p = 1 \text{ kHz}, \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.4 \text{ kHz}, \quad A_a = 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

13.8.1 Préliminaires

La réponse du filtre sera construite à partir de celle d'un filtre passe-bas idéal tel que :

1. la fréquence de coupure se situe au centre de la bande de transition

$$f_c = \frac{f_p + f_a}{2} = 1.2 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_e} = 2\pi \frac{1.2 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.24 \pi$$

2. la largeur de la bande de transition requise vaut

$$\Delta f = f_a - f_p = 0.4 \text{ kHz}$$

on a donc :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.4 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.08 \pi$$

3. la réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bas (équ. 13.17)

$$h_d[n] = h_b[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_c}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. le tableau 13.2 montre que pour cet exemple, on peut utiliser la fenêtre de Hamming ou la fenêtre universelle de Kaiser. Considérons ces deux cas.

13.8.2 Fenêtrage de Hamming

La fenêtre de Hamming apporte une atténuation de 53 dB et une bande de transition de largeur

$$\Delta\Omega = \frac{6.6 \pi}{N}$$

On en déduit immédiatement la longueur N du filtre :

$$N = \frac{6.6 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.6 \pi}{0.08 \pi} = 82.5 \simeq 84$$

que l'on a arrondi à la première valeur paire supérieure. Le point de symétrie se situe donc en $N_s = 42$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 13.17), on obtient :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_c)}{(n-N_s)\Omega_c} \\ &= \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Hamming $w_h[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-42))}{\pi (n-42)} \cdot (0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{84})) & \text{si } 0 \leq n \leq 84 \\ 0.24 & \text{si } n = 42 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 13.19. Il est intéressant de relever que, en plus de la phase linéaire offerte par le filtre RIF, sa bande de transition est remarquablement étroite.

À titre comparatif, on y a ajouté en pointillé la réponse d'un filtre de Butterworth d'ordre 12 (filtre RII). Ce filtre d'ordre 12 réalisé avec 6 cellules biquadratiques requiert environ 36 multiplications-additions contre 84 pour le filtre RIF. Théoriquement, le gabarit aurait pu être respecté avec un filtre RII d'ordre 24.

La figure 13.20 illustre la différence de comportement des réponses indicielles des filtres RIF ou RII.

13 SYNTHÈSE DES FILTRES NON RÉCURSIFS

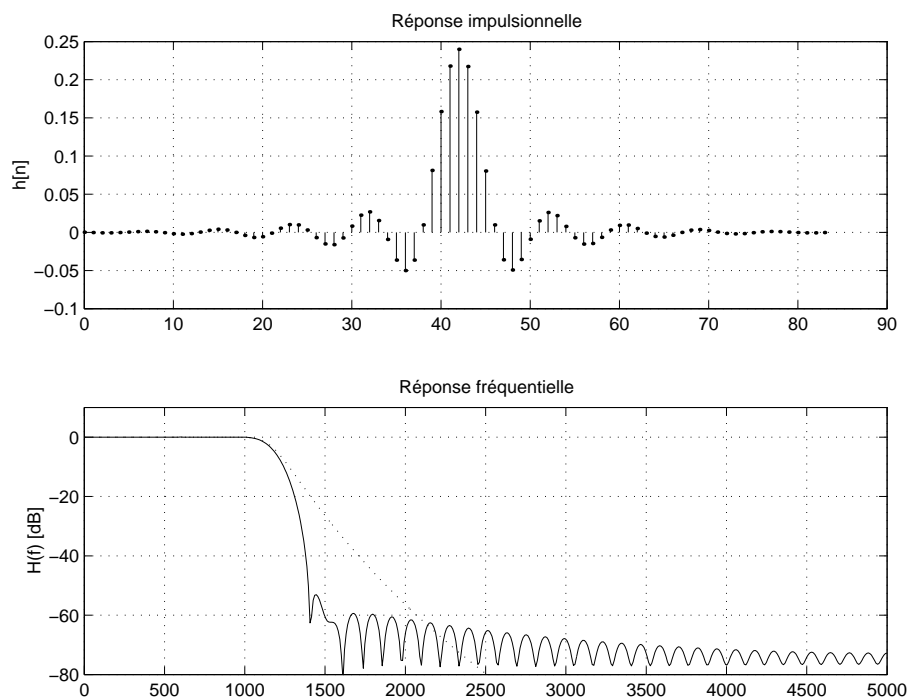


FIG. 13.19: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Hamming)

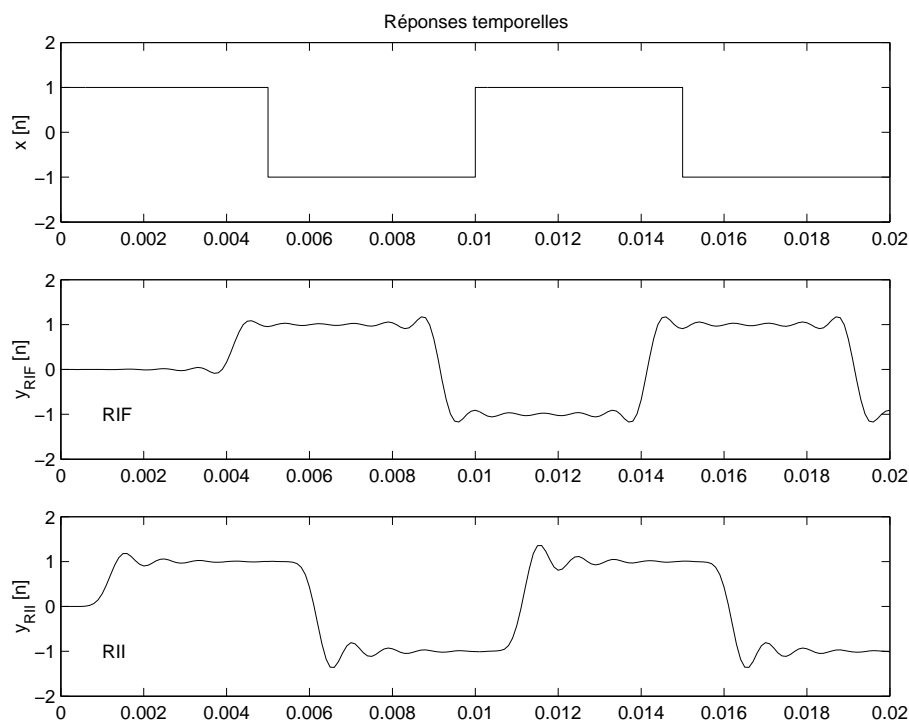


FIG. 13.20: Comparaison des réponses temporelles

13.8.3 Fenêtrage de Kaiser

Dans ce cas, l'atténuation A_{dB} détermine le facteur de forme β . Comme $A_{db} = 50$, il vient (équ. 13.32)

$$\beta = 0.1102 (A_{dB} - 8.7) = 0.1102 (50 - 8.7) = 4.55$$

L'ordre du filtre est fixé par la bande de transition $\Delta\Omega$ et l'atténuation A_{db} (équ. 13.33)

$$N \geq \frac{A_{dB} - 8}{2.285 \Delta\Omega} = \frac{50 - 8}{2.285 \cdot 0.08 \pi} = 73.1 \simeq 74$$

La valeur trouvée (73.1) est augmentée à 74 de manière à obtenir un ordre pair ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 37$. Portant ces valeurs dans la réponse impulsionnelle désirée (équ. 13.17), on obtient

$$h_d[n] = \frac{\Omega_c \sin((n - N_s)\Omega_c)}{\pi (n - N_s)\Omega_c} = \frac{\sin(0.24 \pi (n - 37))}{\pi (n - 37)}$$

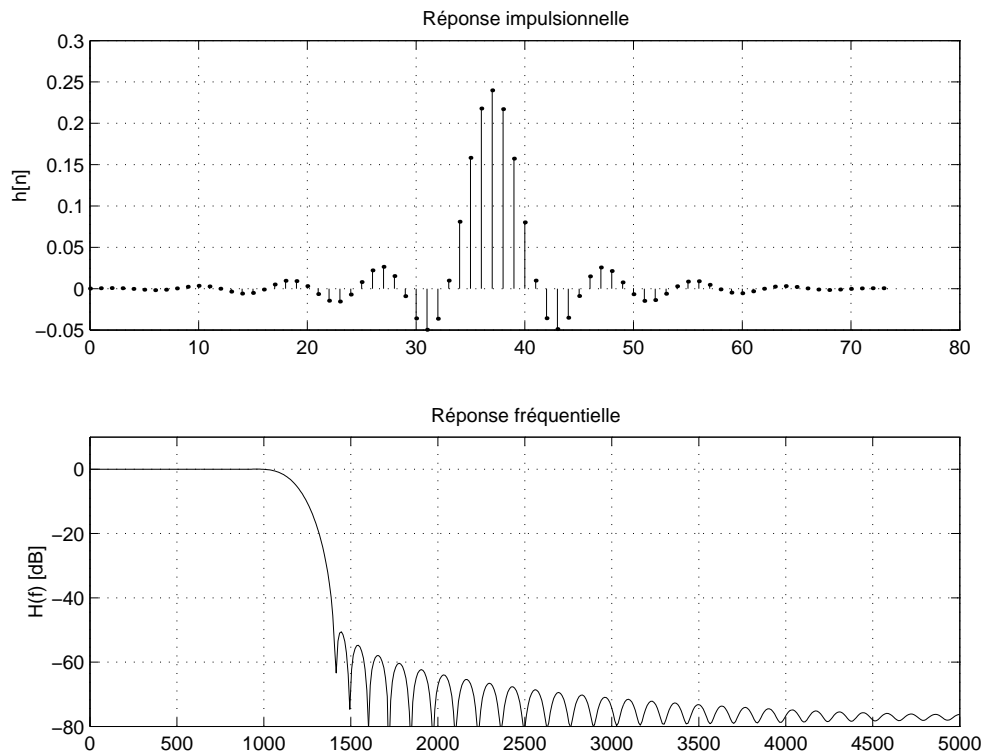


FIG. 13.21: Réponses impulsionnelle et fréquentielle (Kaiser)

En multipliant cette réponse par la fenêtre de Kaiser $w_k[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = h_d[n] \cdot w_k[n] = \begin{cases} \frac{\sin(0.24 \pi (n-37))}{\pi (n-37)} \cdot \frac{I_0(4.55 \sqrt{1-(1-n/37)^2})}{I_0(4.55)} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle de ce filtre RIF sont présentées dans la figure 13.21.

13.9 Réalisation d'un filtre passe-bande

Considérons la réalisation d'un filtre passe-bande satisfaisant au gabarit suivant :

fréq. d'échant.	10 kHz	Atténuation
1 ^{ere} bande d'arrêt	0... 1.8 kHz	30 dB
bande passante	1.9...2.1 kHz	0 dB
2 ^{eme} bande d'arrêt	2.4... 5 kHz	40 dB

Dans le cas, où deux atténuations différentes sont proposées pour les bandes d'arrêt, les calculs doivent se faire avec la plus forte atténuation (ici 40 dB). De même, lorsque les largeurs des bandes de transition diffèrent, on prendra la plus faible des deux.

Dans le tableau 13.2, nous voyons que la fenêtre en cosinus offre l'atténuation souhaitée. Comme la plus petite bande de transition a une largeur de 0.1 kHz, on en déduit que les fréquences définissant les bandes de transition sont les suivantes :

f_{a1}	f_{p1}	f_{p2}	f_{a2}
1.8 kHz	1.9 kHz	2.1 kHz	2.2 kHz

Ce qui donne pour les deux bandes de transition la largeur suivante :

$$\Delta\Omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_e} = 2\pi \frac{0.1 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.02 \pi$$

L'ordre du filtre est fixé par la largeur de la bande de transition $\Delta\Omega$:

$$N \geq \frac{6.2 \pi}{\Delta\Omega} = \frac{6.2}{0.02} = 310$$

Comme cette valeur est entière et paire, il n'est pas nécessaire de l'augmenter ; le point de symétrie se situe donc en $N_s = 155$.

La réponse du filtre est construite à partir de celle d'un filtre passe-bande idéal dont les fréquences caractéristiques se situent au centre des 2 transitions

$$f_{c1} = \frac{f_{a1} + f_{p1}}{2} = 1.85 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = \frac{f_{p2} + f_{a2}}{2} = 2.15 \text{ kHz}$$

donc :

$$\Omega_{c1} = 2\pi \frac{f_{c1}}{f_e} = 2\pi \frac{1.85 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.37 \pi$$

$$\Omega_{c2} = 2\pi \frac{f_{c2}}{f_e} = 2\pi \frac{2.15 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 0.43 \pi$$

13.9 Réalisation d'un filtre passe-bande

La réponse impulsionnelle désirée est celle d'un filtre passe-bande (équ. 13.22) :

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{(n-N_s)\Omega_{c2}} - \frac{\Omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{(n-N_s)\Omega_{c1}} & \text{si } 0 \leq n \neq N_s \leq N \\ \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{\pi} & \text{si } n = N_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, plus simplement :

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c2})}{\pi(n-N_s)} - \frac{\sin((n-N_s)\Omega_{c1})}{\pi(n-N_s)} \\ &= \frac{\sin(0.43\pi(n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n-155))}{\pi(n-155)} \end{aligned}$$

En multipliant cette réponse par la fenêtre en cosinus $w_c[n]$, on obtient la réponse impulsionnelle du filtre RIF recherché

$$h[n] = \left(\frac{\sin(0.43\pi(n-155))}{\pi(n-155)} - \frac{\sin(0.37\pi(n-155))}{\pi(n-155)} \right) \cdot \frac{1 - \cos(2\pi n/310)}{2}$$

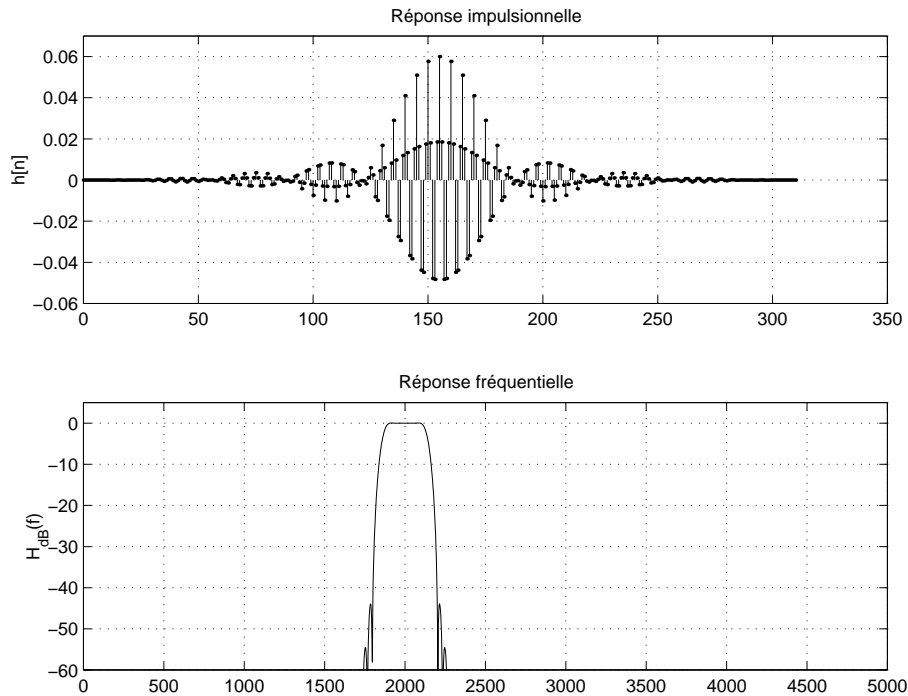


FIG. 13.22: Réponses impulsionnelle et fréquentielle d'un filtre passe-bande (cosinus)

Les réponses impulsionnelle et fréquentielle sont présentées dans la figure 13.22. Un tracé plus détaillé de la réponse fréquentielle permet de relever une ondulation maximum de 0.05 dB aux 2 extrémités de la bande passante et des pulsations de coupure (-3 dB) situées en 1864 Hz et 2136 Hz.

13.10 Exercices

RIF 1 : Réalisez un filtre passe-bas non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}; \quad f_a = 1.2 \text{ kHz} \quad A_a \geq 50 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz. Pour cela :

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:
 - a) carré de période $K_p = 100$;
 - b) sinus de fréquence $f_1 = 1.0 \text{ kHz}$;
 - c) sinus de fréquence $f_2 = 1.2 \text{ kHz}$;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 2 : Réalisez un filtre passe-haut non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_a = 0.8 \text{ kHz} \quad A_a \geq 40 \text{ dB}; \quad f_p = 1.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:
 - a) carré de période $K_p = 100$;
 - b) sinus de fréquence $f_1 = 0.8 \text{ kHz}$;
 - c) sinus de fréquence $f_2 = 1.0 \text{ kHz}$;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 3 : Réalisez un filtre passe-bande non récursif satisfaisant au cahier des charges suivant

$$f_{p1} = 1.0 \text{ kHz} \quad f_{p2} = 2.0 \text{ kHz} \quad A_p = 0 \text{ dB}$$

$$f_{a1} = 0.9 \text{ kHz} \quad A_{a1} \geq 50 \text{ dB} \quad f_{a2} = 2.3 \text{ kHz} \quad A_a \geq 40 \text{ dB}$$

alors que la fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

1. choisissez la fenêtre et calculez l'ordre N du filtre ;
2. tracez sa réponse impulsionnelle et sa réponse fréquentielle en dB ;
3. avec le zoom, mesurez quelques valeurs intéressantes d'atténuation ;
4. générez les signaux suivants d'amplitude $A = 1$:

- a) carré de période $K_p = 200$;
 - b) sinus de fréquence $f_1 = 1.5 \text{ kHz}$;
 - c) sinus de fréquence $f_2 = 0.6 \text{ kHz}$;
5. filtrez ces 3 signaux et tracez leurs réponses.

RIF 4 : On veut réaliser un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie tel que sa bande passante soit de 1 kHz alors que $f_e = 20 \text{ kHz}$.

1. Analyse temporelle
 - a) calculez $h_b[n]$;
 - b) tronquez h_b à $N = 128$ et rendez-la causale ;
 - c) que vaut $h_b[n]$ à ses extrémités ?
 - d) est-ce raisonnable de l'accepter tel quel ? sinon que pouvez-vous faire ?
2. Analyse fréquentielle

Afin d'augmenter la résolution spectrale, on ajoute des 0 à la réponse impulsionnelle ; comme l'usage de la FFT nécessite que la longueur du signal analysé soit une puissance de 2, essayez 512 et/ou 1024.

 - a) calculez $H(jf)$ (`fft`) ;
 - b) tracez le module et la phase de $H(jf)$;
 - c) est-ce que cela correspond à votre attente ?
 - d) que valent les extrema de la bande passante et celle d'arrêt (`zoom`) ?
 - e) mesurez la fréquence de coupure et la largeur de la bande de transition.
3. Amélioration de la réponse fréquentielle
 - a) reprenez $h_b[n]$ et multipliez-la par une fenêtre en cosinus ou de Hamming ;
 - b) répétez les points 2.a), ..., 2.d).
 - c) concluez.

RIF 5 :

1. Générez un signal $x[n]$ de 64 échantillons à partir d'un cosinus discret tel que $A = 10$, $\Omega_0 = \pi/16$, $\alpha = \pi/3$.
2. Le système dans lequel passe ce signal $x[n]$ est décrit par les 2 équations suivantes :

$$w[n] = (x[n])^2$$

$$y[n] = w[n] - w[n - 1]$$

3. Dessinez le schéma fonctionnel de ce système et décrivez ce que réalise chaque fonction ; en quoi ces 2 opérateurs sont-ils à réponse impulsionnelle finie ?
4. Tracez sur une même figure les 3 signaux (`subplot`) ; observez-les.
5. Esquissez à la main le spectre de chacun des 3 signaux ;

- a) remarquez que le premier opérateur est non linéaire et qu'il génère des fréquences non présentes dans $x[n]$; lesquelles ?
 - b) d'un point de vue temporel et fréquentiel, quel est l'effet du deuxième opérateur ?
6. Observez le signal $w[n]$; quelles sont les fréquences présentes ?
 7. Transformez de Fourier les 3 signaux ; tracez sur une nouvelle figure les 3 spectres d'amplitudes.
 8. Observez ces spectres et justifiez votre analyse précédente.

Réf. : McClellan, Schaffer, Yoder : *DSP FIRST*, Prentice Hall, 1998, p. 461

RIF 6 :

1. Générez un signal $x[n]$ de 128 échantillons tel que

$$x[n] = 10 \cos(2\pi n/T_0 + \pi/6) + 2 \cos(6\pi n/T_0 + \pi/2)$$

avec $T_0 = 32$; que valent les pulsations normalisées de $x[n]$?

2. Ce signal est appliqué à un filtre RIF d'ordre 2 décrit par

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n-1] + x[n-2]$$

Dessinez son schéma fonctionnel.

3. Quel est le gain DC de ce filtre ?
4. Quelle est sa réponse impulsionnelle $h[n]$?
5. Avec Matlab, calculez et tracez les signaux $x[n]$, $h[n]$ et $y[n]$.
6. Observez les résultats ; quel est l'effet du filtre ?
7. Justifiez l'allure de $y[n]$ en calculant et traçant le module de la réponse fréquentielle $H(j\Omega) = \text{TF}(h[n])$ avec $N_{FFT} = 128$ ainsi que les spectres d'amplitude de $x[n]$ et $y[n]$.

RIF 7 : Poursuivant l'exercice précédent et partant de son équation

$$y[n] = x[n] - 2 \cos(3\pi/16) x[n-1] + x[n-2]$$

1. Calculez sa fonction de transfert

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

puis

- a) calculez ses pôles et zéros ;
 - b) tracez-les dans le plan complexe ;
 - c) justifiez l'effet réjecteur de ce filtre.
2. Pour quelle fréquence normalisée a-t-on $H(jf/f_e) = 0$?

3. Tenant compte de ce qui vient d'être vu, quelle est l'équation d'un filtre réjeteur capable de supprimer
 - a) le 50 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz ;
 - b) le 50 Hz et 150 Hz d'un signal échantillonné à 1kHz.
4. Générez ces signaux et vérifiez vos algorithmes.

Bibliographie

- [1] V.K. Ingle, J.G. Proakis : *Digital Signal Processing Using MatLab*, PWS Publishing Company, 1997
- [2] B. Porat : *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley, 1997
- [3] J.F. Harris : *On the Use of Windows for Harmonic Analysis*, Proc. IEEE, vol 66, No.1, Jan.1978
- [4] J.F.Kaiser, F.F. Kuo : *System Analysis by Digital Computer*, John Wiley, 1966