

17 Formulaire Signaux et systèmes

17.1 Systèmes analogiques

Produit de convolution pour des systèmes causaux

$$y(t) = \int_0^t h(\theta) x(t - \theta) d\theta = \int_0^t x(\theta) h(t - \theta) d\theta$$

Transformation de Laplace

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s} & \exp(-at) &\leftrightarrow \frac{1}{s+a} \\ \cos(\omega t) &\leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \sin(\omega t) &\leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ x(t \rightarrow 0) &= s X(s)|_{s \rightarrow \infty} & x(t \rightarrow \infty) &= s X(s)|_{s \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Formes canoniques de Bode et de Laplace

$$\begin{aligned} 1 + \frac{s}{\omega_1} & \quad 1 + \frac{1}{Q_0} \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 \\ s + \omega_1 & \quad s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 & \zeta &\equiv \frac{1}{2Q_0} \end{aligned}$$

Stabilité et instants caractéristiques

$$\text{stabilité} \Rightarrow \operatorname{Re}(p_k) < 0$$

$$\tau = \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_k)|}, \quad T_p = \frac{2\pi}{|\operatorname{Im}(p_k)|}, \quad t_{trans} \simeq 5\tau, \quad N_{osc} = \frac{t_{trans}}{T_p} \simeq \left| \frac{\operatorname{Im}(p_k)}{\operatorname{Re}(p_k)} \right|$$

Réponse indicielle d'un système d'ordre 2

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$D(s) = 0 \Rightarrow p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p \quad \text{si } \zeta < 1$$

$$t_{5\%} \simeq 3\tau \quad \text{et} \quad \zeta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Systèmes contre-réactionnés

$$G_{bf}(s) \equiv G_w(s) \equiv \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

17.2 Signaux analogiques

Valeurs efficaces des signaux carrés, sinusoïdaux et triangulaires d'amplitude A

$$X_{car,eff} = A = \frac{A}{\sqrt{1}}, \quad X_{sin,eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad X_{tri,eff} = \frac{A}{\sqrt{3}}, \quad \text{avec } X_{dc} = 0$$

Signaux périodiques développés en séries de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk) \exp(+j2\pi k f_0 t) \quad \text{avec} \quad X(jk) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 = X(j0) \\ A_k = 2 |X(jk)| \\ \alpha_k = \angle X(jk) \end{cases}$$

SIR centrée d'amplitude A , de période T et de largeur Δt

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}(k f_0 \Delta t)$$

SIT centrée d'amplitude A , de période T et de largeur $2\Delta t$

$$X(jk) = A \frac{\Delta t}{T} \left(\frac{\sin(k\pi f_0 \Delta t)}{k\pi f_0 \Delta t} \right)^2 = A \frac{\Delta t}{T} \text{sinc}^2(k f_0 \Delta t)$$

SIE d'amplitude A , de période T et de constante de temps τ

$$X(jk) = A \frac{\tau}{T} \frac{1 - \exp\left(-\left(\frac{T}{\tau} + j2\pi k f_0 T\right)\right)}{(1 + j2\pi k f_0 \tau)} \simeq A \frac{\tau}{T} \frac{1}{1 + j2\pi k f_0 \tau} \quad \text{si } \tau \ll T$$

Quelques propriétés des séries de Fourier

puissance :
$$P \equiv \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(jk)|^2 = P_{dc} + P_{ac}$$

$$P \equiv X_{eff}^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

décalage :
$$y(t) = x(t + t_d) \Leftrightarrow Y(jk) = \exp(+j2\pi k f_0 t_d) X(jk)$$

modulation :
$$x(t) = \exp(\pm j2\pi f_p t) \cdot m(t) \Leftrightarrow X(jk) = M(j(kf_0 \mp f_p))$$

rotation Oy :
$$y(t) = x(-t) \Leftrightarrow Y(jk) = X^*(jk)$$

Signaux non périodiques (transformation de Fourier)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) \exp(+j2\pi f t) df \Leftrightarrow X(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

convolution :
$$x(t) \otimes h(t) \Leftrightarrow H(jf) \cdot X(jf), \quad h(t) \cdot x(t) \Leftrightarrow H(jf) \otimes X(jf)$$

énergie :
$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(jf)|^2 df \quad [V^2 \text{ sec}] \text{ ou } [V^2/\text{Hz}]$$

valeurs à l'origine :
$$x(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jf) df, \quad X(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

Impulsion rectangulaire d'amplitude A et de largeur Δt

$$x(t) = A \text{ rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right) \Leftrightarrow X(jf) = A \Delta t \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f \Delta t} = A \Delta t \text{ sinc}(f \Delta t)$$

Filtre passe-bas idéal : $H(jf) = 1$ si $-\Delta f < f < +\Delta f$

$$H(jf) = \text{rect} \left(\frac{f}{2\Delta f} \right) \Leftrightarrow h(t) = 2\Delta f \frac{\sin(2\pi \Delta f t)}{2\pi \Delta f t} = 2\Delta f \text{ sinc}(2\Delta f t)$$

17.3 Échantillonnage des signaux**Signaux échantillonnés**

$$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \Leftrightarrow X_e(jf) = X(jf) \otimes D(jf) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(j(f - m f_e))$$

17 Formulaire Signaux et systèmes

recouvrement spectral : $f_{app} = |m f_e - f| < \frac{f_e}{2}, \quad m > 1$

théorème de Shannon : $f_e > 2 f_{max}, \quad$ pratiquement : $f_e \simeq (3 \cdots 5) f_{max}$

filtre anti-recouvrement (le plus souvent de type Butterworth d'ordre $m = 8$) :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2m}}}$$

Bruit de quantification d'un convertisseur n bits

$$Q = \frac{\Delta_{CAN}}{2^n} = \frac{U_{max}}{2^{n-1}}, \quad Q_{eff} = \frac{Q}{\sqrt{12}}, \quad SNR \equiv \frac{X_{eff}}{Q_{eff}}$$

non linéarité = perte du bit LSB (de moindre poids)

$$SNR_{max} [\text{dB}] \approx 6 n_{bits} - 6 \quad (\text{y compris la perte du bit LSB})$$

17.4 Signaux et systèmes numériques

Transformation en z (systèmes causaux)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}, \quad z = \text{décalage avant}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$y[n] = h[n] \otimes x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

$$y[n=0] = Y(z)|_{z \rightarrow \infty}, \quad y[n \rightarrow \infty] = (z-1)Y(z)|_{z=1}$$

$x[n] \quad n \geq 0$	$X(z)$	$x(t) \quad t \geq 0$	$X(s)$
$\delta[n]$	1	$\delta(t)$	1
$\epsilon[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	t	$\frac{1}{s^2}$
α^n	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
$\cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$\sin(n \Omega_0)$	$\frac{\sin \Omega_0 z}{z^2 - 2 \cos \Omega_0 z + 1}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \cos(n \Omega_0)$	$\frac{z^2 - \alpha \cos \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$\alpha^n \sin(n \Omega_0)$	$\frac{\alpha \sin \Omega_0 z}{z^2 - 2\alpha \cos \Omega_0 z + \alpha^2}$	$\exp(-at) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

Produit de convolution (systèmes causaux RIF de longueur N)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k] \quad 0 \leq n < \infty$$

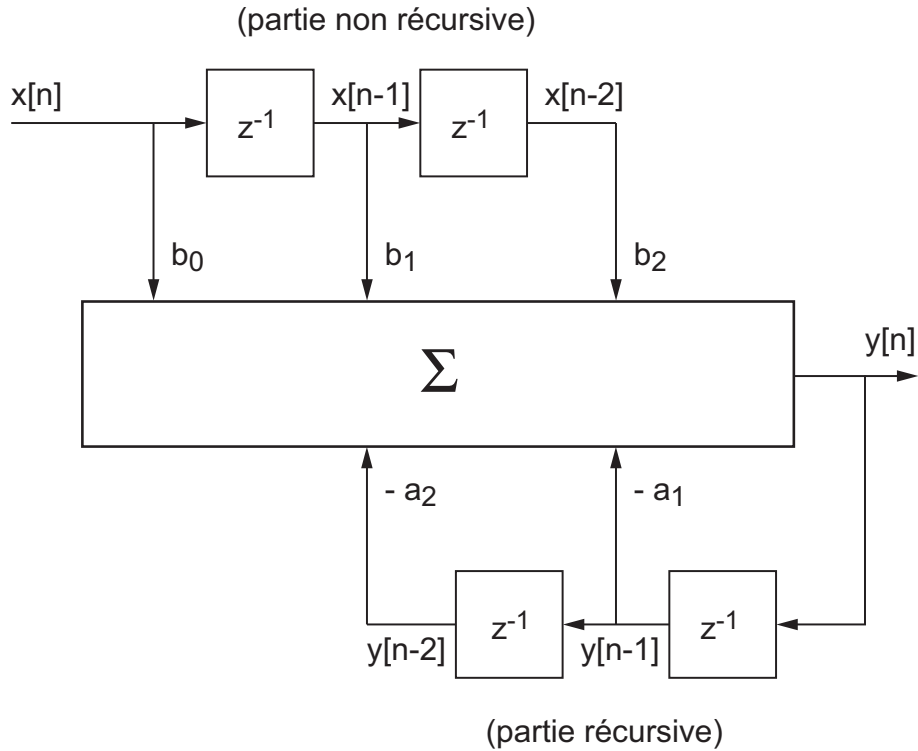
$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = h[0] + h[1] z^{-1} + h[2] z^{-2} + \dots$$

Équations aux différences (systèmes causaux RII d'ordre N)

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots$$

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots}$$

Schéma fonctionnel (ordre 2)



Stabilité et instants caractéristiques (ordre 2)

$$\begin{aligned} \text{p\^oles de } H(z) &\Rightarrow D(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \\ \text{d'o\^u } p_{1,2} &= a \pm jb = R \exp(\pm j\Omega) \\ \text{avec } R &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \Omega = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \\ \text{stabilit\^e} &\Rightarrow |p_k| = R < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{|\ln(R)|} & K_{tr} &\simeq 5 K_c = \frac{5}{|\ln(R)|} \\ K_p &= \frac{2\pi}{\Omega} & N_{osc} &= \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5}{2\pi} \frac{\Omega}{|\ln(R)|} \end{aligned}$$

Fonctions de transfert et r\^eponses fr\^equentielles (ordre 2)

$$H(j\Omega) = H(z)|_{z=e^{+j\Omega}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega}} = \frac{b_0 e^{+j2\Omega} + b_1 e^{+j\Omega} + b_2}{e^{+j2\Omega} + a_1 e^{+j\Omega} + a_2}$$

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow \Omega = 0 \Leftrightarrow z = +1 \Rightarrow H(f = 0) = \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{4} &\Leftrightarrow \Omega = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z = +j \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{4}\right) = \frac{-b_0 + j b_1 + b_2}{-1 + j a_1 + a_2} \\ f = \frac{f_e}{2} &\Leftrightarrow \Omega = \pi \Leftrightarrow z = -1 \Rightarrow H\left(f = \frac{f_e}{2}\right) = \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \end{aligned}$$

17.5 Analyse spectrale numérique

cf figure 17.1.

FIG. 17.1: Analyse spectrale numérique

